

✓

HELVETICA PHYSICA ACTA

SOCIETATIS PHYSICAE HELVETICAE
COMMENTARIA PUBLICA

VOLUMEN XVI

BASILEAE • IN AEDIBUS E. BIRKHAUSER & CIE.
MCMXXXIII

HELVETICA
PHYSICA ACTA

SCHWEIZERISCHE PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT
Copyright 1943 by: Société Suisse de Physique
Società Fisica Svizzera

VOLUME VII

Druck von Emil Birkhäuser & Cie., A. G., Basel

Terme hoher Multiplizität in Molekülspektren

von W. Müller.

(11. I. 1943.)

Inhalt: Es werden die Spektren von MnCl, MnBr und FeCl untersucht, bei welchen man auf Grund der Vorstellung, dass sich der Gesamtspin eines Moleküls aus den Spinvektoren der einzelnen Atome zusammensetzt, Molekülterme hoher Multiplizität erwartet. Die Spektren wurden in Emission mittels Hochfrequenzanregung und in Absorption mit einem Quarzspektrographen und am 3 m-Gitter (2. Ordnung) aufgenommen. Bei den Absorptionsaufnahmen wurden die zweiatomigen Radikale MX durch thermische Dissoziation der chemisch stabilen dreiatomigen Moleküle MX_2 angereichert. Der Bau und der Betrieb des hierzu verwendeten Kohlegriessofens werden beschrieben.

Die Analyse der ultravioletten Bandensysteme von MnCl und MnBr ergibt ${}^7\Pi - {}^7\Pi$ Übergänge, wobei sämtliche 19 Bandensysteme, welche auf Grund der Auswahlregel $\Delta Q = 0, \pm 1$ möglich sind, beobachtet werden. Die (0,0)-Banden lassen sich in quadratische Multiplettschemas einordnen. Die Multiplettkomponenten weisen folgende, mit wachsender Energie leicht abnehmende Abstände auf:

	Grundzustand (A in cm^{-1})	Oberer Zustand (A in cm^{-1})
MnCl . . .	78—84	35—38
MnBr. . .	123—135	67—71

Die Aufspaltung ist also annähernd äquidistant und somit die Formel $E = E_0 + A \cdot J \cdot \Sigma$ nahezu erfüllt.

In dem von andern Autoren teilweise analysierten Bandenspektrum von FeCl wird ein neuer ${}^4\Pi - {}^4\Sigma$ -Übergang gefunden, wobei der ${}^4\Pi$ -Term atomartige Aufspaltung zeigt.

Die Molekülterme werden aus den Termen der getrennten Atome und nach der Methode der „molecular orbitals“ bestimmt. Aus der Elektronenkonfiguration werden die beobachteten Unterschiede der Multiplettaufspaltung und der Kraftkonstanten von MnCl und FeCl gedeutet.

Zum Schluss werden weitere analoge Spektren diskutiert.

I. Einleitung.

§ 1. Über Molekülterme hoher Multiplizität ist trotz der grossen Zahl von Molekülspektren, die man bis heute beobachtet hat, sehr wenig bekannt, während bei den Atomspektren, insbesondere bei Elementen, welche Lücken in den innern Elektronenschalen aufweisen, zahlreiche solche Terme gefunden worden sind.

Im Spektrum von FeCl haben MIESCHER¹⁾ und MESNAGE²⁾ sechs eng benachbarte Bandensysteme beobachtet. Sie nehmen deshalb an, dass einer der beiden Zustände sechsfach aufgespalten ist (Sextett-Term). Im übrigen findet man neben den zahlreichen Dublett- und Triplett-Termen nur in einem einzigen Fall, nämlich bei O_2^+ , Quartett-Terme³⁾ erwähnt. Bei MnH vermuten PEARSE und GAYDON⁴⁾ einen ${}^5\Pi - {}^5\Sigma$ -Übergang*), ohne dass etwas Näheres über die Term aufspaltung gesagt wird.

Theoretisch sind diese Fragen jedoch schon mehrfach behandelt worden⁵⁾⁶⁾. Am einfachsten liegen die Verhältnisse, wenn der Einfluss der Kernrotation auf Spin und Bahnimpuls gering ist, und wenn sich die Spinvektoren aller Elektronen zu einer Resultierenden S zusammensetzen. Dann kann sich S auf $2S + 1$ Arten (= Multiplizität) im Magnetfeld, das durch den Umlauf der Elektronen in Richtung der Kernverbindungsachse erzeugt wird, einstellen. Bezeichnet man die Komponente von S in Richtung der Molekülachse mit Σ , den Bahnimpuls in dieser Richtung mit A , so lässt sich die Energie einer Multipllettkomponente durch die Formel

$$E = E_0 + A \cdot A \cdot \Sigma$$

darstellen, worin E_0 die Schwerpunktsenergie des Multipletts und A die Kopplungskonstante bedeuten. Die Resultante von Σ und A wird mit Ω bezeichnet. Da sich die Werte von Σ um eins unterscheiden, erwartet man unter den genannten Voraussetzungen auf Grund obiger Gleichung äquidistante Multipllettkomponenten.

Tabelle 1.

Multiplettaufspaltung von Molekültermen.

 $\Delta\nu$ = Abstände der Multipllettkomponenten in cm^{-1} .

	$\text{TiO}^7)$		$\text{ZrO}^8)$		$\text{FeCl}^1)$		$\text{CoCl}^9)$	
		$\Delta\nu$		$\Delta\nu$		$\Delta\nu$		$\Delta\nu$
angeregter Zustand	${}^3\Pi$	64	${}^3\Pi$	300	${}^6\Pi$	72	${}^3\Sigma?$	0
		69		188		64		
						55		
						47		
Grund-Zustand	${}^3\Pi$	75	${}^3\Pi$	313	${}^6\Sigma$	0	${}^3?$	563
		67		292				390

*) In dem von diesen Autoren herausgegebenen Buch „The identification of molecular spectra“, London 1941, wird dieses System als ${}^7\Pi - {}^7\Sigma$ -Übergang angegeben.

An den wenigen bisher in dieser Richtung untersuchten Spektren soll zunächst festgestellt werden, wieweit derartige Aufspaltungen wirklich beobachtet worden sind. Zu einem Vergleich der Abstände muss die Aufspaltung mindestens dreifach sein.

Wie aus Tabelle 1 zu entnehmen ist, sind die oben erwähnten Bedingungen (Kopplung und Spinzusammensetzung) bei TiO offenbar nahezu erfüllt, während dies bei FeCl nicht zutrifft. Eine Deutung dieser Unterschiede folgt in § 14.

Ausser den hier angeführten, sind noch weitere Triplett-Terme bekannt, jedoch von Molekülen mit kleinem Trägheitsmoment, bei welchen die Energieunterschiede der Rotation viel grösser sind als die Multipliettrennung. In solchen Fällen ändern sich die Abstände der Multipliettkomponenten mit steigender Rotationsquantenzahl. Für gleichartige Zweige und zwischen Rotationsniveaus gleicher Rotationsquantenzahl sind jedoch diese Abstände meistens gleich gross. Insbesondere gilt dies für die Quartett-Terme von O_2^+ .

In der vorliegenden Arbeit werden nun weitere Molekülspektren, bei denen man Terme hoher Multiplizität erwartet, untersucht*). Da sich der Gesamtspin S eines Moleküls aus den Spinvektoren der beiden Atome zusammensetzt, sind Verbindungen solcher Elemente gewählt, welche Atomterme hoher Multiplizität besitzen; nämlich Halogenide von Eisen und Mangan. Emissionsspektren dieser Salze sind zwar schon lange bekannt²⁾, doch konnten sie bisher infolge ihrer komplexen Struktur nicht analysiert werden und sind deshalb meistens dreiatomigen Trägern zugeschrieben worden.

Die Spektren von MnCl und FeCl werden hier erstmals in Absorption beobachtet.

II. Experimentelles.

Die Spektren wurden an einem Quarzspektrographen mittlerer Grösse und insbesondere in der zweiten Ordnung eines Rowland'schen 3 m-Gitters (2,8 ÅE/mm) aufgenommen.

§ 2. *Emissionsaufnahmen.* Die wasserfreien Substanzen**) wurden im Hochvakuum in Geisslerröhren aus Quarz hineinsublimiert, welche dann bei der Entladung, zur Erreichung des notwendigen Dampfdruckes, in einem elektrischen Ofen auf 500—600° C erhitzt werden mussten. Die Anregung erfolgte durch Hochfrequenz (Dia-

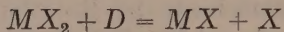
*) s. a. die vorläufige Mitteilung *Helv. Phys. Acta* **15**, 319, 1942.

**) Das wasserfreie FeCl_2 wurde durch Überleiten von Chlorwasserstoff über glühendes Eisen selbst hergestellt, da die Sublimation des käuflichen Produktes Schwierigkeiten bereitet.

thermieapparat) und Aussenelektroden¹⁰⁾. Die Belichtungszeit betrug am Quarzspektrographen 5—30 Sekunden, am 3 m-Gitter 30—60 Minuten (auf „Lumichrome“-Platten, resp. Film).

§ 3. *Absorptionsaufnahmen.* Erheblich schwieriger gestalteten sich die Absorptionsaufnahmen, und zwar deshalb, weil die chemisch stabile Form dieser Salze dreiatomig, von der Form MX_2 (M = Metall, X = Halogen) ist, während hier die Spektren der zweiatomigen Moleküle MX untersucht werden sollten.

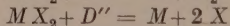
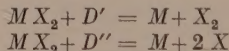
Durch thermische Dissoziation lässt sich ein Halogenatom abspalten*):



Die Dissoziationsenergie D von $FeCl_2$ ist von MIESCHER¹⁾ spektroskopisch, aus der Lage des Absorptionskontinuums zu 4,5 Volt (= 104 kcal) bestimmt worden (berechnet 4,2 Volt). Daraus lässt sich mit Hilfe der Nernst'schen Näherungsformel**) zur Berechnung von Gasgleichgewichten diejenige Temperatur angeben, die zur Erreichung eines bestimmten Partialdruckes von MX -Radikalen nötig ist. Die mit dieser Formel berechneten Werte von 1500 bis 1700° C stimmen gut mit den Temperaturen überein, die sich bei den Versuchen als notwendig erwiesen haben, wenn man für den absorbierenden Dampf einen Partialdruck von ca. 0,1 mm annimmt.

Für die Versuche wurde deshalb ein Kohlegriessofen gebaut, der bis zu einer Temperatur von 1800° C verwendbar ist. Fig. 1 zeigt einen Längsschnitt durch diesen Ofen***).

*) Beim thermischen Zerfall von MX_2 bestehen noch folgende Möglichkeiten:



K. BUTKOW und IR. WOJCIECHOWSKA (ZS. f. phys. Chem. (B) **49**, 131, 1941) haben für Halogenide der Eisengruppe die Dissoziationsenergien D , D' und D'' berechnet und mit den spektroskopisch bestimmten Werten verglichen. Sie haben gefunden, dass $D < D' < D''$ ist.

$$**) \log K_p = - \frac{U}{4,57 T} + (\sum n' - \sum n) \cdot 1,75 \log T + \sum n' C' - \sum n C$$

$$K_p = \frac{p_{FeCl} \cdot p_{Cl}}{p_{FeCl_2}} = \text{Gleichgewichtskonstante bei konst. Druck.}$$

U = Energiebedarf der Reaktion = D .

$\sum n'$, $\sum n$ = Summe der gasförmigen End- resp. Anfangsprodukte.

T = absolute Temperatur.

C' , C = konventionelle chemische Konstante (für die meisten Gase ungefähr gleich 3).

***) Herrn Dr. STIRNEMANN (Lonza A.G.) sei für die wertvollen Ratschläge beim Bau dieses Ofens bestens gedankt.

Zwischen zwei Rohren aus „SKA 90 extra“-Masse*) befindet sich eine 1 cm dicke Kohlegriesschicht (Elektrographit). Die Stromzufuhr erfolgt durch zwei wassergekühlte Elektroden aus Kupferrohr, die im Abstand von 24 cm in die Kohlegriesschicht eingebettet sind. Beim Anlegen der Spannung bilden sich zwischen den einzelnen Kohlekörnern kleine elektrische Lichtbogen, welche eine rasche Erhitzung der Kohleschicht und der Rohre bewirken.

Als Wärmeisolation dienen eine Schicht aus gepulvertem Aluminiumoxyd, die durch ein Schamotterrohr**) zusammengehalten wird, und Asbestwolle, mit welcher der Ofen aufgefüllt ist.

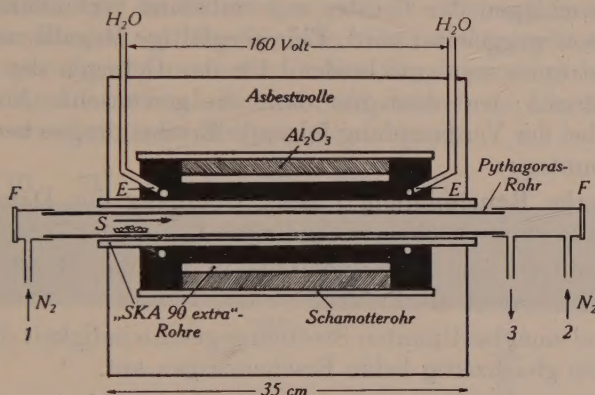


Fig. 1.

Kohlegriessofen.

■ = Kohlegriesschicht S = Substanz
F = Fenster aus Quarz E = Elektroden (Kupferrohr)

Die elektrische Leistungsaufnahme ist verhältnismässig klein. Um die Temperatur konstant auf 1700° C zu halten, sind ca. 3 KW (100 Volt, 30 Amp.) erforderlich. Allerdings konnten diese günstigen Bedingungen nur mit einer ganz bestimmten Körnung des Kohlegriesses (ca. 2 mm) und durch gleichmässiges Zusammenpressen der Schicht beim Auffüllen, erzielt werden. Zur Schonung der Rohre wurde die Anheizzeit auf eine Stunde ausgedehnt. Nach 6—10 Stunden Brenndauer war das teilweise verbrannte Kohlegriess wieder nachzufüllen und nach 20—30 Stunden, je nach Beanspruchung, mussten auch die „SKA 90“-Rohre ersetzt werden. Mangels geeigneter Instrumente konnten die Temperaturen während den Aufnahmen nicht gemessen werden.

*) ca. 95% Al_2O_3 , Schmelzpunkt ca. 1950° C (Fa. HALDENWANGER, Berlin).

**) Dieses hochfeuerfeste Schamotterrohr, das sich vorzüglich bewährt hat, wurde uns freundlicherweise von der Tonwerke A.G. in Lausen zur Verfügung gestellt.

Die Substanzen gelangten in gasdichten Rohren aus Pythagorasmasse zur Verdampfung. Diese Rohre sind beidseitig durch aufgekittete, wassergekühlte Quarzfenster abgeschlossen. Durch die beiden Öffnungen 1 und 2 (Fig. 1) wird in Schwefelsäure und Phosphorpentoxyd getrockneter Stickstoff von Atmosphärendruck eingeleitet; durch 3 kann er wieder entweichen. Diesem Stickstoffstrom fällt eine dreifache Aufgabe zu. Einmal soll er die Dämpfe von der Verdampfungsstelle nach der Mitte des Rohres führen, wo die Temperatur am höchsten ist; ferner soll er verhüten, dass die Dämpfe zu rasch nach den kalten Stellen diffundieren und schliesslich ein Beschlagen der Fenster mit Substanz verhindern, indem er von diesen weggeleitet wird. Eine sorgfältige Regulierung dieses Stickstoffstromes war entscheidend für das Gelingen der Absorptionenaufnahmen; trat doch nur dann die gewünschte Absorption ein, wenn bei der Verdampfung folgende Erscheinungen beobachtet werden konnten:

1. Starke Rauchbildung*) beim Übergang der Dämpfe von der heissen zu kalten Stellen, besonders zu Beginn der Verdampfung.
2. Kondensation der Salzdämpfe in dünnen, durchsichtigen Blättchen und nicht als Pulver.

Nur bei einer bestimmten Strömungsgeschwindigkeit des Stickstoffs traten gleichzeitig beide Erscheinungen auf.

Für kurze Aufnahmen am Quarzspektrographen wurden die im Hochvakuum entwässerten Substanzen in einem Graphitschiffchen in das Rohr gebracht. Merkwürdigerweise konnte bei Verdampfung in einem Pythagoras- oder Porzellanschiffchen keine Absorption festgestellt werden.

Für die Gitteraufnahmen war dieser Weg ungeeignet, da bei der langen Belichtungszeit von 3 Stunden ein mehrfaches Nachfüllen der Substanz nötig gewesen wäre. Deshalb wurde folgende Methode angewandt: An den Verdampfungsort bringt man an Stelle des Salzes das Metall der betreffenden Verbindung, bei FeCl ein Stück Eisenrohr, und mischt unter den eingeleiteten Stickstoff Chlorwasserstoff bei der Untersuchung von Chloriden, oder Bromdämpfe bei Bromiden. Diese Gase reagieren mit dem glühenden Metall und die entstehenden dampfförmigen Verbindungen werden sofort an die heissen Stellen geleitet. Auf diese Art konnten die Absorptionsbedingungen ohne Unterbruch beliebig lang aufrechterhalten werden.

*) Auch bei Versuchen in Eisenrohren trat dieser Rauch auf. Es handelt sich also nicht, wie man annehmen könnte, um Zersetzungsprodukte der Pythagorasrohre.

Als kontinuierliche Lichtquellen dienten eine Wasserstofflampe (2000 Volt; 0,5 Amp.) und für Aufnahmen im sichtbaren Spektralbereich und im nahen Ultraviolett eine Osram-Wolframbogenlampe.

III. Experimentelle Ergebnisse.

§ 4. In Fig. 2 sind die ultravioletten Bandensysteme von MnCl, MnBr und FeCl wiedergegeben, und zwar aus Emissionsspektren, die am Quarzspektrographen aufgenommen wurden. Das gemeinsame Merkmal sind die Bandengruppen, von denen jede eine grosse Anzahl von Banden enthält. Die Intensitätsverteilung ist aber nicht, wie in Diagonalgruppen eines einzelnen Bandensystems, nach einer Seite hin stark abfallend, sondern, abgesehen von Überlagerungseffekten, innerhalb einer Gruppe gleichmässig.

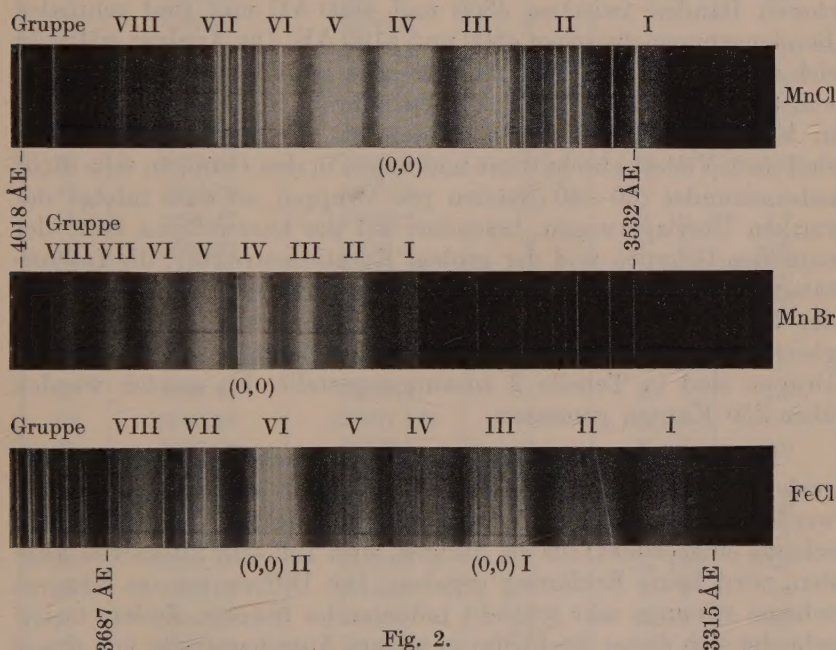


Fig. 2.

Ultraviolette Bandensysteme (Emission) von MnCl, MnBr und FeCl.

Durch die Hochfrequenzentladung werden die Substanzen in den Geisslerröhren teilweise zersetzt. Daher erscheinen neben den Molekülspektren auch die Spektren der Atome, die bei Eisen und Mangan besonders linienreich sind. Für die Auswertung der Spektren birgt dies Vor- und Nachteile. Einerseits können die Linien

beim Ausmessen der Bandenkanten direkt als Bezugsspektrum dienen; anderseits werden viele Kanten verdeckt, wodurch die Übersicht erschwert wird. Besonders bei MnCl , dessen Banden eine ziemlich grobe Rotationsstruktur besitzen, kann das Zusammenfallen von Rotationslinien und Atomlinien leicht eine Kante vortäuschen. Immerhin ist die Zahl und die Intensität der Atomlinien im Bereich der Banden geringer als beim reinen Atomspektrum. Diese auffallende Tatsache lässt sich besonders bei einem Vergleich der Spektren von MnCl und MnBr feststellen. Das Zurücktreten der Atomlinien ist auf Absorption zurückzuführen.

MnCl.

§ 5. Das Spektrum von MnCl besteht aus einem ausgedehnten Bandensystem zwischen 3500 und 4000 ÅE, einer Reihe von schwächeren Banden zwischen 4300 und 4600 ÅE und fünf schmalen Bandengruppen zwischen 4800 und 5100 ÅE. Die Analyse erstreckt sich nur auf das in 8 Gruppen getrennte Bandensystem im Bereich von 3500 bis 4000 ÅE (Fig. 2), das sowohl in Emission wie auch in Absorption aufgenommen worden ist. Die zugehörigen Banden sind nach Violett abgeschattiert und liegen in den Gruppen sehr dicht nebeneinander (30—40 Banden pro Gruppe), so dass infolge der starken Überlagerungen, besonders auf der kurzwelligen Seite der einzelnen Gruppen und der groben Rotationsstruktur, die Intensitäten nicht einheitlich bestimmt werden können. Beim Ausmessen der Bandenkanten dienen die Atomlinien des Mangans als Vergleichsspektrum. Die Wellenlängen der Banden der III. bis V. Gruppe sind in Tabelle 2 zusammengestellt. Im ganzen wurden über 250 Kanten gemessen.

Die von MESNAGE²⁾ vorgeschlagene Deutung dieses Bandensystems muss aus verschiedenen Gründen als unrichtig bezeichnet werden. Nur ein kleiner Teil der Banden ist in ein einziges Kantenschema eingeordnet; für die übrigen, zum Teil sehr intensiven Banden, wird keine Erklärung gegeben. Die Differenzen im Kantenschema stimmen sehr schlecht miteinander überein. Zudem unterscheidet sich dieses Spektrum in seinem Aussehen völlig von einem einfachen Bandensystem (vgl. Fig. 4).

Man erwartet vielmehr, wie in § 1 angedeutet, mehrere Bandensysteme. Da in Gruppe IV die intensivsten Banden liegen, ist anzunehmen, dass die (0,0)-Banden der Kernschwingung sich in dieser Gruppe befinden, was durch die Schwingungsanalyse bestätigt wird.

Tabelle 2.
Kanten von MnCl.
Gruppe IV

No.	Wellen- länge ÅE	Wellen- zahl cm ⁻¹	cm ⁻¹	Ω', Ω''	v', v''
1	3716,82	26897,1		-1, -2	0,0
2	3716,08	26902,4 ¹⁾			
3	3713,25	26922,9		-1, -2	1,1
4	3712,61	26927,6	*	-2, -2	0,0
5	3710,89	26940,1	↑	0, -1	0,0
6	3709,13	26952,8	45,5	-2, -2	1,1
7	3708,75	26955,6			
8	3707,17	26967,0	↓	0, -1	1,1
9	3706,34	26973,1	*	-1, -1	0,0
10	3705,20	26981,5	↑		
11	3704,81	26984,3	45,3	1, 0	0,0
12	3702,78	26999,1	↓	-1, -1	1,1
13	3702,23	27003,0	↓	-2, -1	0,0
14	3700,13	27018,4	*	0, 0	0,0
15	3698,68	(27029,0) ²⁾	↑	2, 1	0,0
16	3698,38	27031,2	45,1		
17	3696,47	27045,2	↓	0, 0	1,1
18	3695,60	27051,5	↓	-1, 0	0,0
19	3693,96	27063,5	*	1, 1	0,0
20	3692,94	27071,0	↑	3, 2	0,0
21	3692,52	27074,1	↑		
22	3691,91	27078,6	45,0	-1, 0	1,1
23	3690,44	27089,4	↓	1, 1	1,1
24	3689,32	(27097,5) ³⁾	↓	0, 1	0,0
25	3687,83	27108,5	*	2, 2	0,0
26	3687,49	27111,0	↑		
27	3686,84	27115,8	↑	4, 3	0,0
28	3685,88	27122,8	45,3	0, 1	1,1
29	3683,47	27140,6	↓	4, 3	1,1
30	3683,15	27142,9	↓	1, 2	0,0
31	3681,69	27153,8	*	3, 3	0,0
32	3680,82	27160,1	↑		
33	3676,7	27190	45 ↓	2, 3	0,0
34	3675,5	27199	*	4, 4	0,0
35	3670,4	27237		3, 4	0,0

¹⁾ Q - Zweig der Bande 1.

²⁾ fällt mit der (1,1)-Bande von (3,2) zusammen.

³⁾ fällt mit der (1,1)-Bande von (-2, -1) zusammen.

Tabelle 2. (Forts.)

Gruppe III

No.	Wellen- länge ÅE	Wellen- zahl cm ⁻¹	cm ⁻¹	Ω', Ω''	v', v''
36	3661,34	27304,7		-1, -2	1,0
37	3658,28	27327,5		-1, -2	2,1
38	3657,43	27333,9	*	-2, -2	1,0
39	3656,31	27342,2	↑	0, -1	1,0 i
40	3655,53	27348,0		0, -1	1,0
41	3655,28	27349,9		-1, -2	3,2
42	3654,32	27357,1	46,0 ↓	-2, -2	2,1
43	3653,30	27364,7		0, -1	2,1 i
44	3652,45	27371,1	↓	0, -1	2,1
45	3651,28	27379,9	*	-1, -1	1,0
46	3649,64	27392,2	↑	1, 0	1,0
47	3648,16	27403,3		-1, -1	2,1
48	3647,42	27408,9	46,4 ↓	-2, -1	1,0
49	3646,42	27416,4		1, 0	2,1
50	3645,10	27426,3	*	0, 0	1,0
51	3644,23	27432,8	↑	-2, -1	2,1
52	3643,77	27436,3		2, 1	1,0
53	3642,20	27448,1	45,2 ↓	0, 0	2,1
54	3640,83	27458,5		-1, 0	1,0
55	3639,11	27471,5	↓	1, 1	1,0
56	3637,99	27479,9	*	3, 2	1,0
57	3637,29	27485,2	↑	1, 1	2,1 i
58	3636,15	27493,8	45,1 ↓	1, 1	2,1
59	3634,63	27505,5		0, 1	1,0
60	3633,14	27516,6	↓	2, 2	1,0
61	3632,70	27519,9	*	0, 1	2,1 i
62	3632,11	27524,4	↑	4, 3	1,0
63	3631,64	27528,0	45,7 ↓	0, 1	2,1
64	3630,11	27539,5		2, 2	2,1
65	3628,46	27552,1	↓	1, 2	1,0
66	3627,12	27562,3	*	3, 3	1,0
67	3621,04	27608,5	46,2 ↓ *	4, 4	1,0

Tabelle 2. (Forts.)

Gruppe V

No.	Wellen- länge ÅE	Wellen- zahl cm ⁻¹	cm ⁻¹	Ω', Ω''	v', v''
68	3770,43	26514,7		-1, -2	0,1
69	3769,74	26519,5			
70	3766,40	26543,0		-1, -2	1,2
71	3765,89	26546,6	*	-2, -2	0,1
72	3764,89	26553,7	↑	-2, -2	0,1 i
73	3764,36	26557,4		0, -1	0,1
74	3762,38	26571,4	44,7	-1, -2	2,3
75	3761,86	26575,1	↓	-2, -2	1,2
76	3760,25	26586,4	↓	0, -1	1,2
77	3759,56	26591,3	*	-1, -1	0,1
78	3757,97	26602,5	↑	1, 0	0,1
79	3755,61	26619,3		-1, -1	1,2
80	3755,07	26623,1	44,5	-2, -1	0,1
81	3754,75	26625,4	↓	-2, -1	0,1 i
82	3753,28	26635,8	*	0, 0	0,1
83	3752,82	26639,1	↑		
84	3751,81	26646,3		2, 1	0,1
85	3751,45	26648,9		-2, -1	1,2
86	3751,09	26651,4	45,0	2, 1	0,1 i
87	3749,20	26664,8			
88	3748,55	26669,4	↓	-1, 0	0,1
89	3746,95	26680,8	*	1, 1	0,1
90	3745,77	26689,2	↑	3, 2	0,1
91	3745,10	26694,0		-1, 0	1,2
92	3744,55	26697,9			
93	3744,27	26699,9	45,1		
94	3743,76	26703,5			
95	3742,99	26709,0		1, 1	1,2
96	3742,23	26714,5	↓	0, 1	0,1
97	3740,62	26725,9	*	2, 2	0,1
98	3739,60	26732,8	↑	4, 3	0,1
99	3738,17	26743,5		0, 1	1,2
100	3736,74	26753,7	45,2	2, 2	1,2
101	3735,74	26760,8	↓	1, 2	0,1
102	3734,31	26771,1	*	3, 3	0,1
103	3733,51	26776,9		3, 3	0,1 i
104	3732,65	26783,0			
105	3739,16	26808,0		2, 3	0,1

Kolonne 4 enthält die Abstände zwischen den (0,0)-, resp. (1,0)- oder (0,1)-Banden, für welche $\Delta\Omega = 0$ ist. i = Kanten des isotopen Moleküls MnCl³⁷.

Multipliettanalyse: Die Banden 4, 9, 14, 19, 25, 31 und 34, welche von einheitlichem Aussehen sind, liegen fast gleich weit auseinander (Fig. 3 und Tabelle 2, Kolonne 4). Da, wie in § 1 behandelt, die Multipliett-komponenten von Molekültermen, bei stark an die Kernverbindungsachse gekoppeltem Spin, äquidistant sind, liegt es nahe, diese 7 Banden als zu einem Multipliett gehörig aufzufassen, das aus zwei Septett-Termen mit je in sich äquidistanter Multipliettstruktur, entsteht. Sie bilden die Übergänge $\Delta\Omega = 0$, und ihr Abstand von 45 cm^{-1} stellt die Differenz der Aufspaltungsfaktoren (A) in den beiden Termen dar. Sind beide Septett-Terme wirklich aufgespalten, so erwartet man auf Grund der Auswahlregel⁵⁾ $\Delta\Omega = 0, \pm 1$ noch weitere Banden, nämlich 12, wenn $A' = A''$ oder 11, wenn $A' = A'' \pm 1$ ist. Tatsächlich beobachtet man ausser den bereits erwähnten noch 12 Banden, die in bezug auf die 7 erstgenannten so liegen, dass diese den Übergängen $\Delta\Omega = 0$, jene $\Delta\Omega = \pm 1$ zuzuordnen sind. Deshalb darf behauptet werden, dass $A' = A''$, und zwar, wie in § 9 gezeigt wird, gleich 1 sein muss. Für Septett-Terme ist $S = 3$, somit $\Sigma = 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$. Durch Summation von A und Σ erhält man für Ω^*) die Werte 4, 3, ..., -1, -2.

Bei den Atomen ist die Multipliettaufspaltung fast ausnahmslos im Grundterm am grössten, so auch bei Mangan. Deshalb wird man auch bei MnCl den stärker aufgespaltenen Term als Grundzustand betrachten.

Es ist nun noch zu entscheiden, in welcher Reihenfolge die Ω den einzelnen Multipliett-komponenten zugeordnet werden müssen. Wenn normale Terme vorliegen, so gehört zum tiefsten Niveau der Wert -2 , zum obersten 4; für verkehrte Terme ist es umgekehrt. Die Atomterme von Mangan sind verkehrt. Bei den Termen von MnCl ist mit steigender Energie ein leichtes Abnehmen der Abstände zwischen den Multipliett-komponenten festzustellen (Fig. 3 und Tabelle 3); man wird deshalb auch hier verkehrte Terme annehmen. Somit sind die Multipliett-komponenten in der auf Fig. 3 angegebenen Weise zu bezeichnen, nach welcher mit wachsender Energie die Ω -Werte kleiner werden.

Die Energiestufen im Termschema von Fig. 3 stellen also nicht Kernschwingungsniveaus, sondern Multipliett-komponenten des angeregten und des Grundterms dar. Alle 19 eingezeichneten Übergänge ergeben (0,0)-Banden von 19 verschiedenen Bandensystemen. Sie lassen sich mit grosser Genauigkeit in ein quadratisches Schema

*) Zur Vereinfachung der Schreibweise wird in dieser Arbeit die Summe $A + \Sigma$ mit Ω bezeichnet und nicht wie üblich deren Betrag $|A + \Sigma|$.

(Tabelle 3) einordnen; dort sind auch die Abstände der Multipliett-komponenten angegeben. Sie liegen im Grundzustand zwischen 76 und 83 cm^{-1} , im angeregten Zustand zwischen 30 und 38 cm^{-1} .

Schwingungsanalyse: Die Gruppen III und V (Tabelle 2 und Fig. 4) zeigen dieselbe Struktur wie die oben beschriebene IV. Gruppe, wodurch sich die Schwingungsanalyse leicht in eindeutiger Weise angeben lässt. Darnach fallen in die Gruppe V die (0,1),

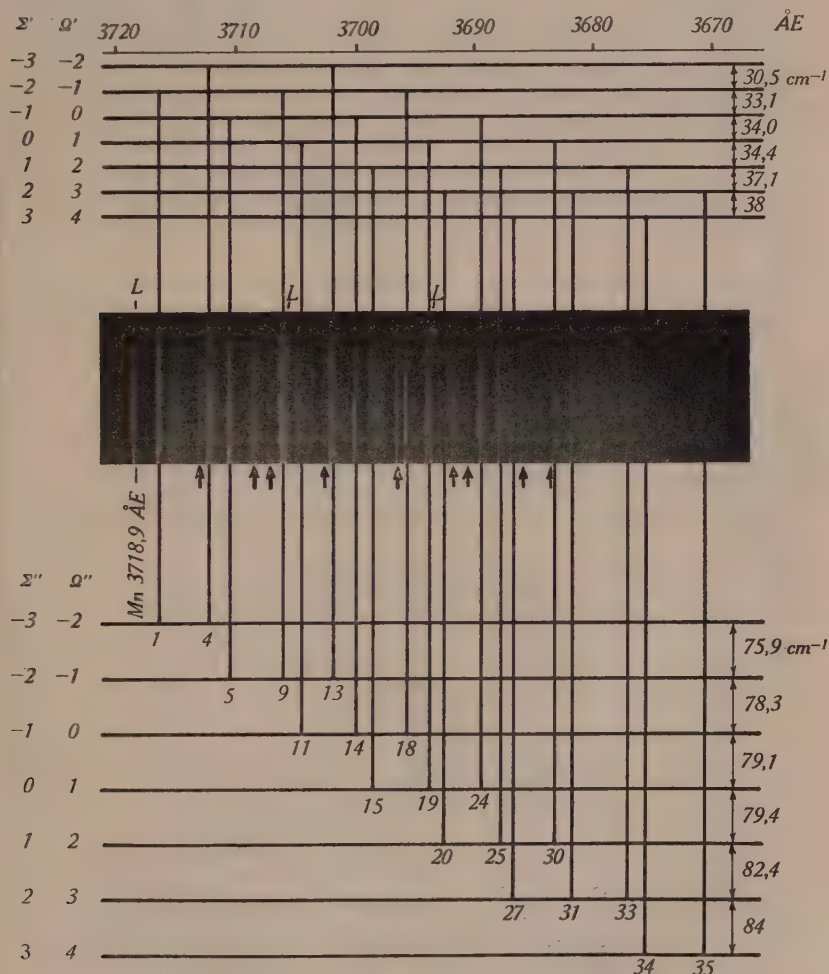


Fig. 3.

IV. Gruppe des Bandensystems von MnCl mit Termschema der (0,0)-Banden.

${}^2\Pi - {}^2\Pi$ -Übergang

$\blacktriangle = (1,1)$ -Banden L = Linien von Mn

Tabelle 3.

MnCl. Quadratisches Schema der (0,0)-Banden.
Molekül-Multiplett (III-III).

Ω' Ω''	4	3	2	1	0	-1	-2
4	27199 38	27237					
	83	83					
3	27115,8 38	27153,8 36	27190				
		82,8	82				
2		27071,0 37,5	27108,5 34,4	27142,9			
			79,5	79,4			
1			27029,0 34,5	27063,5 34,0	27097,5		
				79,2	79,1		
0				26984,3 34,1	27018,4 33,1	27051,5	
					78,3	78,4	
-1					26940,1 33,0	26973,1 30,4	27003,5
						75,9	75,9
-2						26897,1 30,5	26927,6

(1,2), ...-Banden, also die Schwingungssequenzen mit $\Delta v = -1$, in die III. Gruppe die (1,0), (2,1), ...-Banden, für welche $\Delta v = +1$ ist.

Die (1,0)- und (0,1)-Banden können wie die (0,0)-Banden je in ein quadratisches Schema eingeordnet werden. Aus dem Schema der (1,0)-Banden erhält man wieder die Abstände der 7 nullten Schwingungsniveaus des Grundterms, die mit den Werten, welche aus dem Schema der (0,0)-Banden gefunden wurden, übereinstimmen müssen (vgl. Fig. 4). Entsprechendes gilt für die Aufspaltung des nullten Schwingungsniveaus des obern Terms. Diese Energiedifferenzen können sowohl dem Schema der (0,0)-Banden, wie auch demjenigen der (0,1)-Banden entnommen werden. In beiden Fällen findet man gute Übereinstimmung zwischen den aus je zwei verschiedenen Schemas berechneten Aufspaltungen (Tabelle 4), was die Richtigkeit der Analyse bestätigt.

Tabelle 4.

MnCl. Multiplettaufspaltungen des untern und des angeregten Terms.

Ω	unterer Term		angeregter Term	
	aus dem Schema der (0,0)-Banden cm ⁻¹	aus dem Schema der (1,0)-Banden cm ⁻¹	aus dem Schema der (0,0)-Banden cm ⁻¹	aus dem Schema der (0,1)-Banden cm ⁻¹
-2				
-1	75,9	75,2	30,5	31,8
0	78,3	78,4	33,1	33,7
1	79,1	79,1	34,0	33,5
2	79,4	80,4	34,4	34,7
3	82,4	82,4	36,7	36,8
4	83	84,1	38	38,3

Aus den quadratischen Schemas der (1,0)- und (0,1)-Banden, die aus Raumgründen hier nicht angeführt sind, ist auch ersichtlich, dass die Abstände der Multiplettkomponenten in den ersten Schwingungsniveaus, besonders im obern Zustand, durchschnittlich etwas kleiner sind, als die entsprechenden Abstände in den nullten Schwingungsniveaus. Dies äussert sich auch darin, dass die Differenzen $\nu_{1,0} - \nu_{0,0}$, resp. $\nu_{0,0} - \nu_{0,1}$, und damit auch die Kernfre-

quenzen*) der verschiedenen Bandensysteme, mit wachsender Energie abnehmen (Tabelle 5). Will man diesen kleinen, jedoch systematischen Abweichungen einen Wert beimessen, so würde das bedeuten, dass die Spineinstellung die Kernschwingung beeinflusst, und zwar derart, dass bei höherer Energie des Elektronenterms

Tabelle 5.
MnCl. Kernfrequenzen.

Ω'	Ω', Ω''	$\omega' *$	Ω''	Ω', Ω''	$\omega'' *$
-2	-2, -1	405,4	-2	-2, -2	381,0
	-2, -2	406,3		-1, -2	382,4
-1	-1, 0	407,0	-1	-2, -1	380,4
	-1, -1	406,8		-1, -1	381,8
	-1, -2	407,6		0, -1	382,7
0	0, 1	408,0	0	-1, 0	382,1
	0, 0	407,9		0, 0	382,6
	0, -1	407,9		1, 0	381,8
1	1, 2	409,2	1	0, 1	383,0
	1, 1	408,0		1, 1	382,7
	1, 0	407,9		2, 1	382,7
2	2, 3	—	2	1, 2	382,1
	2, 2	408,1		2, 2	382,4
	2, 1	407,3		3, 2	381,8
3	3, 4	—	3	2, 3	382,5
	3, 3	408,5		3, 3	382,7
	3, 2	408,9		4, 3	382
4	4, 4	409	4	3, 4	—
	4, 3	409		4, 4	—

Da von jeder Multiplettkomponente 3 (von der untersten und obersten 2) Übergänge ausgehen, können diese Frequenzen 3 resp. 2 verschiedenen Kantschemas entnommen werden.

die Kernfrequenz kleiner ist. In zweiter Linie könnte man annehmen, dass im schwingenden Zustand die Einstellungsenergie des Spins etwas verändert wird.

*) In dieser Arbeit haben ω' und ω'' folgende Bedeutung:

$$\omega' = \nu_{1,0} - \nu_{0,0} = \omega_0' - \omega_0' x_0'$$

$$\omega'' = \nu_{0,0} - \nu_{0,1} = \omega_0'' - \omega_0'' x_0''$$

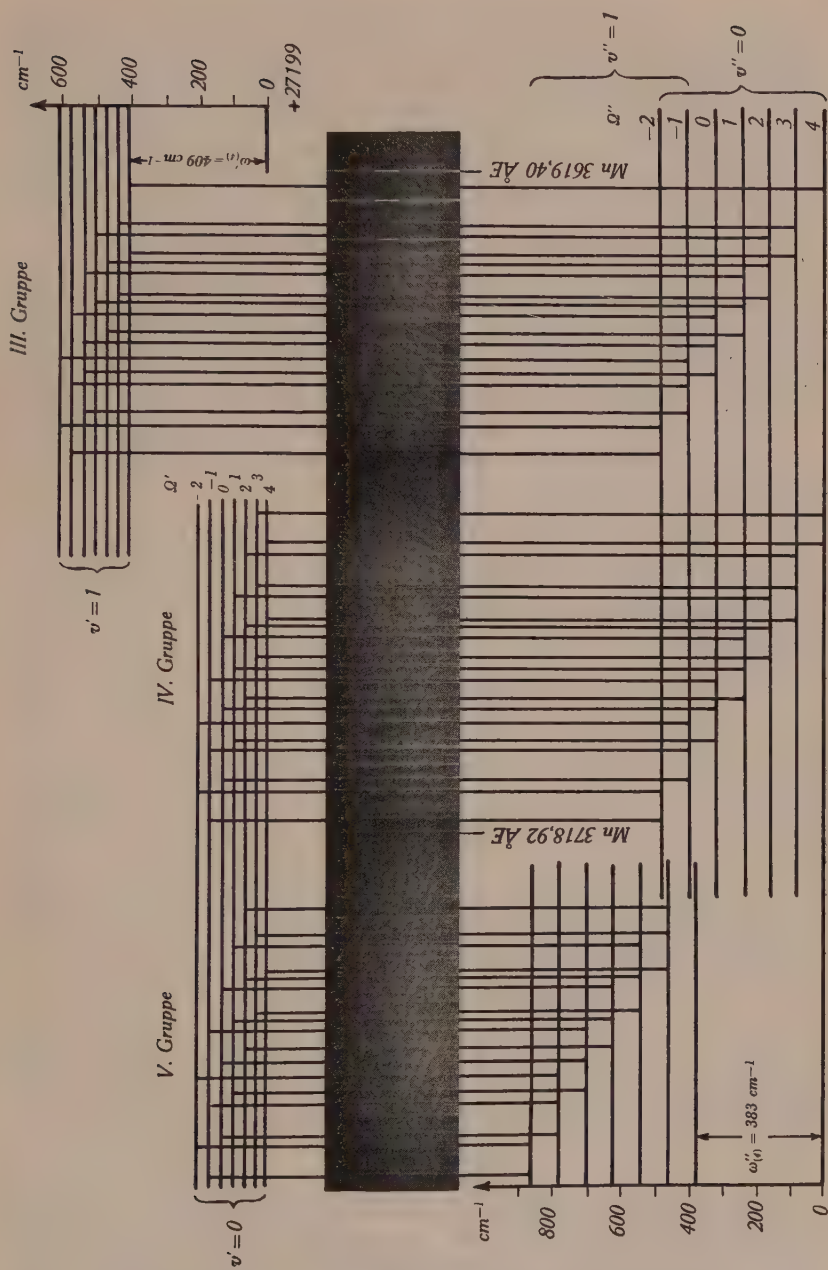


Fig. 4.

MnCl. Termschema der (0,1)-, (0,0)- und (1,0)-Banden.

Im Termschema von Fig. 4 sind die Übergänge, die zu den (0,1)-, (0,0)- und (1,0)-Banden gehören, eingezeichnet. Die Energiestufen bedeuten auch hier Multiplettkomponenten der nullten und ersten Schwingungsniveaus. Ferner sind in Fig. 3 die (1,1)-Banden mit einem Pfeil (\uparrow) bezeichnet. Fast bei allen 19 Bandensystemen beobachtet man ausser den (0,0)-, (0,1)- und (1,0)-Banden auch die (1,1)-, (1,2)- und (2,1)-Banden (Tabelle 2). Die übrigen Gruppen I, II, VI—VIII enthalten die Schwingungssequenzen, für welche $\Delta v = \pm 2, \pm 3, -4$ ist.

Auf die Wiedergabe der Kantenschemas von sämtlichen 19 Bandensystemen muss hier verzichtet werden. Als Beispiel ist in Tabelle 6 das Kantenschema zum Multiplettübergang $(-1, -2)$ und anschliessend die dazugehörige Kantenformel angegeben.

Die Kernfrequenzen und Anharmonizitäten der andern Systeme weichen nur um geringe Beträge von den für dieses Beispiel berechneten Werten ab (vgl. Tabelle 5).

Tabelle 6.

MnCl. Kantenschema des zum Multiplettübergang $(-1, -2)$ gehörenden Bandensystems.

$\begin{array}{c} v'' \\ \backslash \\ v' \end{array}$	0	1	2	3
0	26897,1 407,6	382,4 408,2	26514,7 404,6	
1	27304,7	381,8	26922,9 404,6	379,9 26543,0 404,6
2		27327,5	379,9	— 402,3 376,2 26571,4
3			27349,9	

Dieses Kantenschema liefert folgende Formel:

$$\begin{aligned} \nu = & 26884,0 + 410,9 \cdot (v' + \tfrac{1}{2}) - 1,5 \cdot (v' + \tfrac{1}{2})^2 \\ & - 384,9 \cdot (v'' + \tfrac{1}{2}) + 1,4 \cdot (v'' + \tfrac{1}{2})^2 \end{aligned}$$

durch welche die beobachteten Kanten bis auf Bruchteile eines cm^{-1} genau wiedergegeben werden.

Isotopeneffekt.

Die Kanten des isotopen Moleküls MnCl^{37} sind durch andere Banden vielfach verdeckt; sie können aber, trotz ihrer geringen Intensität, in mehreren Fällen festgestellt werden (in Tabelle 2 mit „i“ bezeichnet). Da die Abstände der (1,0)-Banden von den zugehörigen (0,0)-Banden praktisch alle gleich gross sind, so ändert sich

die Grösse der Isotopenaufspaltung innerhalb der Gruppe der (1,0)-Banden ($7,2 \text{ cm}^{-1}$) nicht merklich. Das gleiche gilt auch für die andern Gruppen. Nach der Formel $\Delta \nu^i = (\varrho - 1) \cdot \nu$ ($\varrho = 0,9833$, ν = Abstand von der (0,0)-Bande) berechnet man für die (1,0)-Banden eine Isotopentrennung von $\Delta \nu^i = 6,9 \text{ cm}^{-1}$, für die (0,1)-Banden $\Delta \nu^i = 6,5 \text{ cm}^{-1}$.

MnBr.

§ 6. Ein völlig analoges Spektrum besitzt, wie aus Fig. 2 ersichtlich, MnBr zwischen 3650 und 4050 Å^2), das ebenfalls aus 8 Gruppen besteht. Daneben liegen zwischen 4900 und 5100 Å noch drei weitere Bandengruppen. Die Banden des erstgenannten Systems sind nach der kurzwelligen Seite, in der I. und VIII. Gruppe jedoch nach Rot abschattiert.

Die Analyse verläuft wie bei MnCl; sie ist jedoch etwas erschwert, da die Gruppen sich teilweise überdecken. Die Differenz der Aufspaltungen in den beiden Zuständen ist grösser als bei MnCl, was eine Verbreiterung der Gruppen zur Folge hat, und vor allem sind die Kernfrequenzen bei MnBr viel kleiner, wodurch die Gruppen näher zusammenrücken. Andererseits ermöglicht der Isotopeneffekt des Broms eine eindeutige Zuordnung der Banden zu den einzelnen Schwingungsgruppen, insbesondere dort, wo sich die Gruppen überlappen.

Die Multiplettaufspaltung ist, wie man es in Analogie zu den Atomen erwartet, beim schwereren Molekül, also bei MnBr, grösser als bei MnCl. Im Grundzustand weisen die einzelnen Komponenten Abstände von 123 bis 135 cm^{-1} auf, im angeregten Term 69 bis 71 cm^{-1} (Tabelle 7). Die Banden, für welche $\Delta \Omega = 0$ ist, liegen hier durchschnittlich 59 cm^{-1} auseinander, bei MnCl 45 cm^{-1} .

Die leichte Abnahme der Abstände zwischen den Multiplett-komponenten mit steigender Energie spricht wieder für verkehrte Terme; doch ist auch hier die Aufspaltung noch sehr angenähert äquidistant. Die (0,0)-Banden der 19 Bandensysteme sind in Tabelle 7 in ein quadratisches Schema eingeordnet, woraus man die Wellenzahlen und Wellenlängen entnehmen kann. Von der Wiedergabe sämtlicher gemessener Banden muss aus Raumgründen abgesehen werden.

Unmittelbar neben einigen (0,0)-Banden beobachtet man noch eine nicht eingeordnete Kante, die als weiterer Zweig der benachbarten (0,0)-Bande anzusehen ist.

Die Kanten sind in den Gruppen I bis III und V bis VIII infolge des Isotopieeffekts des Broms (Br^{79} , Br^{81}) doppelt. Auch hier findet man gute Übereinstimmung zwischen den gemessenen und

Tabelle 7.
MnBr. Quadratisches Schema der (0,0)-Banden.
Molekül-Multiplett (*III-III*).

$\Omega' \backslash \Omega''$	4	3	2	1	0	-1	-2
4	26499,1 (3772,6) 135,6	—					
3	26363,5 (3792,0)	71,2 26434,7 (3781,8) 132,5	71,3 26506,0 (3771,7) 132,9				
2		26302,2 (3800,9)	70,9 26373,1 (3790,7) 130,8	69,0 26442,1 (3780,7) 129,7			
1			26242,3 (3809,6)	70,1 26312,4 (3799,4) 128,1	68,0 26380,4 (3789,6) 127,7		
0				26184,3 (3818,0)	68,4 26252,7 (3808,1) 124,4	66,6 26319,3 (3798,4) 124,1	
-1					26128,3 (3826,2)	66,9 26195,2 (3816,4) 124,2	68,3 26263,5 (3806,5) 122,9
-2						26071,0 (3834,6)	69,6 26140,6 (3824,4)

berechneten Werten der Isotopenaufspaltung. Nach Berechnung mit der in § 5 genannten Formel liegen die Isotopendublette der (1,0)-Banden $2,0 \text{ cm}^{-1}$, diejenigen der (0,1)-Banden $1,9 \text{ cm}^{-1}$ auseinander.

Für die Kernfrequenzen*) ergeben sich folgende Mittelwerte: $\omega'' = 285 \text{ cm}^{-1}$, $\omega' = 320 \text{ cm}^{-1}$.

FeCl.

§ 7. Das ultraviolette Bandensystem von FeCl zwischen 3300 und 3700 ÅE ist schon von MIESCHER¹⁾ und MESNAGE²⁾ teilweise analysiert worden; doch gehören die intensiven und scharfkantigen Banden in der VI. Gruppe (Fig. 2), wie MIESCHER schon vermutet hat, offenbar nicht dem von diesen Autoren angegebenen Sextett (im Folgenden als System I bezeichnet) an. Die Emissionsaufnahmen der VI. und der benachbarten Gruppen sind jedoch so kompliziert, dass sie zu keiner Analyse führen konnten. Eine weitere Erschwerung bilden die vielen Emissionslinien des Eisenatoms. In der Absicht, die störenden Linien nach Möglichkeit zu eliminieren, wurde deshalb das Spektrum am 3 m-Gitter (2. Ordnung) in Absorption aufgenommen. Auch auf den Absorptionsaufnahmen ist die VI. Gruppe im Vergleich zu den Nachbargruppen sehr intensiv, weshalb man schon aus diesem Grunde annehmen wird, dass es sich um (0,0)-Banden eines neuen Systems (System II) handelt. Das Aussehen dieser Gruppe ist in Absorption etwas einfacher, jedoch immer noch ziemlich komplex, vor allem deshalb, weil die höheren Schwingungssequenzen des kurzwelligen Systems I mit dieser Gruppe teilweise zusammenfallen. Auch ist die Zahl der Atomlinien immer noch beträchtlich; denn bei diesen hohen Temperaturen (bis 1700°C) erscheinen neben den Absorptionslinien des Eisenatoms die vom Grundzustand ausgehen, auch diejenigen vom ersten angeregten Term (5F , 8000 cm^{-1} über dem Grundzustand). Dadurch werden mehrere Kanten verdeckt.

Die nächstehende Analyse kann deshalb nicht als eindeutig bezeichnet werden, obschon sich die gemessenen Banden gut in die Kantenschemas der Tabelle 8 einordnen lassen. Die 4 Banden mit den Wellenlängen 3582,79 ÅE, 3579,22 ÅE, 3574,60 ÅE und 3567,28 ÅE werden als (0,0)-Banden von 4 verschiedenen Bandensystemen betrachtet. Ihre Abstände ($27,8$; $36,1$; $57,4 \text{ cm}^{-1}$) nehmen im gleichen Sinn wie bei System I nach der kurzwelligen Seite hin zu, woraus geschlossen werden kann, dass einer der beiden Terme atomartig aufgespalten ist. Der andere muss ein einfacher Σ -Term

*) Vgl. Anmerkung zu Tabelle 5.

sein, weil man andernfalls, entsprechend der Auswahlregel $\Delta\Omega = 0, \pm 1$, noch weitere Bandensysteme erwarten würde. Welcher der beiden Zustände aufgespalten ist, kann erst nach den Überlegungen von § 13 gesagt werden. Dort gelangt man zum Schluss, dass bei System I und II die unteren Zustände Σ -Terme sind. Bei einem Vergleich der Emissions- und Absorptionsspektren stellt man keine merklichen Unterschiede in der Intensitätsverteilung fest; deshalb ist anzunehmen, dass die beiden untern Terme nahe beieinander liegen. Auch die Kernfrequenzen sind nur wenig verschieden:

System I	System II
$\omega'' = 405 \text{ cm}^{-1}$	$\omega'' = 394 \text{ cm}^{-1}$
$\omega' = 430 \text{ cm}^{-1}$	$\omega' = 425 \text{ cm}^{-1}$

Tabelle 8.

FeCl. System II (Quartettssystem), Kantenschemas.

A

$\begin{smallmatrix} v'' \\ v' \end{smallmatrix}$	0	1	2	3
0	27903,3 (3582,79) 425,4	394,3 425,4	27509,0 (3634,14)	
1	28328,7 (3528,98)	394,3 —		
2		417,7 28352,1 (3526,07)	392,2 27959,9 (3575,54)	
3			417,1 28377,0 (3522,98)	390,1 27986,9 (3572,08)

B

$\begin{smallmatrix} v'' \\ v' \end{smallmatrix}$	0	1	2
0	27931,1 (3579,22) 425,8	393,1 425,8	27538,0 (3630,32)
1	28356,9 (3525,48)	393,1 —	
2		423,6 28378,4 (3521,68)	387,3 28000,1 (3570,39)

C

$v' \backslash v''$	0	1	2
0	27967,2 393,2 (3574,60) 424,3	27574,0 (3625,56) 424,3	
1	28391,5 393,2 (3521,30)	—	
2		418,0 28416,3 392,7 (3518,10)	28024,6 (3567,28) 411,5
3			28436,1 (3515,65)

D

$v' \backslash v''$	0	1	2
0	28024,6 394,1 (3567,28) 425,1	27630,5 (3618,16) 425,1	
1	28449,7 394,1 (3513,97)	— 389,4	27666,2 (3613,49)
2		418,4 28474,0 389,4 (3510,97)	418,4 —
3			412,3 28496,9 (3508,15)

Es sei noch erwähnt, dass die Banden bei 3200 ÅE, die von MIESCHER¹⁾ und MESNAGE¹¹⁾ in Emission beobachtet worden sind, in Absorption ebenfalls erscheinen, die im Sichtbaren liegenden Banden hingegen nicht.

IV. Molekülterme und Elektronenkonfiguration.

An Hand der vorliegenden experimentellen Ergebnisse ist eine Bestimmung der Molekülterme und der Elektronenkonfiguration von MnCl (MnBr) und FeCl versucht worden. Es kann sich dabei, wie immer bei Molekülen mit mehreren Elektronen, nur um grobe Näherungen handeln, doch stimmen die hier angestellten Überlegungen mit den experimentellen Tatsachen vollkommen überein.

Zudem lassen sich auch Unterschiede, wie sie z. B. in der Aufspaltung der Terme von MnCl und FeCl beobachtet werden, leicht deuten. Die Molekülterme werden auf zwei verschiedene Arten bestimmt, zuerst aus den Termen der beiden getrennten Atome und anschliessend nach der Methode der „molecular orbitals“, die von MULLIKEN, HUND und HERZBERG ausgearbeitet worden ist.

Bestimmung der Molekülterme aus den Termen der getrennten Atome¹²⁾.

§ 8. Sind L_1 und L_2 die Quantenzahlen des Bahnimpulses der beiden Atome, M_{L_1} resp. M_{L_2} ihre Komponenten in Richtung der Kernverbindungsachse, so ist die Quantenzahl des um die Molekülachse resultierenden Bahnimpulses

$$A = |M_{L_1} + M_{L_2}|$$

Für die Spinquantenzahl des Moleküls gilt die Formel

$$S = (S_1 + S_2), (S_1 + S_2 - 1), \dots, |S_1 - S_2|$$

wobei S_1 und S_2 die Spinquantenzahlen der getrennten Atome sind. Dann ist die Multiplizität des Molekülterms $2S + 1$.

MnCl.

§ 9. Der Grundzustand von Mn ist ein 6S -, derjenige von Cl ein 2P -Term. Es ist also $L_{\text{Mn}} = 0$ ($M_{\text{Mn}} = 0$) und $L_{\text{Cl}} = 1$ ($M_{\text{Cl}} = 0$ oder 1); ferner ist $S_{\text{Mn}} = \frac{5}{2}$ und $S_{\text{Cl}} = \frac{1}{2}$. Somit ist $A = 0$ oder 1 , $S = 3$ oder 2 , folglich die Multiplizität 7 oder 5 .

Nach § 5 sind bei MnCl beide Terme 7-fach aufgespalten und ist $A' = A''$. Deshalb muss es sich beim untern und obern Zustand um einen 7II -Term handeln, da Σ -Terme nur einfach sind. Das beobachtete Bandensystem würde demnach zu einem $^7II - ^7II$ -Übergang gehören.

Zum gleichen Ergebnis kommt man bei MnBr .

FeCl.

§ 10. Eisen hat einen 5D -Term als Grundzustand ($L = 2$, $M = 0, 1, 2$; $S = 2$). Zusammen mit dem 2P -Term des Chlors ergeben sich daraus Σ -, II - und Δ -Terme mit den Multiplizitäten 6 oder 4 . In beiden Systemen von FeCl ist einer der Terme einfach, und zwar, wie in § 13 gezeigt wird, in beiden Fällen der untere Zustand. Entsprechend der Aufspaltung des obern Zustandes liegt also ein $^6\Sigma$ -, resp. ein $^4\Sigma$ -Term vor. Im angeregten Zustand kommen II - und Δ -Terme in Frage.

Methode der „molecular orbitals“^{(13) (14)}.

§ 11. Nach der Theorie der „molecular orbitals“ kann man die Eigenfunktion eines Molekülelektrons näherungsweise durch eine Linearkombination der Eigenfunktionen der getrennten Atome darstellen.

Ψ_{AB} sei die Eigenfunktion des Elektrons im Molekül, welches aus den Atomen A und B gebildet ist. Ψ_A, Ψ_B seien die Eigenfunktionen des Elektrons in den Atomen A , resp. B ; dann ist

$$\begin{aligned}\Psi'_{AB} &= a \cdot \Psi_A + b \cdot \Psi_B \\ \Psi''_{AB} &= c \cdot \Psi_A - d \cdot \Psi_B\end{aligned}$$

Für fast gleiche Kernladungen sind die Koeffizienten a, b, c und d nahezu gleich 1. Diejenigen Zustände, bei welchen sich die Eigenfunktionen im Zwischengebiet der Kerne addieren, sind bindend; diejenigen, bei denen sich die Eigenfunktionen subtrahieren, lockernd. Ein Zustand ist stabil, wenn das Molekül mehr bindende als lockernde Elektronen enthält.

MnCl.

§ 12. Die innern, abgeschlossenen Atomschalen von Mangan und Chlor werden bei der Molekülbildung wohl wenig gestört, weshalb sie ausser Betracht gelassen werden können. Somit sind vom Mangan noch die $3d^5$ - und die $4s^2$ -Elektronen und von Chlor die $3p^5$ -Elektronen in die Molekülschalen einzuordnen. Diese 12 Elektronen führen zu folgenden Molekülzuständen:

$$\begin{array}{lcl}\text{Mangan} & \left\{ \begin{array}{l} 3 d\text{-Elektronen} \rightarrow 3 d\sigma, 3 d\pi, 3 d\delta \\ 4 s\text{-Elektronen} \rightarrow 4 s\sigma \end{array} \right. \\ \text{Chlor} & 3 p\text{-Elektronen} \rightarrow 3 p\sigma, 3 p\pi\end{array}$$

Damit können nachstehende Linearkombinationen gebildet werden:

$$\left. \begin{array}{l} (4 s\sigma + 3 p\sigma) \text{ bindend} \\ (4 s\sigma - 3 p\sigma) \text{ lockernd} \\ (3 d\pi + 3 p\pi) \text{ bindend} \\ (3 d\pi - 3 p\pi) \text{ lockernd} \end{array} \right\} \text{„Molekülelektronen“}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 d\sigma \\ 3 d\delta \end{array} \right\} \text{„Atomelektronen“}$$

Mit den $3d\delta$ -Elektronen lassen sich keine Linearkombinationen bilden, da Chlor keine d -Elektronen besitzt; bei den $3d\sigma$ -Elektronen wurde dies absichtlich unterlassen, aus Gründen, die in § 14 angegeben sind. In der Linearkombination wird der bindende

Zustand durch das positive, der lockernde durch das negative Vorzeichen gekennzeichnet.

Nun sind die 12 Elektronen in die sechs Molekülschalen zu verteilen. Dabei werden folgende Bedingungen vorausgesetzt:

1. Die Multiplizität des resultierenden Terms soll 7, die Spinsumme also $\frac{6}{2}$ sein.

2. Da es sich um einen stabilen Zustand handelt, muss die Zahl der bindenden Elektronen grösser sein als die Zahl der lockernden Elektronen.

3. Zuerst sind die energetisch am tiefsten liegenden Schalen aufzufüllen.

Aus diesen Annahmen ergibt sich eindeutig folgende Elektronenkonfiguration:

$$(4s\sigma + 3p\sigma)^2(4s\sigma - 3p\sigma)^2(3d\pi + 3p\pi)^3(3d\pi - 3p\pi)^23d\sigma \\ 3d\delta^2{}^7\Pi$$

Jede andere Verteilung würde einer der drei Voraussetzungen widersprechen. Demnach besitzt MnCl im Grundzustand 5 bindende und 4 lockernde Elektronen, während die $3d\sigma$ - und $3d\delta$ -Elektronen an der Bindung nicht beteiligt sind.

Bei MnBr kommen nur abgeschlossene Atomschalen des Broms neu hinzu, weshalb man zum gleichen Resultat gelangt wie bei MnCl. In Übereinstimmung mit § 9 führt auch diese Methode zum Ergebnis, dass der Grundzustand der beiden Verbindungen ein ${}^7\Pi$ -Term ist.

FeCl.

§ 13. Eisen hat ein $3d$ -Elektron mehr als Mangan, doch treten deshalb keine weiteren Molekülzustände auf, als bei MnCl angegeben sind. Werden die ersten 12 Elektronen wie bei MnCl verteilt, so spielt es für die Multiplizität keine Rolle, in welche Schale das 13. Elektron gebracht wird; denn in jedem Fall wird sie um 1 auf 6 erniedrigt. Man berücksichtigt aber die $(3d\pi + 3p\pi)$ -Schale, weil man von ihr annehmen kann, dass sie neben den bereits aufgefüllten am tiefsten liegt. Es resultiert daraus ein ${}^6\Sigma$ -Term mit nachstehender Elektronenkonfiguration (abgekürzte Schreibweise):

$$(\sigma + \sigma)^2(\sigma - \sigma)^2(\pi + \pi)^4(\pi - \pi)^23d\sigma 3d\delta^2{}^6\Sigma$$

Stellt sich der Spin des $3d\sigma$ -Elektrons entgegengesetzt ein, so entsteht ein ${}^4\Sigma$ -Term (System II). Sextett- und Quartettssystem haben also im Grundzustand dieselbe Elektronenkonfiguration. Damit

wäre auch entschieden, dass der untere Zustand von FeCl in beiden Fällen nicht aufgespalten ist, folglich im angeregten Term $A > 0$ sein muss.

Vergleich von FeCl und MnCl.

§ 14. Es wurde schon darauf hingewiesen, dass in der Term-aufspaltung von MnCl und FeCl ein auffallender Unterschied besteht, indem die Terme des MnCl nahezu äquidistant, diejenigen von FeCl atomartig aufgespalten sind*). Die vorstehenden Elektronenkonfigurationen gestatten nun eine Deutung dieser und anderer Unterschiede, die sich in den Spektren der beiden Verbindungen zeigen.

Man geht dabei von der Vorstellung aus, dass der Spin der Elektronen, die zur Bindung des Moleküls beitragen, stark an die Kernverbindungsachse gekoppelt ist, wodurch eine äquidistante Multiplettaufspaltung zustande kommt. Die Kopplung der lockernen Elektronen an die Molekülachse dürfte geringer sein. Vor allem aber haben die 3 $d\delta$ -Elektronen, für welche keine Linearkombinationen gebildet werden können, und die 3 $d\sigma$ -Elektronen, bei denen dies im Hinblick auf diese Deutung unterlassen wurde, atomartigen Charakter („Atomelektronen“) und dementsprechend eine der Landé'schen Intervallregel¹⁵⁾ gehorchende Aufspaltung.

Untersucht man nun an Hand der Elektronenkonfigurationen, welcher Art die Elektronen sind, die in den beiden Verbindungen zum Gesamtspin einen Beitrag liefern, so ergibt sich folgendes:

	MnCl	FeCl
bindende Elektronen . . .	1	0
lockernde Elektronen . . .	2	2
„Atomelektronen“	3	3

Der Unterschied besteht also darin, dass bei MnCl der Spin eines Elektrons stark an die Kernverbindungsachse gekoppelt ist, bei FeCl hingegen nicht; hier sind die „Atomelektronen“ in der Mehrzahl. Auf Grund dieser Ergebnisse kann man die Verschiedenheit der Term-aufspaltung verstehen.

Ferner ersieht man aus der Elektronenkonfiguration, dass FeCl ein bindendes Elektron mehr besitzt als MnCl. Das hat eine stär-

*) Der kleine Unterschied der Kernfrequenzen im untern und obern Zustand zeigt, dass sich die Bindung beim Elektronensprung nicht stark ändert. Man kann daraus schliessen, dass ein an der Bindung nicht beteiligtes Elektron („Atomelektron“) springt. Somit weist der aufgespaltene obere Term, auf den es hier ja ankommt, denselben Charakter auf wie der Grundterm.

Tabelle 9.
Spektren von Halogeniden der Eisengruppe, Mn und Cr.

Molekül	Elektronenkonfiguration	Term	Kern-*) frequenz cm ⁻¹	Multipllett- trennung cm ⁻¹	Charakter der Aufspaltung	Spektral- bereich ÅE
MnCl	$(\sigma + \sigma)^2 (\sigma - \sigma)^2 (\pi + \pi)^3 (\pi - \pi)^2 3d\sigma^1 3d\delta^2$	$O \quad {}^7II$ $X \quad {}^7II$	407 382	35—38 78—83	äquidistant äquidistant	3500—4000
	$(\sigma + \sigma)^2 (\sigma - \sigma)^2 (\pi + \pi)^3 (\pi - \pi)^2 3d\sigma^1 3d\delta^2$	$O \quad {}^7II$ $X \quad {}^7II$	320 285	67—71 123—135	äquidistant äquidistant	3650—4050
MnBr I FeCl II FeCl	$(\sigma + \sigma)^2 (\sigma - \sigma)^2 (\pi + \pi)^3 (\pi - \pi)^2 3d\sigma^1 3d\delta^2$	$O \quad {}^6II$ $(X) \quad {}^6\Sigma$ $O \quad {}^4II$ $(X) \quad {}^4\Sigma$	430 405 425 395	35—72 — 28—58 —	atomartig — atomartig —	3300—3700
	$(\sigma + \sigma)^2 (\sigma - \sigma)^2 (\pi + \pi)^4 (\pi - \pi)^2 3d\sigma^1 3d\delta^2$	$O \quad ?$ $U \quad {}^3\Phi$	420 416	390 u. 563	atomartig	3800—5700
	$(\sigma + \sigma)^2 (\sigma - \sigma)^2 (\pi + \pi)^3 (\pi - \pi)^2 3d\sigma^1 3d\delta^2$	$O \quad ?$ $U \quad {}^2II$	420 418	484		3900—4800
	$(\sigma + \sigma)^2 (\sigma - \sigma)^2 (\pi + \pi)^3 (\pi - \pi)^2 3d\sigma^1 3d\delta^1$	$X \quad {}^6II ?$?	?	äquidistant ?	4000—4500 ?
MnF	$(\sigma + \sigma)^2 (\sigma - \sigma)^2 (\pi + \pi)^3 (\pi - \pi)^2 3d\sigma^1 3d\delta^2$	$X \quad {}^7II$?	?	äquidistant	3300—3650

O = oberer Zustand U = unterer Zustand evtl. Grundzustand X = Grundzustand (X) = da beide Systeme in Absorption erscheinen, kann nicht unterschieden werden, welcher Term zum Grundzustand gehört.

*) ω' , resp. ω'' .

kere Bindung zur Folge und stimmt mit der Tatsache überein, dass man bei FeCl eine grössere Kraftkonstante k_e findet als bei MnCl. Nach der Formel $k_e = 4\pi^2 c^2 \omega_e^2 \mu$ berechnet man für den Grundzustand der beiden Verbindungen folgende Werte:

$$\text{MnCl: } k_e = 1,866 \cdot 10^5 \text{ dyn/cm}$$

$$\text{FeCl: } k_e = 2,097 \cdot 10^5 \text{ dyn/cm}^*)$$

V. Zusammenfassung und Diskussion anderer Spektren.

§ 15. In Tabelle 9 sind die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit zusammengestellt. Daneben finden sich noch entsprechende Angaben über Spektren von andern Halogeniden der Eisengruppe, deren Elektronenkonfiguration unter den gleichen Gesichtspunkten wie bei MnCl und FeCl bestimmt worden ist.

NiCl, CoCl, CrCl. Die Spektren von NiCl und CoCl sind von MORE⁹⁾ teilweise analysiert worden, während ein Spektrum von CrCl noch nicht bekannt ist**). Nach den hier angestellten Überlegungen müsste dieses ähnlich aussehen wie das Spektrum von MnCl mit äquidistanter Multiplettaufspaltung; denn zum Spin tragen 3 an die Molekülachse gekoppelte und 2 „Atomelektronen“ bei. Andererseits ist die von MORE angegebene Tripletaufspaltung von CoCl atomartig, was durchaus verständlich ist, da der Spin der bindenden Elektronen wie bei FeCl abgesättigt ist.

Auffallend sind die Grössenunterschiede in der Aufspaltung der Terme bei MnCl und FeCl einerseits, CoCl und NiCl andererseits. Vergleicht man sie aber mit der Multiplettrennung in den Atomen, so zeigen sich dort dieselben Unterschiede. So liegen die maximalen Aufspaltungen von Mangan um 250 cm^{-1} , von Eisen um 500 cm^{-1} ; hingegen bei Kobalt und Nickel um 1000 cm^{-1} , resp. 1300 cm^{-1} . Bei CrCl sind noch kleinere Aufspaltungen zu erwarten als bei MnCl, denn beim Chrom liegen sie um 100 bis 200 cm^{-1} .

MnF. Das Spektrum von MnF ist von ROCHESTER und OLSO¹⁶⁾ in Absorption untersucht worden. Von den beiden beobachteten Systemen haben sie nur das kurzwelligere im Gebiet von 2350 bis 2500 ÅE analysiert. Die Banden zwischen 3300 und 3650 ÅE schreiben sie der verwickelten Struktur wegen dem dreiatomigen

*) Dieser Betrag gilt für das System I. $\omega_e = 406,6 \text{ cm}^{-1}$ wurde der Arbeit von MIESCHER¹⁾ entnommen.

) Auf versuchsweise aufgenommenen Spektren können zwischen 4000 und 4500 ÅE sehr schwache Bandengruppen festgestellt werden; doch ist deren Zuordnung zu CrCl noch nicht sicher, da ein Ausmessen der Banden infolge der geringen Intensität der Aufnahme nicht möglich ist. Von MESNAGE²⁾ werden Banden zwischen 5500 und 7000 ÅE erwähnt. (Vgl. hierzu A. G. GAYDON und R. W. B. PEARSE. Nature **141, 370, 1938.)

Molekül MnF_2 zu. Doch ist dies schon deshalb ganz unwahrscheinlich, weil diese Banden in Absorption erst bei Temperaturen um 1400°C erscheinen, während der Dampfdruck von MnF_2 sicher schon unter 1000°C genügend gross wäre, um ausreichend stark zu absorbieren. Die hohe Temperatur ist eben zur Anreicherung von zweiatomigen Radikalen MnF notwendig. Lage und Aussehen lassen keinen Zweifel offen, dass dieses Spektrum dem ${}^7\Pi - {}^7\Pi$ -System von MnCl und MnBr entspricht. Auch ROCHESTER und OLSSON weisen auf die Analogie dieser Spektren hin.

Die vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Basel auf Anregung und unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. E. MIESCHER ausgeführt, dem ich für seine dauernde Unterstützung durch wertvolle Ratschläge meinen herzlichsten Dank ausspreche. Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr. M. WEHRLI für sein Interesse an dieser Arbeit und viele nützliche Hinweise und besonders Herrn P. D. Dr. M. FIERZ für seine Anregungen und seine Mithilfe bei der Behandlung der theoretischen Fragen.

Basel, Physikalische Anstalt der Universität.

Literatur.

- ¹⁾ E. MIESCHER, *Helv. Phys. Acta* **11**, 463, 1938.
 - ²⁾ P. MESNAGE, *Ann. d. physique* **12**, 5, 1939.
 - ³⁾ T. E. NEVIN, *Nature* **140**, 1101, 1937.
 - ⁴⁾ R. W. B. PEARSE und A. G. GAYDON, *Proc. Phys. Soc. (London)* **50**, 201, 1938.
 - ⁵⁾ R. S. MULLIKEN, *Rev. of Mod. Phys.* **2**, 60, 1930.
 - ⁶⁾ G. HERZBERG, *Molekülspektren* 1939, S. 163 ff.
 - ⁷⁾ A. CHRISTY, *Phys. Rev.* **33**, 701, 1929.
 - ⁸⁾ F. LOWATER, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **234**, A, 355, 1935.
 - ⁹⁾ K. R. MORE, *Phys. Rev.* **54**, 122, 1938.
 - ¹⁰⁾ E. MIESCHER, *Helv. Phys. Acta* **8**, 279, 1935.
 - ¹¹⁾ P. MESNAGE, *C. R. Acad. Sci. Paris* **201**, 389, 1935.
 - ¹²⁾ G. HERZBERG, *l. c.* S. 229.
 - ¹³⁾ R. S. MULLIKEN, *Phys. Rev.* **46**, 549, 1934.
 - ¹⁴⁾ G. HERZBERG, *l. c.* S. 242.
 - ¹⁵⁾ A. LANDÉ, *ZS. f. Phys.* **15**, 189, 1923.
 - ¹⁶⁾ G. D. ROCHESTER und E. OLSSON, *ZS. f. Phys.* **114**, 495, 1939.
-

Der Kernphotoeffekt mit der Lithium-Gammastrahlung:

I. Die leichten Elemente bis zum Calcium

von O. Huber, O. Lienhard, P. Scherrer und H. Wäffler.

(7. I. 1943.)

I. Einleitung.

Die Umwandlung eines Atomkerns durch γ -Strahlen ist nur dann energetisch möglich, wenn die zur Verfügung stehende Quantenenergie grösser ist als die Bindungsenergie des am lockersten gebundenen Teilchens des betreffenden Kernes.

Abgesehen vom Deuteron, dessen Bindungsenergie 2,189 MeV¹⁾ beträgt, und vom Be⁹-Kern, in dem das lockerste Neutron mit 1,63 MeV²⁾ gebunden ist, haben alle Kerne bis hinauf zu den schwersten pro Kernbaustein eine Bindungsenergie in der Grössenordnung von 8 MeV.

Deshalb sind auch, ausser bei Deuterium und Beryllium, alle Versuche, mit den härtesten natürlichen γ -Strahlen Atomumwandlungen durchzuführen, fehlgeschlagen. (Die Energie der γ -Strahlung von ThC'' beträgt 2,62 MeV, die energiereichste Komponente der γ -Strahlen von RaC hat eine Quantenenergie von 2,47 MeV³⁾.)

Wesentlich energiereichere γ -Strahlen treten bei künstlichen Kernumwandlungen auf, vor allem bei Proton-Einfangprozessen durch Reaktionen vom Typus ${}_ZK^A(p,\gamma) {}_{Z+1}K^{A+1}$. Die höchste bisher erhaltene γ -Energie, nämlich 17 MeV⁴⁾⁵⁾, entsteht beim Einfang eines Protons durch den Li⁷-Kern, der resonanzartig bei einer Protonenenergie von 440 kV erfolgt⁶⁾⁷⁾. Mit dieser Strahlung fanden BOTHE und GENTNER⁸⁾ bei einer ersten Durchmusterung des periodischen Systems an zehn Elementen einen Kernphotoeffekt, der sich in allen Fällen als (γ,n) -Prozess erwies. Sein Nachweis erfolgte durchwegs mit Hilfe der Radioaktivität des Restkerns. Die höchste Ausbeute erhielten diese Autoren an Kupfer im Prozess Cu⁶³(γ,n) Cu⁶². Für diese Reaktion bestimmten sie den Wirkungsquerschnitt und erhielten dafür $\sigma = 5 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$.

Infolge der im Vergleich zu den natürlichen γ -Strahlquellen geringen Intensität der durch künstliche Atomumwandlung erhältlichen γ -Strahlen besteht kaum eine Möglichkeit, die durch die γ -Quanten aus dem Atomkern herausgeschlagenen Neutronen direkt nachzuweisen. Ein solcher direkter Nachweis würde auch noch erschwert durch den Umstand, dass gerade bei den energiereichsten künstlich erzeugten γ -Strahlen, nämlich der Lithium- und der Bor- γ -Strahlung eine ziemlich intensive, durch Nebenreaktionen erzeugte Neutronenstrahlung auftritt.

Deshalb bleibt die Nachweismöglichkeit der (γ, n) -Prozesse auf jene Fälle beschränkt, wo der Kern durch die Umwandlung radioaktiv wird. Da in den letzten Jahren unsere Kenntnisse der künstlich radioaktiven Isotope weitgehend vervollständigt worden sind, sowohl was die Zahl der neugefundenen Aktivitäten als auch ihre Zuordnung betrifft, erschien es aussichtsreich, mit grösserer γ -Strahlenintensität als sie BOTHE und GENTNER zur Verfügung stand, in systematischer Bestrahlung möglichst aller Elemente des periodischen Systems nach weiteren Kernphotoeffekten zu suchen. Die Kenntnis der durch andere Kernreaktionen erhaltenen radioaktiven Isotope und ihrer Halbwertszeiten erwies sich dabei als sehr wertvoll, gibt sie doch in vielen Fällen einen Hinweis über die beim Kernphotoeffekt zu erwartenden Perioden und gestattet damit, die Bestrahlungsdauer von Anfang an richtig zu wählen. So sieht man, dass beispielsweise beim Natrium durch einen (γ, n) -Prozess einzig Na^{22} entstehen könnte. Dessen Halbwertszeit von $3,0 \pm 0,2 a$ ist aber so gross, dass sich dieser Kernphotoeffekt bei den mit unserer Apparatur möglichen Bestrahlungszeiten, auch bei im Vergleich zu anderen Kernphotoeffekten grosser Ausbeute, nicht nachweisen lässt. Andererseits müssen sehr kurzlebige Isotope, wie S^{31} und Ca^{39} der Beobachtung entgehen, wenn nicht speziell nach *kurzen* Aktivitäten gesucht wird. Mit den von uns erreichten γ -Intensitäten lassen sich bei einer Ausbeute von 1 % der an Cu^{63} gefundenen mit Sicherheit noch Halbwertszeiten zwischen drei Sekunden und fünf Tagen bestimmen.

Der Fall, dass die Quantenenergie der Lithium- γ -Strahlung zur Ablösung eines Neutrons nicht ausreicht, liegt vor beim Kohlenstoff C^{12} , wo die benötigte Energie 18,05 MeV beträgt⁹⁾. In allen andern Fällen ist energetisch ein (γ, n) -Prozess möglich. In dieser Arbeit werden unsere Ergebnisse an den leichten Kernen bis und mit Calcium beschrieben. Überall, wo ein mit unserer Apparatur nachweisbarer Kernphotoeffekt überhaupt erwartet werden konnte, ist es auch gelungen, die dadurch induzierte Aktivität nachzuweisen.

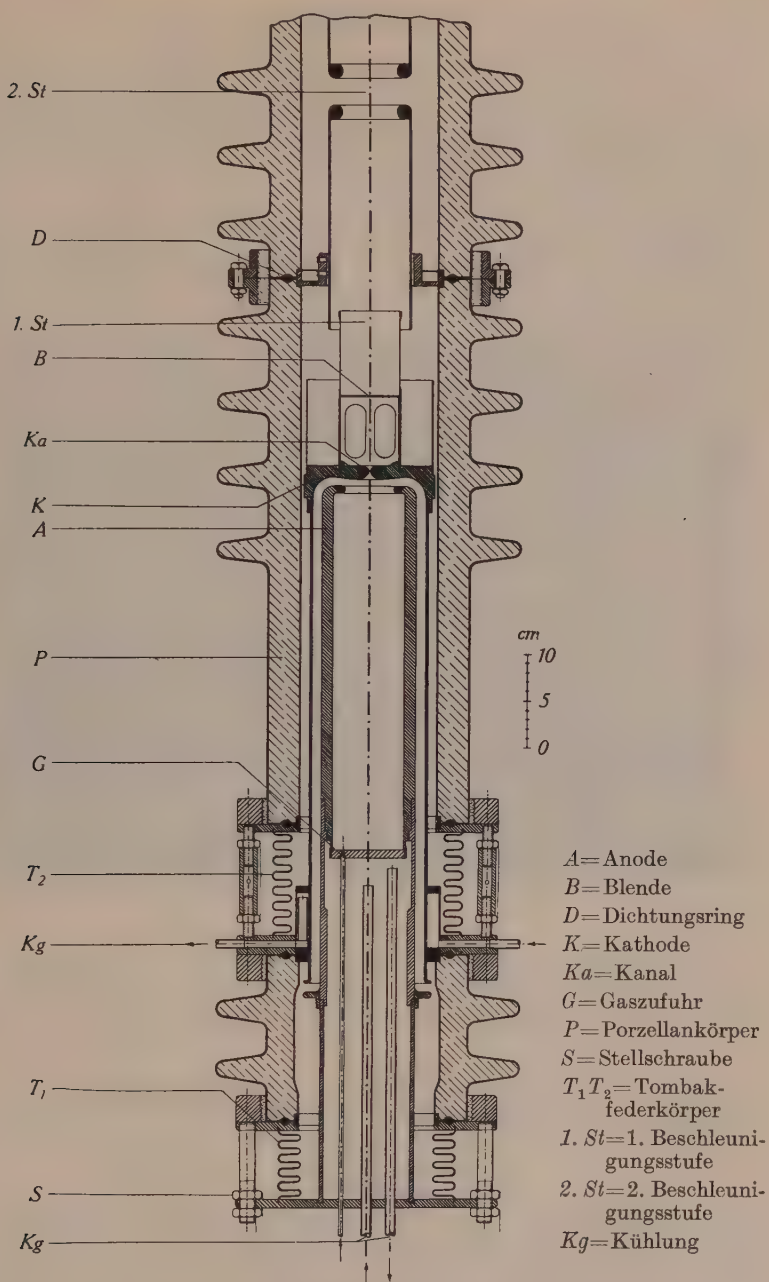


Fig. 1.
Gasentladung.

II. Apparatur.

1. Ionenquelle und Vakumanlage.

Die zur Ausführung dieser Arbeit benützte elektrostatische Hochspannungsapparatur ist ausführlich beschrieben worden in HPA XV (1942), 45¹⁰), sowie in der Promotionsarbeit des einen von uns (O. L., Diss. ETH 1942).

Fig. 1 zeigt einen Schnitt durch die Ionenquelle und die darauffolgenden Nachbeschleunigungsstufen, während Fig. 2 das obere Ende des Kanalstrahlrohres mit dem Pumpaggregat darstellt. Dieses

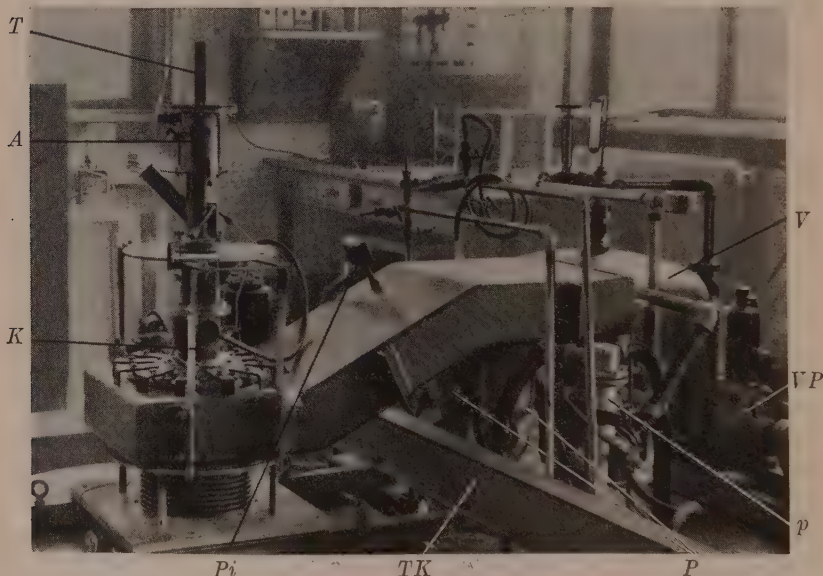


Fig. 2.

Oberes Ende des Kanalstrahlrohres mit Target und Pumpaggregat.

T = Target

A = Aufdampfapparatur und Faradaykäfig

K = Klappe

P_i = Piranimanometer

TK = Tragkonstruktion für das Kanalstrahlrohr

P = Grosse Diffusionspumpen

p = Kleine Diffusionspumpe

V = Vorvakuumkessel

VP = Vorvakuumpumpe

wurde im Laufe der vorliegenden Untersuchungen wesentlich verbessert. An die Stelle der beiden Öldiffusionspumpen mit einer Saugleistung von je 70 l/sec, jede an einem 0,5 langen Saugstutzen von 10 cm Durchmesser angebracht, treten nun vier gleich grosse

Pumpen des in unserem Institut verbesserten Typs mit einer Saugleistung von je 250 l/sec¹¹⁾. Sie saugen auf einen gemeinsamen, aus 8 mm starken Eisenplatten zusammengeschweissten Pumpkasten, dessen Querschnitt $15 \cdot 40 \text{ cm}^2$ beträgt. Die weiteren Stufen der Pumpanlage sind: Zwei Öldiffusionspumpen von je 20 l/sec, davor eine kleine Diffusionspumpe mit 4 l/sec Saugleistung und schliesslich eine rotierende Vorvakuumpumpe. Ein Vorvakuumbehälter von 150 l Inhalt erlaubt es, die rotierende Pumpe zeitweise abzuschalten. Bei offener Nachströmung, arbeiten die Diffusionspumpen 40 min bei abgestellter Vorvakuumpumpe, bei geschlossener Nachströmung lässt sich ohne Vorvakuumpumpe mit der kleinen auf das Vorvakuumgefäss arbeitenden Diffusionspumpe allein ein Druck von einigen 10^{-4} mm Hg während 12 Stunden aufrecht erhalten.

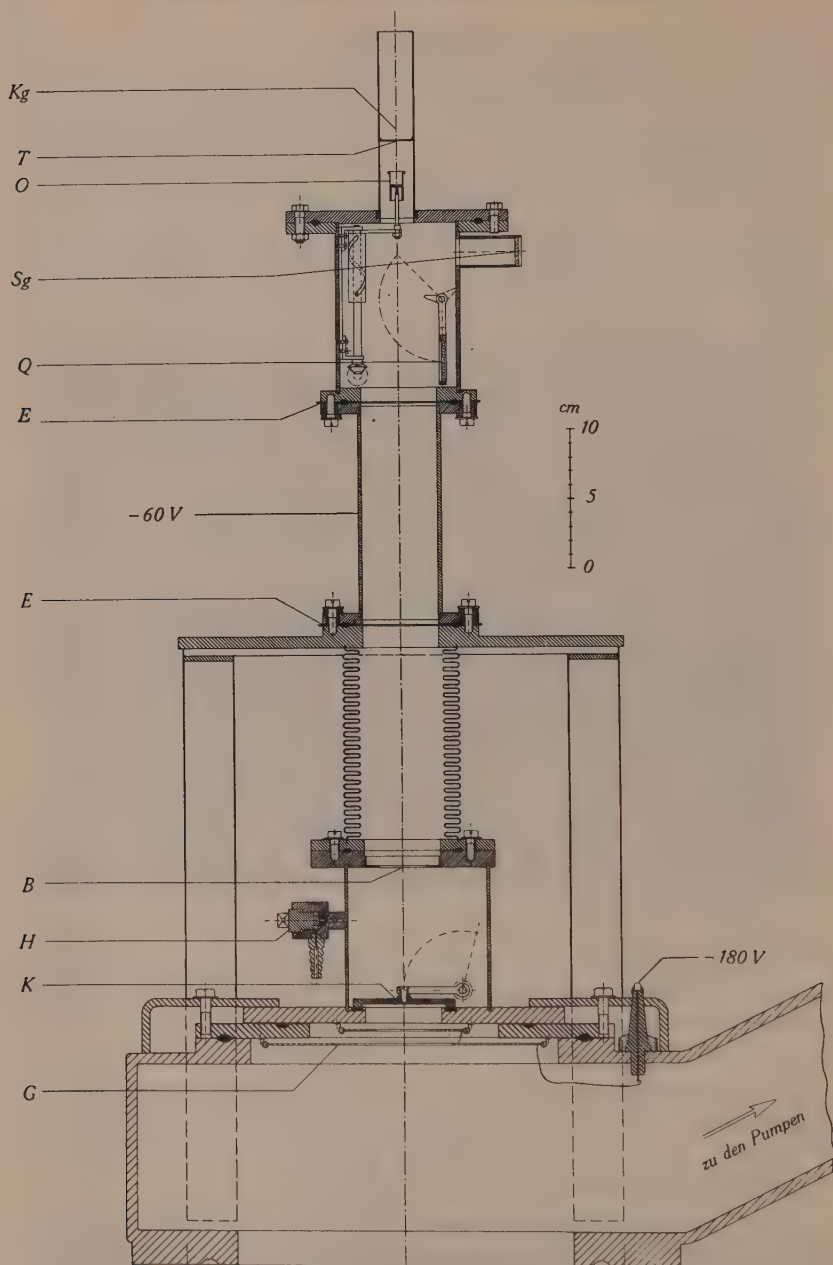
Die verbesserten Pumpen, sowie der vergrösserte Querschnitt der hochvakuumseitigen Saugleitung vergrösserten die Saugleistung erheblich, wodurch bei einer Arbeitspannung von 500 kV der im Faradaykäfing gemessene Kanalstrom von max. $90 \mu\text{A}$ auf max. $170 \mu\text{A}$ gestiegen ist. Die Bänder unseres Generators fördern maximal $700 \mu\text{A}$ auf die Hochspannungselektrode. Davon werden $150 \mu\text{A}$ durch Beruhigungs- und Messwiderstand beansprucht, so dass sich, diese abgerechnet, ionenstrommässig ein Wirkungsgrad von 33 % der ganzen Anlage ergibt.

2. Die Target.

Ursprünglich wurde Lithium in Form von LiOH bestrahlt. Da jedoch bei Bestrahlung von reinem Lithium eine dreimal so grosse Ausbeute an γ -Strahlen zu erwarten ist, sind wir dazu übergegangen, mit Hilfe einer Aufdampfapparatur im Hochvakuum ganz reine Lithiumschichten herzustellen, welche diese gegenüber der Beschiessung von LiOH verdreifachte γ -Intensität auch tatsächlich ergeben. Die Durchbildung der Aufdampfeinrichtung ist aus Fig. 3 zu ersehen.

Aus geometrischen Gründen, die später diskutiert werden, ist es für unseren Fall am günstigsten, wenn die Target als Zylinder ausgeführt wird, über den die zu bestrahlenden Substanzen in Form von Hohlzylindern gesteckt werden.

Der Lithiumbehälter aus Eisen trägt eine Heizwicklung, welche mit Glimmer isoliert ist. Mit einer Gewindenut und zwei Anschlängen kann dieser kleine elektrische Ofen entweder aus der Mitte ausgeschwenkt, oder aber in die Achse gedreht und dann in den die Target bildenden Eisenzylinder gehoben werden. Je nach der auf-



T = Target, Kg = Kühlung, Sg = Schauglas, Q = Quarz, O = Ofen, B = Blende, K = Klappe, H = Hahn, E = Öltucheinlage, G = Gegenspannung.

Fig. 3.

Schnitt durch das obere Ende des Kanalstrahlrohres.

gewendeten Heizleistung wird mehr oder weniger Lithium verdampft, welches sich auf der dem Ofen gegenüberliegenden Wand niederschlägt. Um gute Lithiumschichten zu erhalten ist es wesentlich, dass sowohl Ofen wie Target sehr sauber sind. Ist dies der Fall, so lassen sich ohne weiteres gut haftende Lithiumbeläge von einigen Zehntel Millimeter Dicke erreichen. Das Aus- und Einschwenken des Ofens erfolgt durch Drehen einer gebogenen Welle mittels eines Tombakfederkörpers. Auf diese Weise ergibt sich eine hochvakuumdichte, verlötete Durchführung, absolut betriebssicher und viel robuster als es der beste Schliff sein kann. Ein seitlich angebrachtes Schauglas ermöglicht es, auf einer in den Strahlengang schwenkbaren Quarzscheibe die Lage des Brennflecks zu kontrollieren, da der Quarz dort, wo er vom Ionenstrahl getroffen wird, hell glüht. Bei $100\ \mu\text{A}$ Ionenstrom und einer Spannung von $500\ \text{kV}$ wird auf der Target eine Leistung von $50\ \text{Watt}$ in Wärme umgesetzt. Durch intensive Kühlung muss diese rasch abgeführt werden, da sonst die Lithiumschicht zerstört wird. Als Kühlmittel wird feste Kohlensäure mit Alkohol verwendet. Die ganze Aufdampfapparatur samt Target dient als Faradaykäfig und ist von der Röhre durch einen mit Öltucheinlagen isolierten Zwischenzylinder getrennt, an den eine Gegenspannung von $-60\ \text{V}$ gelegt wird.

III. Messmethoden.

1. Die Intensität der γ -Strahlung.

Als Relativmass für die Intensität der in der Target erzeugten γ -Strahlung wird die Stosszahl eines $100\ \text{cm}$ entfernten dünnwandigen Aluminiumzählrohrs genommen. Es hat einen Innendurchmesser von $20\ \text{mm}$, eine Wandstärke von $0,1\ \text{mm}$ und eine wirksame Länge von $40\ \text{mm}$. Um eine bequem messbare Stosszahl zu erhalten, wurde das Zählrohr überall mit $10\ \text{cm}$ Blei umgeben; einzig auf der Seite gegen die Strahlenquelle zu wurde ein Fenster ausgespart, in dem die Dicke des Bleiabsorbers $30\ \text{mm}$ beträgt.

In dieser Anordnung ergibt sich eine von der Lithium- γ -Strahlung herrührende Stosszahl von bis zu 600 pro Minute.

2. Herstellung der Präparate.

Da die durch den Kernphotoeffekt induzierten Aktivitäten in der Regel nur schwach sind, bedarf es zu ihrem sicheren Nachweis einer günstig ausgebildeten Versuchsanordnung, so dass ein grösstmöglicher Teil der von der bestrahlten Substanz emittierten β -Teilchen auch in das Zählrohr gelangt und damit gemessen werden

kann. Deshalb wurde der Formgebung der zu bestrahlenden Substanzen besondere Aufmerksamkeit geschenkt.

Aus allen zu bestrahlenden Stoffen wurden 10 cm lange Hohlzylinder mit einem Innendurchmesser von 26,5 mm hergestellt, die sich bequem sowohl über die Target mit einem Aussendurchmesser von 26 mm, wie auch über ein dünnwandiges Aluminiumzählrohr von gleichem Durchmesser schieben lassen.

Die Wandstärke dieser Zylinder wurde der Energie der β -Teilchen des erwarteten aktiven Isotops angepasst und war immer grösser als die Reichweite der Positronen oder Elektronen im betreffenden Material.

Wo das betreffende Element in Blechform erhältlich war, wurden daraus einfach geeignete Zylinder zurechtgebogen und bis zur gewünschten Dicke ineinandergesteckt, so zum Beispiel im Fall von Mg, Al und dem als Bezugssubstanz dienenden Cu. Schwefel liess sich zu einem solchen geeigneten Zylinder giessen. Bei pulverförmigen Substanzen wurden kurze Hohlzylinder von 15–20 mm Höhe in einer Eisenform mit Hilfe einer hydraulischen Presse unter Drucken bis zu 40 Tonnen gepresst. (Dem Direktor der eidgenössischen Materialprüfanstalt, Herrn Prof. Dr. Rös, danken wir bestens für die freundliche Erlaubnis, eine der Pressen dieses Instituts benützen zu dürfen.)

3. Geometrische Anordnung bei Bestrahlung und Aktivitätsmessung.

Massgebend für die Ausbeute der nachzuweisenden Aktivität ist *erstens* der Raumwinkel, der bei der Bestrahlung des Präparates von diesem in bezug auf die hier punktförmig angenommene γ -Strahlenquelle, den Brennfleck, aufgespannt wird. Bei unserer Anordnung (Fig. 3) beträgt er 97% der ganzen um das Zentrum der Target gelegten Kugel.

Zweitens muss das aktivierte Präparat bei einer Messung möglichst nahe an das Zählrohr gebracht werden, damit der Raumwinkel, unter dem das Zählvolumen von jedem Element des Präparates aus erscheint, möglichst gross wird. Infolge der zur Verstärkung der verwendeten dünnwandigen Zählrohre notwendigen Rippen, können wir bei einem Präparat mit einer lichten Weite von 26,5 mm höchstens Zählrohre mit einem Innendurchmesser von 25 mm verwenden und erhalten damit einen mittleren Raumwinkel von 78%.

Bei Kupfer, das die grösste bis jetzt bekannte Ausbeute für den Kernphotoeffekt aufweist, erhielten wir von der 10 min-Periode, auf Bestrahlung bis zur Sättigung umgerechnet, eine Anfangsaktivität von 12000 Stössen pro Minute im Aktivitätszählrohr.

4. Gang der Messung.

Die Messung erfolgt, falls die erwartete Halbwertszeit es erlaubt, in der Weise, dass das Präparat bis zur praktischen Sättigung der vermuteten Halbwertszeit bestrahlt wird. Während der ganzen Bestrahlungszeit werden fortlaufend γ -Intensität, Hochspannung und Ionenstrom gemessen und notiert. Dann wird die bestrahlte Substanz über das Aktivitätszählrohr geschoben und die induzierte Aktivität verfolgt, bis sie auf den Nulleffekt abgeklungen ist. Dies wird so lange wiederholt, bis aus dem vorliegenden statistischen Material die Halbwertszeit der induzierten Aktivität genau bestimmt werden kann. Bei der Verfolgung schwacher Aktivitäten und besonders, wenn die gefundene Halbwertszeit in der Grössenordnung von Stunden oder Tagen liegt, ist es notwendig, den Nulleffekt des verwendeten Zählers so stark wie möglich zu reduzieren. Dies geschieht mit einer Antikoinzidenz-Anordnung: rings um ein Eisenrohr von einigen Millimeter Wandstärke und sechs Centimeter Innendurchmesser sind acht grosse Messingzählrohre (35 cm Länge und 4 cm Durchmesser) montiert, die alle parallel geschaltet sind. Das dünnwandige Aktivitätszählrohr mit dem aktivierten Präparat darum wird nun in das Eisenrohr geschoben, wo es ringsum von den grossen Zählrohren umgeben ist. Ein Höhenstrahlteilchen, welches das Aktivitätszählrohr durchsetzt, geht deshalb durch mindestens eines der grossen Zählrohre des Kranzes. Durch eine geeignete Antikoinzidenz-Schaltung erreicht man nun, dass alle Koinzidenzen zwischen Aktivitätszählrohr und irgendeinem Zählrohr des Kranzes nicht gezählt werden, womit der Anteil der Höhenstrahlung eliminiert wird. In unserem Falle verwendeten wir eine Schaltung nach dem von HERZOG¹³⁾ angegebenen Prinzip. Das Schema des Verstärkers gibt Fig. 4 wieder.

Die Antizählrohre können natürlich auch ausgelassen werden, so dass der Verstärker zum Zählen der Stösse eines gewöhnlichen Zählrohrs verwendet werden kann. Hat man grosse Stosszahlen zu registrieren, das heisst bei den von uns verwendeten mechanischen Zählwerken mehr als vierhundert pro Minute, so kann nach der Kopplungskapazität von der ersten zur zweiten Stufe ein Unter-setzer eingeschaltet werden.

Die zum Betrieb aller verwendeten Zählrohre benötigten Gleichspannungen werden von einem Netzanschlussgerät geliefert, bei welchem die Stabilisierung mit einer Reihe in Serie geschalteter Glimmlampen erfolgt. Mit Hilfe von Potentiometern, welche die einzelnen Glimmstrecken überbrücken, kann eine Reihe beliebig einstellbarer Spannungen abgegriffen werden, was den Vorteil hat,

worden ist. Ferner ist eine Fälschung möglich, wenn durch einen (n, p) -, (n, α) - oder (n, γ) -Prozess eine Aktivität von ähnlicher Halbwertszeit induziert wird, wie durch den Kernphotoeffekt. Deshalb ist es für die Diskussion der Messergebnisse wichtig, die Intensität der Neutronenstrahlung unserer Apparatur zu kennen.

Zur Erzeugung von Neutronen in unserer Apparatur kommen praktisch bloss die beiden folgenden Reaktionen in Frage:

- a) $\text{Li}^7(\alpha, n)\text{B}^{10}$
- b) $\text{Li}^7(d, n)\text{Be}^8$ und $\text{Li}^7(d, n)2\alpha$

mC Ra + Be

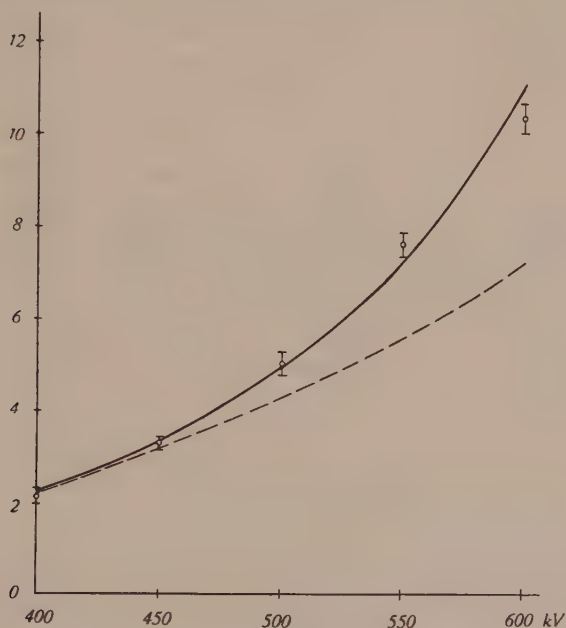


Fig. 5.

Neutronenintensität pro 100 μA Ionenstrom in Funktion der Spannung.

Als α -Teilchen stehen die 8,6 MeV- α -Teilchen, die bei Protoneinfang durch den Li^7 -Kern in der Target selbst gebildet werden, zur Verfügung. Messungen über die Neutronenausbeute des Prozesses a) liegen nur vor bis zu einer α -Teilchen-Energie von 5,2 MeV¹⁴). Jedoch weiss man, dass sie erheblich kleiner ist als bei Bestrahlung von Beryllium und Bor mit α -Teilchen¹⁵). Jedenfalls ist sie proportional der Ausbeute an α -Teilchen in der Li-Target, deren Spannungsabhängigkeit von HAFSTAD, HEYDENBURG und TUVE¹⁶) gemessen worden ist. In Fig. 5 ist diese Ausbeute im Bereich von

400—600 kV durch die gestrichelte Kurve dargestellt. Die ausgezogene Kurve gibt den Intensitätsverlauf der Li + D-Neutronen nach AMALDI, HAFSTAD und TUVE¹⁷⁾ wieder. Bei der Messung der Neutronenintensität unserer Apparatur benützten wir als Neutronenindikator die 44 sec-Aktivität des Rhodiums. Eine zu einem passenden Zylinder gebogene Rhodiumfolie wurde, allseitig von 12 cm Paraffin umgeben, während 15 sec über der Target bestrahlt und dann das Abklingen der Aktivität verfolgt. Das Ergebnis dieser von 50 zu 50 kV durchgeführten Messung wird durch die in Fig. 7 eingezeichneten Punkte dargestellt, wobei die senkrechten Striche den mittleren Fehler angeben. In der gleichen geometri-

willk. Einh.

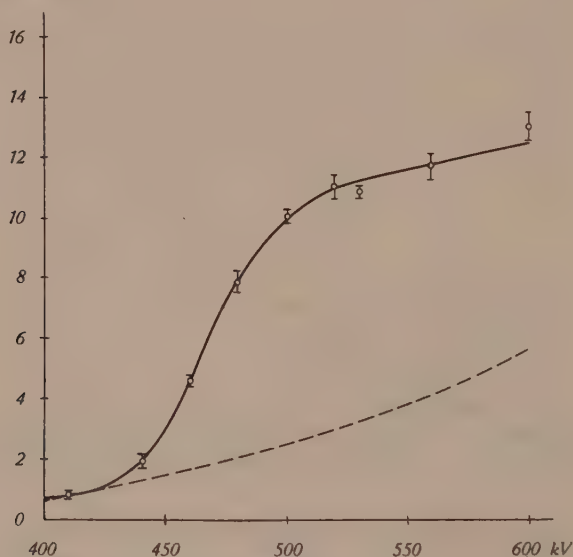


Fig. 6.

Gammastrahlintensität in Funktion der Spannung.
Gestrichelte Kurve = Neutronenintensität.

sehen Anordnung, nur mit einer Ra + Be-Neutronenquelle von 13,33 mC Ra-Äquivalent an Stelle der Target, wurde die Rhodiumfolie ebenfalls mehrere Male während 15 sec aktiviert, was uns erlaubt, die Neutronenintensität in mC Ra + Be-Äquivalent anzugeben. Bei einer Spannung von 600kV und 100 μ A Ionenstrom emittiert unsere Lithiumtarget eine Neutronenintensität entsprechend $10,4 \pm 0,4$ mC. In Fig. 5 ist für die beiden der Literatur entnommenen Kurven (loc. cit.) der Masstab so gewählt worden, dass

sie mit dem Messpunkt von 400 kV zusammenfallen. Wie man sieht, stimmen die Messpunkte so gut mit der Anregungskurve für die $\text{Li} + \text{D}$ -Reaktion überein, dass sicher der überwiegende Teil der von unserer Target emittierten Neutronen in dieser Reaktion entsteht.

Charakteristisch für die harte $\text{Li-}\gamma$ -Strahlung von 17 MeV ist ihre Resonanzstelle bei einer Protonenenergie von 440 kV (loc. cit.). Infolgedessen steigt bei Bestrahlung einer dicken Lithiumschicht die γ -Intensität bei 440 kV stark an und bleibt bei höheren Spannungen konstant (Fig. 6). Eine von der γ -Strahlung induzierte Aktivität ist der γ -Intensität proportional, muss also dieselbe Spannungsabhängigkeit zeigen, während eine von Neutronen herrührende Aktivität, als Funktion der Spannung aufgetragen, dem glatten Verlauf der Neutronenausbeute folgt. Deshalb kann, sobald die Ausbeute einer Aktivität bei verschiedenen Spannungen gemessen ist, immer sicher entschieden werden, ob sie von der γ -Strahlung oder von Neutronen induziert worden ist.

6. Bestimmung der relativen Ausbeute.

Als *Ausbeute* eines Kernphotoeffektes bezeichnen wir die auf eine feste γ -Intensität und auf unendlich lange Bestrahlungsdauer umgerechnete Anfangsaktivität des dabei gebildeten radioaktiven Isotopes. Unter „Aktivität“ wird hier die Zahl der pro Zeiteinheit durch die bestrahlte Substanz im Zählrohr ausgelösten Stösse verstanden. Durch Berücksichtigung der relativen Häufigkeit des Ausgangsisotops erhalten wir die *Ausbeute* am betreffenden *Isotop*. Gleich wie BOTHE und GENTNER (loc. cit.) setzten wir die grösste bis jetzt gefundene Ausbeute eines (γ, n) -Prozesses, nämlich die an Cu^{63} , $A_{\text{Cu}}^{62} = 100$ und bezogen alle andern Ausbeuten auf diesen Wert. Auf diese Weise wurden die bei der Besprechung der einzelnen Kernphotoeffekte angegebenen *relativen Ausbeuten* berechnet.

Die bei unseren Ausbeuteergebnissen angegebenen Ungenauigkeiten sind die Summe der *mittleren* Fehler der in das Ergebnis eingegangenen Aktivitäts- und γ -Intensitätsmessungen.

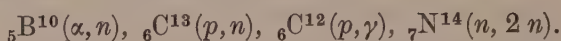
Bei der Bestimmung der Halbwertszeit erfolgte die Abschätzung des jeweils angegebenen *mittleren* Fehlers nach der von R. PEIERL's³³⁾ mitgeteilten Methode.

IV. Messergebnisse.

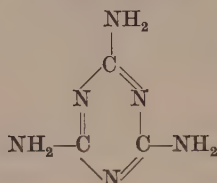
1. Stickstoff.

Für Stickstoff geben BOTHE und GENTNER¹²⁾ einen Kernphotoeffekt an; jedoch war die Ausbeute so gering, dass sie von ihnen nicht gemessen werden konnte. Deshalb haben wir Stickstoff noch einmal untersucht. Das durch den Kernphotoeffekt

entstehende Isotop N^{13} ist wohlbekannt und wurde bis jetzt bei den folgenden Reaktionen erhalten:



Es hat eine Halbwertszeit von $T = 9,93 \text{ min}^9$). Als Stickstoffverbindung haben wir Melamin verwendet. Diese organische Substanz enthält 66,6 Gewichtsprozent Stickstoff und als einzige weitere Komponenten Kohlenstoff und Wasserstoff, die durch die Li- γ -Strahlen nicht aktiviert werden können. Die Formel des Melamins lautet:



(Die Überlassung der benötigten Proben Melamin verdanken wir der „Ciba“ A.-G., Basel). Eine mehrfache Bestrahlung mit nachfolgender Aktivitätsmessung ergab tatsächlich eine schwache Aktivität mit einer Halbwertszeit von $9,2 \pm 0,6 \text{ min}$. Für die relative Ausbeute des Kernphotoeffektes an N^{14} , bezogen auf die gleich 100 gesetzte Ausbeute an Cu^{63} erhalten wir:

$$\underline{A_{N^{13}} = 0,55 \pm 0,05}$$

2. Sauerstoff.

Zur Bestrahlung des Sauerstoffs benützten wir zwei Versuchskörper:

- a) in Wasser eingelegte Gelatineblätter, die, um ein Austrocknen während der Bestrahlung zu verhüten, mit dünnen Celluxfolien überklebt wurden.
- b) Borsäure (H_3BO_3) von KAHLBAUM. Hieraus liess sich ohne Schwierigkeiten ein Zylinder pressen.

Als Ergebnis von 10 Bestrahlungen des Borsäurezylinders erhielten wir die in Fig. 7 aufgezeichnete Zerfallskurve mit einer Halbwertszeit von $130 \pm 6 \text{ sec}$, was gut mit der für O^{15} angegebenen Halbwertszeit von $T = 125 \pm 5 \text{ sec}^{17)}$ übereinstimmt. Damit ist der bereits von CHANG, GOLDHABER und SAGANE¹⁹⁾ sowie BOTLE und GENTNER (loc. cit.) gefundene Kernphotoeffekt an O^{16} bestätigt. Für die Ausbeute erhalten wir in sehr guter Übereinstimmung der Resultate an Gelatine und Borsäure einen Wert von:

$$\underline{A_0^{15} = 0,85 \pm 0,07}$$

3. Fluor.

Fluor wurde bestrahlt in Form von LiF und CaF_2 . Beide Substanzen liessen sich gut pressen, so dass für die Ausbeutebestimmung definierte Verhältnisse vorlagen.

Die von anderen Autoren mit $107 \pm 4 \text{ min}^{20)}$, resp. $112 \pm 4 \text{ min}^{21)}$ angegebene Periode des F^{17} wurde von uns sowohl bei Bestrahlung von LiF als auch bei der von CaF_2 gefunden. Als Halbwertszeit erhielten wir den Wert $T = 115 \pm 4 \text{ min}$.

Für die Ausbeute ergibt der Mittelwert aus den Resultaten an den beiden Substanzen:

$$\underline{A_{\text{F}18} = 0,75 \pm 0,05}$$

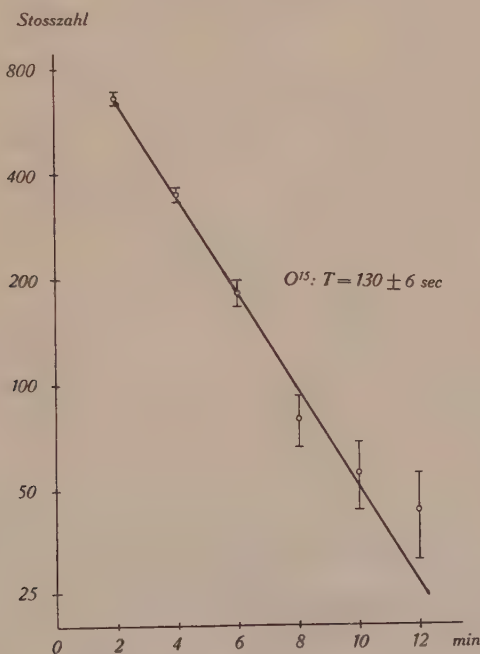


Fig. 7.

Zerfallskurve von O^{15} .

4. Magnesium.

a) (γ, n) -Prozess an Mg^{24} .

Magnesium wurde bestrahlt in Form von 7 mm dicken, aus 1 mm starkem Rein-Magnesiumblech hergestellten Zylindern. (Die freundliche Überlassung von sehr reinem Magnesium, das speziell

für uns ausgewalzt wurde, verdanken wir den Aluminiumwalzwerken Rorschach A.-G.) Ein (γ, n) -Prozess sollte am häufigsten Isotop Mg^{24} (77,4%) auf Mg^{23} , einen Positronenstrahler mit 11,6 sec Halbwertszeit²²⁾ führen, während aus den beiden höheren Isotopen stabile Kerne entstehen würden. Tatsächlich würde schon bei unseren ersten Messungen im Herbst 1941 eine kurze, von der γ -Strahlung kommende Aktivität festgestellt, doch konnte ihre Halb-

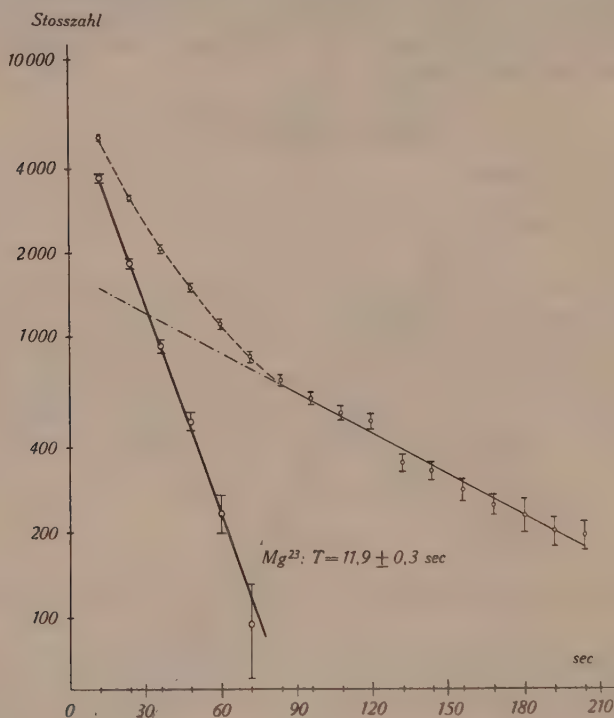


Fig. 8.

Zerfallskurve von Mg^{23} .

wertszeit, da noch die Andeutung einer längeren Periode vorhanden war, nicht genau bestimmt werden. Mit grösserer Intensität haben wir nun Magnesium noch einmal gemessen. Es zeigt sich, dass tatsächlich zwei Perioden vorliegen, nämlich erstens die 11,6 sec-Aktivität und zweitens, schwächer, aber deutlich erkennbar, eine Periode von 62 ± 2 sec (Fig. 8 und Fig. 9). Diese Kurven stellen die Zusammenfassung der Ergebnisse von 154 Einzelmessungen dar. Wir gebrauchten vier verschiedene Versuchskörper, um ein Anwachsen der durch Neutronen induzierten 14,8 h-Periode des im Prozess

$\text{Mg}^{24}(n, p)$ gebildeten Na^{24} zu vermeiden, da diese sich bei wiederholter Bestrahlung eines einzigen Magnesiumzylinders in einer sukzessiven Vergrößerung des Nulleffektes zeigte.

Eine gleich lange Bestrahlung von jeweils 120 sec mit einer $\text{Ra} + \text{Be}$ -Neutronenquelle von 69 mC Ra -Äquivalent ergab eine Periode von 53 sec. Von einer 12 sec-Periode fehlte jede Andeutung. Überhaupt konnten wir mit dieser Quelle bis jetzt keinen $(n, 2n)$ -Prozess nachweisen, da hierzu ihre Intensität offenbar zu gering ist. Die vorliegende, während 5 min messbare 53 sec-Aktivität ent-

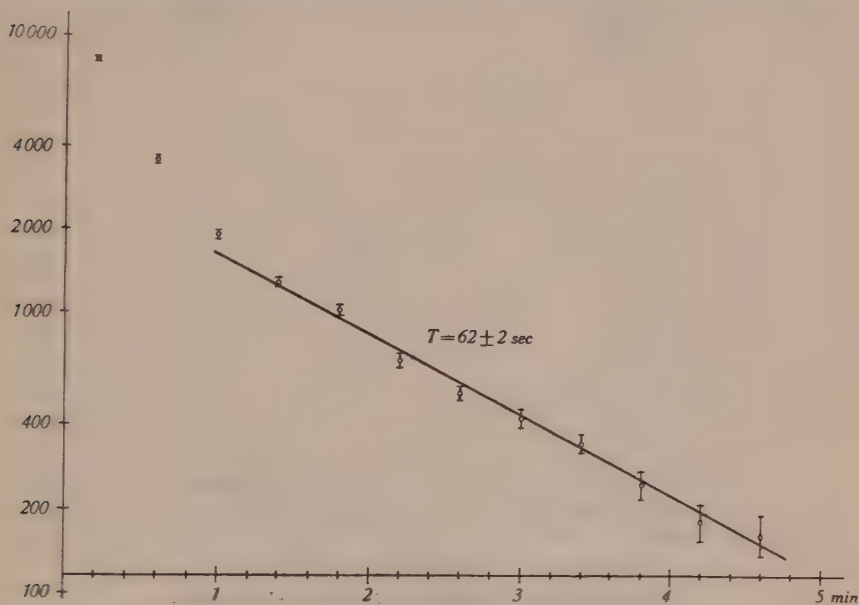


Fig. 9.

Abfall der an Magnesium induzierten 62 sec-Aktivität.

steht durch Überlagerung der 40 sec-Periode des Ne^{23} (aus $\text{Mg}^{26}(n, \alpha)\text{Ne}^{23}$) und der schwachen 10,2 min-Periode des durch Neutroneneinfang gebildeten Mg^{27} .

Die Übereinstimmung der von uns gefundenen $11,9 \pm 0,3$ sec für die Halbwertszeit der kurzen Periode mit den von WHITE, DELSASSO, FOX und CREUTZ (loc. cit.) angegebenen 11,6 sec ist so gut, dass diese mit Sicherheit dem Prozess $\text{Mg}^{24}(\gamma, n)\text{Mg}^{23}$ zugeschrieben werden kann.

Die Ausbeute beträgt:

$$\underline{A_{\text{Mg}^{23}} = 4,0 \pm 0,25}$$

b) Längere Periode an Mg: $T = 62 \pm 2$ sec.

Da es sich hier um eine bis jetzt noch nicht bekannte Aktivität handelt, sollen gerade an diesem Beispiel ausführlich alle Unterscheidungsmöglichkeiten zwischen den beiden bei unserer Messmethode einzig möglichen Annahmen, nämlich der, dass die Aktivität von der γ -Strahlung, und der, dass sie von Neutronen induziert wurde, diskutiert werden.

Weil bei der Bestrahlung laufend die γ -Intensität mitgemessen wird, kommt als erste Prüfung der direkte Vergleich von γ -Inten-

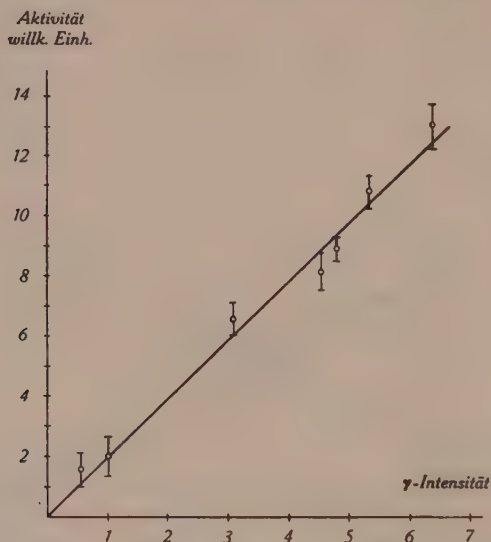


Fig. 10.

62 sec-Periode in Funktion der Gamma-Intensität.

sität und Ausbeute der induzierten Aktivität in Frage (Fig. 10). Man erkennt, dass die 62 sec-Aktivität innerhalb der Fehlergrenzen der γ -Strahlung proportional ist. In Fig. 11 ist die Ausbeute der 62 sec-Periode reduziert auf $100 \mu\text{A}$ Ionenstrom in Funktion der Protonenenergie aufgetragen. Sie zeigt den charakteristischen Resonanzanstieg der γ -Strahlung bei 440 kV.

Ferner ist es höchst unwahrscheinlich, dass 10 mC Ra-Äquiv. von Li + D-Neutronen eine deutliche Aktivität erzeugten, die durch 69 mC Ra+Be-Neutronen überhaupt nicht erhalten werden kann, denn die Spektren der beiden Neutronenquellen unterscheiden sich in ihrer Form nicht stark voneinander (AMALDI, loc. cit.), so dass auch die Zahl der schnellsten Neutronen aus der Ra + Be-Quelle grösser ist als bei den von unserer Apparatur emittierten Neu-

tronen. Aus diesen Gründen können wir bestimmt aussagen, dass die neue an Magnesium gefundene 62 sec-Periode durch die Li- γ -Strahlung erzeugt wurde.

Die Zuordnung dieser Aktivität bereitet jedoch Schwierigkeiten, da infolge der relativ schwachen Intensität, sowie der kurzen Halbwertszeit jeder Versuch einer chemischen Trennung zum Scheitern verurteilt ist. Magnesium besteht aus den drei stabilen Isotopen Mg^{24} (77,4%), Mg^{25} (11,5%) und Mg^{26} (11,1%). Neben dem unter a) beschriebenen Mg^{23} können durch einen (γ, n) -Prozess

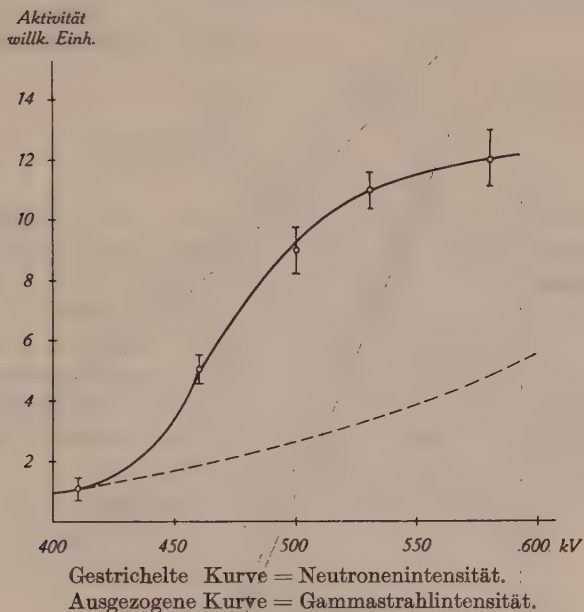


Fig. 11.

62 sec-Aktivität in Funktion der Spannung.

auch die Isotope Mg^{24} und Mg^{25} entstehen. Es besteht daher die Möglichkeit, dass es sich bei der 62 sec-Aktivität um den isomeren Zustand eines dieser zwei stabilen Mg-Isotope handelt. Da aber der erste gesicherte Fall von Kernisomerie erst beim Scandium auftritt, erscheint diese Annahme bei einem so leichten Element wie Magnesium als nicht sehr wahrscheinlich. Von den beiden andern Reaktionstypen (γ, p) und (γ, α) führt einzig der (γ, p) -Prozess an Mg^{26} auf ein noch unbekanntes Isotop, nämlich Na^{25} . Da DICKSON und KONOPINSKI²³⁾ für dieses Isotop eine Halbwertszeit von 20 sec voraussagen, was grössenordnungsmässig mit der von uns gefundenen übereinstimmt, so ist diese Deutungsmöglichkeit nicht ohne

weiteres von der Hand zu weisen; wir möchten aber betonen, dass sie in keiner Weise zwingend ist. Da, wie bereits erwähnt, alle in dieser Arbeit angegebenen Ausbeuten auf das Ausgangsisotop bezogen sind, kann eine solche hier nicht angegeben werden. Jedoch folgt aus unseren Messungen, dass die Anfangsaktivität der 62 sec-Periode (auf unendlich lange Bestrahlung umgerechnet) 60% derjenigen von Mg^{23} beträgt.

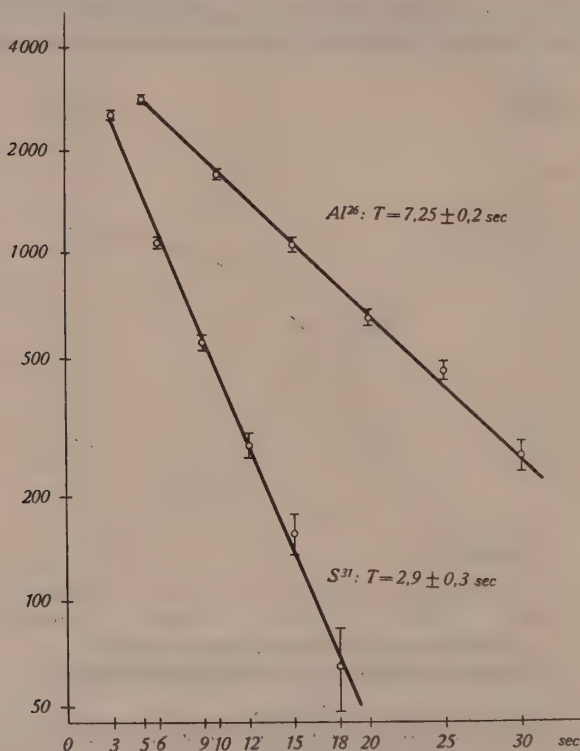


Fig. 12.
Zerfallskurven von Al^{26} und S^{31} .

5. Aluminium.

Bei Bestrahlung von Aluminium erhielten wir eine Aktivität mit einer Halbwertszeit von $7,25 \pm 0,2$ sec (Fig. 12). (Die benötigten Proben Rein-Aluminium verdanken wir der Aluminium-Industrie Neuhausen A.-G. Die in ihnen enthaltenen Verunreinigungen Si, Fe, Cu betragen zusammen 0,0026%.) Der Verlauf dieser 7 sec-Aktivität in Funktion der Protonenenergie zeigt, dass sie von der γ -Strahlung herrührt. Die gemessene Halbwertszeit stimmt so gut

mit der für Al^{26} von FRISCH²⁴) und BRANDT²⁵) angegebenen überein, dass der Prozess $\text{Al}^{27}(\gamma, n)\text{Al}^{26}$ sichergestellt ist. Bei Kontrollversuchen mit der Neutronenquelle wurde einzig die 10,2 min-Periode des Mg^{27} aus dem Prozess $\text{Al}^{27}(n, p)\text{Mg}^{27}$ gefunden, die bei längerer Bestrahlung mit der Apparatur auch durch die aus der Target stammenden Neutronen induziert wird. Die in Fig. 12 aufgetragene Zerfallskurve ist mit ihren rund 6000 Stössen die Zusammenfassung von 170 Einzelmessungen mit einer Bestrahlungsdauer von 30 sec und anschliessender Aktivitätsmessung in Intervallen von 5 sec.

Für die Ausbeute erhalten wir:

$$\underline{A_{\text{Al}^{26}} = 11,0 \pm 0,6}$$

6. Schwefel.

In gleicher Weise wie beim Magnesium besteht auch hier eine sehr gute Übereinstimmung der von uns gefundenen Halbwertszeit $T = 2,9 \pm 0,2$ sec (Fig. 12) mit den von WHITE, CREUTZ, DELSASSO und WILSON²⁶) für die Halbwertszeit von S^{31} gefundenen 3,2 sec. Da die Aktivität ebenfalls den Resonanzanstieg bei 440 kV Protonenenergie zeigt, so fällt als einzige Möglichkeit der Prozess $\text{S}^{32}(\gamma, n)\text{S}^{31}$ in Betracht. Mit der Neutronenquelle konnte keine kurze Aktivität gefunden werden. Ebenso wie bei den Messungen an Aluminium mussten auch hier über 170 Einzelmessungen durchgeführt werden, bis Halbwertszeit und Ausbeute mit der gewünschten Genauigkeit angegeben werden konnte.

Für die Ausbeute ergibt sich:

$$\underline{A_{\text{S}^{31}} = 13,7 \pm 0,7}$$

7. Chlor.

Der Kernphotoeffekt an Chlor ergibt die 33 min-Periode des Cl^{34} . Seine Ausbeute wird von BOTHE und GENTNER mit $A_{\text{Cl}^{34}} = 5$ angegeben. Um den (γ, n) -Prozess am höheren Isotop des Chlors, der auf Cl^{36} führt, zu finden, müsste man eine um Grössenordnungen stärkere γ -Strahlenquelle als unsere Apparatur zur Verfügung haben, da Cl^{36} , wenn es überhaupt existiert, eine Halbwertszeit von $T > 1 \text{ a}^{27}$) hat.

Wir bestrahlten Chlor in Form von Hexachloräthan (C_2Cl_6) und erhielten als Ausbeute:

$$\underline{A_{\text{Cl}^{34}} = 8,3 \pm 0,6}$$

8. Kalium.

Bei Zählrohrmessungen an Kalium macht sich die natürliche Aktivität des K^{40} unangenehm bemerkbar, erhielten wir doch in unserem Aktivitätszählrohr aus einem 50 mm langen K_2S -Zylinder 580 Stösse pro Minute. Wir wählten als Versuchssubstanz K_2S , da diese Verbindung relativ beständig ist, einen hohen Kaliumgehalt aufweist, und die an der zweiten Komponente, dem Schwefel, durch γ -Strahlen erzeugte Aktivität nach einer halben Minute vollständig abgeklungen ist. Durch Verwendung eines Absorbers aus 0,41 mm starkem Kupferblech konnte der Nulleffekt des Zählers auf 38 Stösse pro Minute herabgedrückt werden, und mit diesem Absorber um das Zählrohr wurde nun eine Aktivität mit einer Halbwertszeit von $8,0 \pm 0,4$ min gefunden, was innerhalb der Fehlergrenzen mit der von K^{38} , $T = 7,65 \pm 0,1$ min²⁸⁾, übereinstimmt. Die Ausbeute der Aktivität ist proportional zu der γ -Intensität, so dass es sich um den Kernphotoeffekt an K^{39} handeln muss. Die Absorption der Positronen des K^{38} in Aluminium wurde von RIDENOUR und HENDERSON³¹⁾ gemessen, die das K^{38} mit Hilfe der Reaktionen $Cl^{35}(\alpha, n)K^{38}$ und $Ca^{40}(d, \alpha)K^{38}$ erhielten und chemisch ausfällten.

Dies ermöglicht uns, allerdings mit beschränkter Genauigkeit, auch für den Kernphotoeffekt an K^{39} die relative Ausbeute anzugeben. Unter Berücksichtigung der Absorption der K^{38} -Positronen durch 0,41 mm Cu. erhielten wir:

$$\underline{A_{K^{38}} \approx 5}$$

9. Calcium.

Von den sechs stabilen Calciumisotopen ist Ca^{40} mit 96,96% das weitaus häufigste. Durch den (γ, n) -Prozess würde aus ihm Ca^{39} entstehen. Dieses Isotop kannte man bis jetzt noch nicht. Es gehört zu der Reihe der Kerne mit $Z = N + 1$, das heisst, es enthält ein Proton mehr als Neutronen. Alle diese Kerne sind Positronenstrahler, deren Halbwertszeit mit zunehmender Ordnungszahl immer kleiner wird. Dank einer Reihe von experimentellen und theoretischen Arbeiten^{22) 26) 29) 30) 31)} kennt man ihre Eigenschaften verhältnismässig gut. Von C^{11} bis zu Sc^{41} sind ausser K^{37} und Ca^{39} alle Isotope dieser Reihe gefunden worden.

Für Ca^{39} wäre nach WIGNER³²⁾ eine Halbwertszeit von etwa einer Sekunde zu erwarten und aus einer Zusammenstellung der Coulomb-Energie des letzten Protons aller dieser Kerne nach ELLIOT und KING³¹⁾ erhält man durch Interpolation für die maximale Positronenenergie einen Wert von 4,8 MeV.

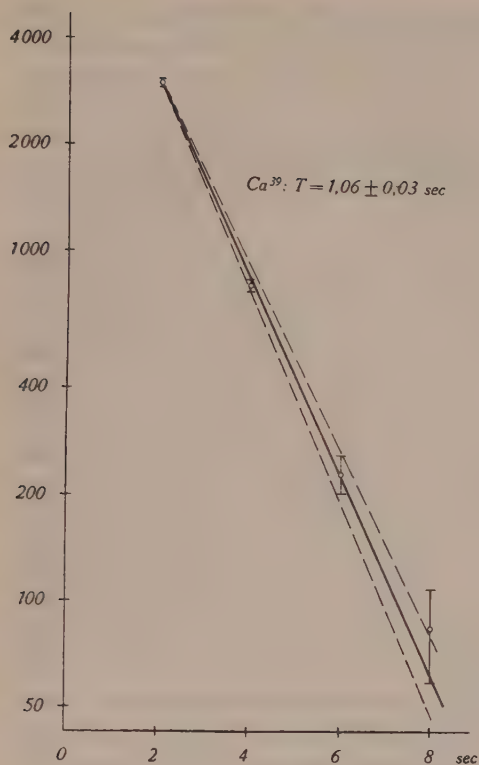
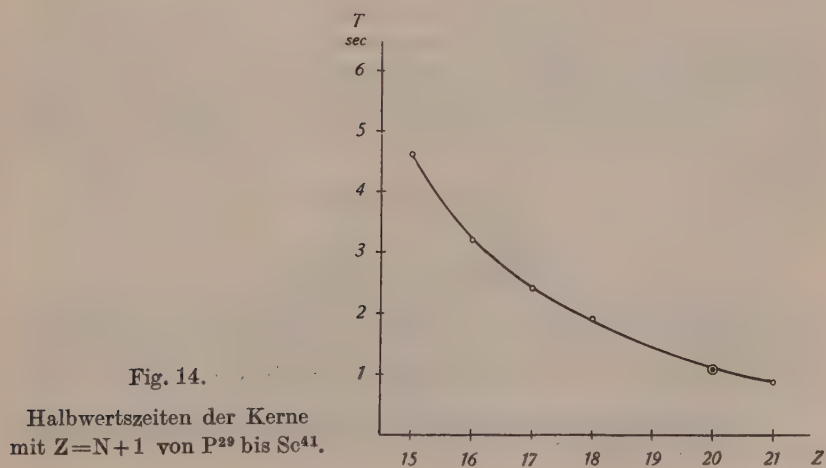


Fig. 13.
Zerfallskurve von Ca^{39} .
Die beiden gestrichelten Geraden
verdeutlichen den doppelten
mittleren Fehler.



Bei Bestrahlung von zu einem Zylinder gepresstem geraspelttem Calcium haben wir tatsächlich eine sehr rasch abklingende Aktivität gefunden. Nachdem wir uns in einer Reihe von Vorversuchen überzeugt hatten, dass die Aktivität von der γ -Strahlung erzeugt wurde und dabei auch eine rohe Halbwertszeitbestimmung durchführen konnten, ist es uns gelungen, mit einfachen Mitteln die Halbwertszeit dieses neuen, sehr kurzlebigen Isotops auf rund 3% genau zu messen.

Die zur Ausbeute- und Halbwertszeitbestimmung benützten Messungen wurden folgendermassen durchgeführt: Der Calciumzylinder wurde während ca. 6 Sekunden bestrahlt. Einer von uns hob ihn dann von der Target und liess ihn über ein hinter Blei ganz in der Nähe senkrecht aufgestelltes Zählrohr gleiten. Nach einiger Übung wurde hiefür weniger als eine Sekunde gebraucht. Um beim Ablesen des Zählers keine Fehler zu machen, benützten wir drei verschiedene Zählwerke, wobei sukzessive genau 1, 3 und 5 Sekunden nach Ende der Bestrahlung vom 1. zum 2. und dann zum 3. geschaltet wurde. Die Aufgabe des Beobachters wurde dadurch wesentlich erleichtert. Er brauchte kein schnellaufendes Zählwerk abzulesen, sondern konnte sich ganz auf die Stoppuhr konzentrieren. Nach fünf Sekunden war die Aktivität so stark abgeklungen, dass dann der Zählerstand bequem am 3. Zählwerk von zwei zu zwei Sekunden abgelesen werden konnte*).

Als Resultat von 600 durchgeführten Bestrahlungen erhielten wir die in Fig. 13 aufgezeichnete Zerfallskurve mit einer Halbwertszeit von $T = (1,06 \pm 0,03)$ sec. Die beiden gestrichelten Geraden verdeutlichen den doppelten mittleren Fehler.

In Fig. 14 sind die gemessenen Halbwertszeiten der dem Calcium benachbarten Kerne der Reihe $Z = N + 1$ in Funktion der Ordnungszahl aufgetragen, was eine glatte Kurve ergibt. Die neue, an Calcium gefundene Halbwertszeit liegt sehr gut auf dieser Kurve, was uns, neben der Vorhersage von WIGNER³⁵⁾, darin bestärkt, sie dem Ca^{39} zuzuschreiben. Damit ergibt sich der Prozess $\text{Ca}^{40}(\gamma, n)\text{Ca}^{39}$.

$$\underline{A_{\text{Ca}^{39}} = 4,8 \pm 0,3}$$

V. Zusammenfassung.

In Tabelle 1 sind die in dieser Arbeit beschriebenen Kernphotoeffekte zusammengestellt. Soweit Messungen anderer Forscher vorlagen, werden die von ihnen erhaltenen Ausbeuten in der letzten

*) Herrn Dr. JACOBI sind wir für seine freundliche Mithilfe bei diesen Messungen zu Dank verpflichtet.

Spalte angegeben. (B. u. G.) bedeutet dabei die Arbeit von BOTHE und GENTNER¹²⁾, (Ch.) diejenige von CHANG, GOLDBABER und SAGANE¹⁹⁾.

Tabelle 1.

Relative Ausbeuten des Kernphotoeffektes an leichten Elementen.

Ausgangs- isotop mit rel. Häufigkeit	End- kern	Halbwertszeit		Relative Ausbeute bezogen auf das Ausgangsisotop	
		unser Ergebnis	Literaturwert		
${}^7\text{N}^{14}$ 99,62%	N^{13}	9,2 \pm 0,6 m	9,93 \pm 0,03 m	0,55 \pm 0,05	1 (B & G)
${}^8\text{O}^{16}$ 99,8%	O^{15}	130 \pm 6 s	125 \pm 5s	0,85 \pm 0,07	2 (B & G) 1,4 (Ch)
${}^9\text{F}^{19}$ 100%	F^{18}	115 \pm 4 m	112 \pm 4 m 107 \pm 4 m	0,75 \pm 0,05	4 (B & G)
${}^{12}\text{Mg}^{24}$ 77,4%	Mg^{23}	11,9 \pm 0,3 s	11,6 \pm 0,5 s	4,0 \pm 0,25	
${}^{13}\text{Al}^{27}$ 100%	Al^{26}	7,25 \pm 0,2 s	7,0 \pm 0,5	11,0 \pm 0,6	
${}^{16}\text{S}^{32}$ 95,1 %	S^{31}	2,9 \pm 0,2 s	3,18 \pm 0,04 s	13,7 \pm 0,7	
${}^{17}\text{Cl}^{35}$ 75,4%	Cl^{34}	33,2 \pm 0,5 m	32 \pm 1 m	8,3 \pm 0,6	5 (B & G)
${}^{19}\text{K}^{39}$ 93,44%	K^{38}	8,0 \pm 0,4 m	7,65 \pm 0,1 m	5	
${}^{20}\text{Ca}^{40}$ 96,96%	Ca^{39}	1,06 \pm 0,03 s		4,8 \pm 0,3	
${}^{29}\text{Cu}^{63}$ 68%	Cu^{62}	10,5 \pm 0,25 m	9,92 \pm 0,05 m 10,5 \pm 0,5 m	100	100(B & G)

Dem Jubiläumsfonds der E. T. H. sind wir für finanzielle Unterstützung sehr zu Dank verpflichtet.

Zürich, Physikalisches Institut der E. T. H.

Literaturverzeichnis.

- 1) G. STETTER u. W. JENTSCHKE: Z. Physik **110** (1938), 214.
- 2) G. B. COLLINS, B. WALDMANN u. E. GUTH: Physic. Rev. **56** (1939), 876.
- 3) A. I. ALICHANOW u. SPIWAK: Physikal. Z. USSR. **11** (1937), 357.
- 4) L. A. DELSASSO, W. A. FOWLER u. C. C. LAURITSEN: Physic. Rev. **51** (1937), 391.
- 5) E. R. GAERTTNER u. H. R. CRANE: Physic. Rev. **52** (1937), 582.
- 6) L. R. HAFSTAD, N. P. HEYDENBURG u. M. A. TUVE: Physic. Rev. **50** (1936), 504.
- 7) C. M. HUDSON, R. G. HERB u. G. J. PLAIN: Physic. Rev. **57** (1940), 587.
- 8) W. BOTHE u. W. GENTNER: Z. Physik **106** (1937), 236.
- 9) J. MATTAUCH u. S. FLÜGGE: Kernphysikalische Tabellen, Berlin 1942.
- 10) O. HUBER, O. LIENHARD, P. PREISWERK, P. SCHERRER u. H. WÄFFLER: H.P.A. **XV** (1942), 45.
- 11) H. BAUMGARTNER, C. R. EXTERMANN, P. C. GUGELOT, P. PREISWERK u. P. SCHERRER: H.P.A. **XV** (1942), 332.
- 12) W. BOTHE u. W. GENTNER: Z. Physik. **112** (1939), 45.
- 13) G. HERZOG: Rev. of Sc. Instr. **11** (1940), 84.

- ¹⁴⁾ K. SCHNETZLER: Z. Physik **95** (1935), 302.
 - ¹⁵⁾ E. AMALDI: Physikal. Z. **38** (1937), 692.
 - ¹⁶⁾ L. R. HAFSTAD, N. P. HEYDENBURG u. M. A. TUVE: Physic. Rev. **50** (1936), 504.
 - ¹⁷⁾ E. AMALDI, L. R. HAFSTAD u. M. A. TUVE: Physic. Rev. **51** (1937), 896.
 - ¹⁸⁾ E. MC. MILLAN u. E. O. LAWRENCE: Physic. Rev. **47** (1935), 452.
 - ¹⁹⁾ W. V. CHANG, M. GOLDHABER u. R. SAGANE: Nature **193** (1937), 962.
 - ²⁰⁾ L. A. DU BRIDGE, S. W. BARNES, J. H. BUCK u. C. V. STRAIN: Physic. Rev. **53** (1938), 447.
 - ²¹⁾ A. H. SNELL: Physic. Rev. **51** (1937), 143.
 - ²²⁾ M. G. WHITE, L. A. DELSASSO, J. G. FOX u. E. C. CREUTZ: Physic. Rev. **56** (1939), 512.
 - ²³⁾ G. DICKSON u. E. KONOPINSKI: Physic. Rev. **58** (1940), 949.
 - ²⁴⁾ O. R. FRISCH: Nature **133** (1934), 721.
 - ²⁵⁾ H. BRANDT: Z. Physik **108** (1938), 734.
 - ²⁶⁾ M. G. WHITE, E. C. CREUTZ, L. A. DELSASSO u. R. R. WILSON: Physic. Rev. **59** (1941), 63.
 - ²⁷⁾ D. C. GRAHAME u. H. WALKE: Priv. Mitteilung an J. J. Livingood und G. T. Seaborg, Rev. mod. Physics **12** (1940), 30.
 - ²⁸⁾ L. N. RIDENOUR u. W. J. HENDERSON: Physic. Rev. **52** (1937), 889.
 - ²⁹⁾ H. A. BETHE: Physic. Rev. **54** (1938), 436.
 - ³⁰⁾ E. P. WIGNER: Physic. Rev. **56** (1939), 519.
 - ³¹⁾ D. R. ELLIOTT u. L. D. P. KING: Physic. Rev. **60** (1941), 489.
 - ³²⁾ E. P. WIGNER: Priv. Mitteilung an H. WALKE, Physic. Rev. **57** (1940), 177.
 - ³³⁾ R. PEIERLS: Proc. royal Soc. London A **149** (1935), 467.
-

Zur Theorie der geschlitzten Magnetfeldröhre

von F. Lüdi.

(A.-G. Brown, Boveri Cie. Baden, Schweiz.)

(23. XI. 1942.)

Inhalt: Die Paketierung von Elektronen bildet die physikalische Grundlage der Laufzeitschwingungen.

Die Untersuchung des Elektronenmechanismus in der geschlitzten Magnetfeldröhre zeigt ebenfalls einen Paketierungseffekt durch Phasenfokussierung, womit eine Gleichwertigkeit zum Klystron erwiesen ist.

Einleitung.

Bei den Laufzeitgeneratoren, bekannt unter den Namen Bremsfeldröhre, Magnetron und Klystron ist die Bildung von Elektronenpaketen die Grundbedingung zur Schwingungserzeugung; denn das wesentliche ist die kapazitive Influenzierung einer Wechselspannung durch bewegte Elektronenverdichtungen. Die Bildung der Elektronenverdichtungen wird durch die Bewegungsgesetze der Elektronen bestimmt und ist abhängig vom Generatortyp. Man spricht von Aussortierung der falschphasigen oder von Phasenfokussierung aller Elektronen. In der Bremsfeldröhre und im Null- oder Zweischlitzmagnetron entstehen die Elektronenpakete durch Aussortierung der vom Wechselfeld beschleunigten Elektronen (Amplitudenvergrößerung der pendelnden Elektronen). Die vom Wechselfeld gebremsten Elektronen bleiben im Entladeraum zurück und wirken als Energiespender. Beim Klystrontyp (Verwendung eines Elektronenstrahls) werden die Elektronenpakete durch Beteiligung aller Elektronen mittels Geschwindigkeitsmodulierung und nachfolgendem Einholungseffekt gebildet. Durch Verwendung von Hohlraumresonatoren (grosse Wechselspannungsamplituden) gelingt die Paketierung durch Phasenfokussierung auch bei der Bremsfeldröhre¹).

Noch nicht beantwortet ist die Frage, wie die Elektronenballung bei der geschlitzten Magnetfeldröhre zustande kommt. Dieser Generatortyp wurde im Entwicklungslaboratorium von Brown-Boveri & Cie. unter Verwendung eines speziellen Hohlraumresonators zu einem sehr stabilen Mikrowellengenerator („Turbator“) auch für Wellen unterhalb 10 cm entwickelt. Der Aussteuer-

bereich ist praktisch 100 % bei einer Wellenlängenänderung von wenigen ‰²).

Zweck vorliegender Untersuchung ist eine genaue Analyse des Elektronenmechanismus und der Elektronenballungen. Das wesentliche Resultat ist die Paketierung durch Phasenfokussierung unter dem Einfluss des Wechselfeldes und die Anordnung der Verdichtungen in der bremsenden Phase entsprechend der Forderung für Energieabgabe. Die Analogie zum Klystron geht so weit, dass für den Kompressionsfaktor eine gleiche Formel erhalten wird.

Die Rechnung ist durchgeführt für den ebenen Fall: Elektronen unter gleichzeitiger Wirkung eines elektrischen Gleichfeldes mit überlagertem Wechselfeld und einem Magnetfeld. Die Ansätze werden einer früheren Arbeit entnommen³). Weil die Gleichungen nicht für beliebig grosse Wechselfelder und beliebige Verhältnisse von Segmentbreite zu Anodenabstand $A/2 y_0$ lösbar sind, zerfällt die Rechnung in zwei Abschnitte. In I werden sie gelöst für grosse $A/2 y_0$, aber beliebig starke Wechselfelder; in II kann die Lösung mit einer Störungsrechnung für kleine Wechselfelder, aber beliebigem $A/2 y_0$ gefunden werden.

I entspricht der Erzeugung längerer Wellen (> 20 cm), II der Erzeugung kürzerer Wellen (~ 10 cm und weniger). Hier finden die gebrochenen Ordnungszahlen bei hoher Segmentzahl und kurzer Wellenlänge ihre organische Einordnung in das physikalische Bild der Elektronenpaketierung. Ausserdem tritt in der Struktur der Elektronenverdichtung ein wesentlicher Unterschied gegen I auf. Er ist durch das Verhältnis Resonatorfrequenz zu Rollkreisfrequenz ω_R/ω_0 bedingt. Der kleine Durchgriff des Wechselfeldes in den Anodenraum erklärt den relativ geringen Wirkungsgrad im Vergleich zu I.

In einem Anhang wird von Herrn KÄCH in sehr eleganter Weise das komplizierte System der Störungsgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation gelöst und damit das bedeutend einfachere Mittelwertsverfahren des Verfassers legitimiert.

ABSCHNITT I.

§ 1. Die Bewegungsgleichungen und ihre Lösung für $A/2 y_0 > 1$.

Sie heissen:

$$\ddot{y} = \frac{e}{m} \frac{\partial V}{\partial y} - \omega_0 \dot{x} \quad V = V_0 + V_1 \quad (1)$$

mit

$$\ddot{x} = \frac{e}{m} \frac{\partial V}{\partial x} + \omega_0 \dot{y} \quad \omega_0 = \frac{e H}{m c}$$

Zur Orientierung diene Fig. 1, welche die prinzipiellen Grössen enthält. (Statt der Segmente ist die y -Komponente des Drehfeldes eingezeichnet.):

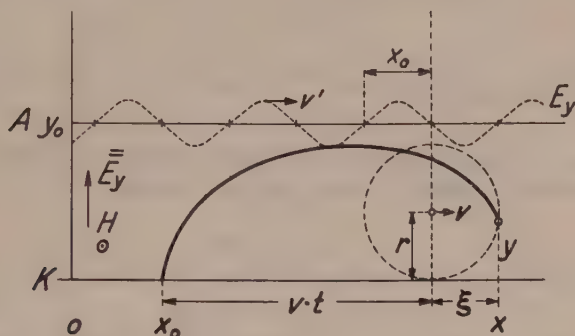


Fig. 1.

Das Wechselfeld zwischen den Segmenten werde in zwei gegenlaufende Drehfelder zerlegt und nur dasjenige in der positiven x -Richtung berücksichtigt. Die physikalische Bedeutung des gegenlaufenden Drehfeldes tritt nur für bestimmte Frequenzen in Erscheinung und wird später an entsprechender Stelle diskutiert. Das Gleichfeld $\frac{\partial V_0}{\partial y}$ zeige von Anode zur Kathode, und das Magnetfeld ist senkrecht zur Zeichenebene zu denken.

Für das Drehfeld gilt:

$$V_1 = s(y) \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \omega t \right)$$

mit

$$s(y) = A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} y \right)$$

Es genügt der Laplace-Gleichung $\Delta V = 0$. Mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} V_1 &= 0 & \text{für } y &= 0 \\ V_1 &= \gamma V_0 & \text{für } y &= y_0 \end{aligned}$$

wird

$$A = \gamma \frac{V_0}{\sin \frac{2\pi}{A} y_0}$$

so dass

$$V_1 = \gamma \frac{V_0}{\sin \frac{2\pi}{A} y_0} \sin \left(\frac{2\pi}{A} y \right) \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{A} x - \omega t \right) \quad (2)$$

und also

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{V_0}{y_0} + \gamma \frac{V_0}{\sin \frac{2\pi}{A} y_0} \cdot \frac{2\pi}{A} \cos \left(\frac{2\pi}{A} y \right) \sin \left(\frac{2\pi}{A} x - \omega t \right) \\ E_x &= \frac{\partial V}{\partial x} = \gamma \frac{V_0}{\sin \frac{2\pi}{A} y_0} \cdot \frac{2\pi}{A} \sin \left(\frac{2\pi}{A} y \right) \cos \left(\frac{2\pi}{A} x - \omega t \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Für $y < y_0 < A$ kann \sin, \cos entwickelt werden, und man erhält in diesem Fall folgende Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{e}{m} \frac{V_0}{y_0} + \gamma \frac{e}{m} \frac{V_0}{y_0} \sin \left(\frac{2\pi}{A} x - \omega t \right) - \omega_0 \dot{x} \\ \ddot{x} &= \gamma \frac{e}{m} \frac{V_0}{y_0} \frac{2\pi}{A} y \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{A} x - \omega t \right) + \omega_0 \dot{y} \end{aligned} \quad (4)$$

Mit einem Translationssystem

$$x = x_0 + vt + \xi \quad (5)$$

wobei

$$v = \frac{e}{m} \frac{V_0}{y_0 \omega_0} = \frac{V_0}{y_0 \cdot H/c} \quad (6)$$

gewählt werde (Wegtransformation des Gleichfeldes) werden die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \gamma \frac{e}{m} \frac{V_0}{y_0} \sin \left[\frac{2\pi}{A} x_0 + \left(\frac{2\pi}{A} v - \omega \right) t + \frac{2\pi}{A} \xi \right] - \omega_0 \dot{\xi} \\ \ddot{\xi} &= \gamma \frac{e}{m} \frac{V_0}{y_0} \frac{2\pi}{A} y \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{A} x_0 + \left(\frac{2\pi}{A} v - \omega \right) t + \frac{2\pi}{A} \xi \right] + \omega_0 \dot{y} \end{aligned} \quad (7)$$

Für verschwindendes Wechselfeld ($\gamma = 0$) sind die Lösungen Kreisbewegungen im ξ -System.

Mit der weiteren Wahl

$$v = \frac{\omega}{2\pi/A} = v' \quad (8)$$

d. h. Synchronismus von Drehfeldgeschwindigkeit v' mit der mittleren Fortschritungsgeschwindigkeit v (v = Geschwindigkeit des Rollkreismittelpunktes) tritt eine weitere Vereinfachung der Gleichungen ein

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \gamma \frac{e}{m} \frac{V_0}{y_0} \sin \left[\frac{2\pi}{A} x_0 + \frac{2\pi}{A} \xi \right] - \omega_0 \dot{\xi} \\ \ddot{\xi} &= \gamma \frac{e}{m} \frac{V_0}{y_0} \frac{2\pi}{A} y \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{A} x_0 + \frac{2\pi}{A} \xi \right] + \omega_0 \dot{y}\end{aligned}\quad (9)$$

Da y und $\xi < A$ sind, können die Gleichungen durch Entwicklung von \sin, \cos nach ξ linearisiert werden.

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \gamma \frac{e}{m} \frac{V_0}{y_0} \sin \frac{2\pi}{A} x_0 + \gamma \frac{e}{m} \frac{V_0}{y_0} \cos \frac{2\pi}{A} x_0 \cdot \frac{2\pi}{A} \xi - \omega_0 \dot{\xi} \\ \ddot{\xi} &= \gamma \frac{e}{m} \frac{V_0}{y_0} \frac{2\pi}{A} y \cdot \cos \frac{2\pi}{A} x_0 + \omega_0 \dot{y}\end{aligned}\quad (10)$$

Die nochmalige Transformation

$$\xi = \varphi + K \quad (11)$$

homogenisiert das System bei Wahl der Konstanten

$$K = -\frac{A}{2\pi} \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{A} x_0 \right) \quad (12)$$

so dass das homogene lineare Gleichungssystem in ζ und y erhalten wird:

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \kappa \zeta - \omega_0 \dot{\zeta} \\ \ddot{\zeta} &= \kappa y + \omega_0 \dot{y}\end{aligned} \quad \kappa = \gamma \frac{e}{m} \frac{V_0}{y_0} \cdot \frac{2\pi}{A} \cos \frac{2\pi}{A} x_0 \quad (13)$$

Die Lösung der Gleichungen erfolgt mit den Ansätzen:

$$y = Y e^{\varrho t} \quad \zeta = Z e^{\varrho t}$$

Die Wurzeln ϱ der charakteristischen Gleichung werden:

$$\begin{aligned}\varrho_1 = -\varrho_2 &= \omega_0 \beta & \alpha &= + \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4\kappa^2}{\omega_0^4}}}{2}} \approx \frac{\kappa}{\omega_0^2} \\ \varrho_3 = -\varrho_4 &= j\omega_0 \alpha & \beta &= \sqrt{\frac{1 + \sqrt{4 \frac{\kappa^2}{\omega_0^4}}}{2}} \approx 1\end{aligned}$$

Um die weitere Rechnung zu vereinfachen, wird hier die Voraussetzung beliebig grosser Wechselfelder fallen gelassen und die Rech-

nung für kleine Wechselfelder weitergeführt. Damit wird übrigens kein Verstoss gegen die physikalische Realität gemacht.

Es folgt weiter

$$\frac{Y}{Z} = \frac{\varrho^2}{\kappa^2 + \omega_0 \varrho} \quad \text{d. h. } Y = A \varrho^2, \quad Z = A (\kappa + \omega_0 \varrho)$$

Die Konstanten $A_1 A_2 A_3 A_4$ entsprechen den Wurzeln $\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \varrho_4$ und sind aus den vier Anfangsbedingungen zu bestimmen:

für $t = 0 : y = 0 \quad \dot{y} = 0 \quad \xi = -K \quad \dot{\xi} = -v$

oder:

$$y = 0 \quad \dot{y} = 0 \quad \xi = 0 \quad \dot{\xi} = -v$$

und bedeuten, dass der Start des Elektrons im Ruhssystem an der Stelle x_0 ($\xi = 0$) mit der Geschwindigkeit 0 erfolgt.

Die etwas langwierige Rechnung sei weggelassen; als Lösung ergibt sich schliesslich im Ruhssystem (x, y)

$$\begin{aligned} y &= -K \frac{\kappa}{\omega_0^2} \operatorname{Erf} \left[\frac{\kappa}{\omega_0} t + \frac{v}{\omega_0} e^{-\frac{\kappa}{\omega_0} t} + \frac{K \cdot \kappa}{\omega_0^2} \cos \omega_0 t - \frac{v}{\omega_0} \cos \omega_0 t \right] \\ x &= K \left(1 - e^{-\frac{\kappa}{\omega_0} t} \right) + vt + x_0 + \frac{K \kappa}{\omega_0^2} \sin \omega_0 t - \frac{v}{\omega_0} \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (14)$$

§ 2. Diskussion der Lösungen.

Die Kontrolle ergibt leicht, dass bis auf Glieder höherer Ordnung die Anfangsbedingungen

$$x = x_0 \quad y = 0 \quad \dot{x} = 0 \quad \dot{y} = 0$$

für $t = 0$ erfüllt sind.

Aus der Lösung ist ersichtlich, dass für verschwindendes Wechselfeld ($\kappa = 0$) eine gewöhnliche Zykloidenbewegung erfolgt. Das Wechselfeld erzeugt eine weitere kleine periodische Bewegung und was wesentlich ist: eine nicht periodische, monoton zunehmende Bewegung.

Weil das erste Glied in y klein gegen das zweite ist, gilt für den unperiodischen Teil im x -System:

$$\begin{aligned} y &= \frac{v}{\omega_0} e^{-\frac{\kappa}{\omega_0} t} \\ x &= K \left(1 - e^{-\frac{\kappa}{\omega_0} t} \right) + vt + x_0 \end{aligned} \quad (15)$$

Aus Gleichung (3) ist ersichtlich, dass $x = x_0$ für $t = 0$ der Abstand des Startpunktes vom Nulldurchgang der y -Komponente des Drehfeldes ist.

Der Effekt, welcher sich aus verschiedenen räumlichen Startphasen ergibt, kommt in der mehr anschaulichen Fig. 2 zur Geltung.

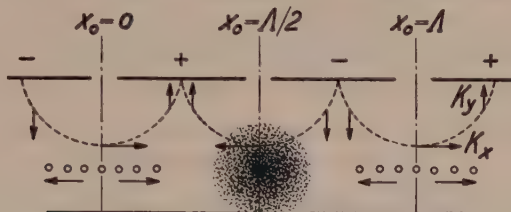


Fig. 2.

(Beispiel: Für $x_0 > \Lambda/4$ ist $K > 0$, $\kappa < 0$, d. h. im mitbewegten Bezugssystem schreiten diese Elektronen nach rechts.) Die Betrachtung der verschiedenen K und κ für verschiedene Startphasen ergibt das Bild einer Elektronenballung im mitbewegten Bezugssystem an der Stelle, wo das Drehfeld eine bremsende Komponente hat (die kleinen Kreise sind die Rollkreismittelpunkte). Die Stellen, wo die Elektronen Energie aus dem Drehfeld aufnehmen würden, werden entvölkert. Diese mit der Geschwindigkeit v bewegten Verdichtungen sind es, welche die Wechselspannung induzieren und welche rückwirkend den Elektronen die Energie entzieht. An den Häufungsstellen ist $\kappa < 0$, $K = 0$ (Gl. (12), (13)), so dass nur eine positive y -Bewegung der Elektronen erfolgt. Eine Schrägstellung des Magnetfeldes ist also in diesem Fall wie bekannt nicht erforderlich, um die Elektronen auf die Anode laufen zu lassen.

Wir bemerken an dieser Stelle, dass die Bedingung für Synchronismus Gleichung (8) nichts anderes als die Posthumusformel für die Frequenz darstellt. Man setze für v den Wert aus Gleichung (6) ein. Für Λ gilt im zylindrischen Fall

$$p \Lambda = 2 \pi \frac{r_a}{2}$$

(p Polpaare, r_a Anodenradius, $2 \pi \frac{r_a}{2}$ ist der Weg des Rollkreismittelpunktes um die Kathode). Wird noch $y_0 = r_a$ gesetzt, so folgt die bekannte Gleichung

$$\omega = \frac{2 p V_0}{r_a^2 \cdot H/c}$$

oder für die Wellenlänge λ in praktischen Einheiten

$$\lambda = 942 \frac{r_a^2 H}{p \cdot V_0} \quad (6a)$$

Die Posthumusformel bedeutet nach dieser Darstellung Synchronismus von Drehfeld und Rollkreismittelpunktsbewegung, die Bedingung, welche für die Phasenfokussierung erforderlich ist. Wir werden in Abschnitt II sehen, wie diese Bedingung und damit die Posthumusformel für kleine Wellenlängen zu erweitern ist.

§ 3. Der Kompressionsfaktor.

Nach der mehr anschaulichen Diskussion werde die Phasenfokussierung rechnerisch verfolgt. Sie ist bestimmt durch die zeitliche Veränderung von

$$\Delta x_0 = x_0^* - x_0$$

wobei x_0^* und x_0 zwei räumlich auseinanderliegende Startpunkte bedeuten.

Nach Gleichung (15) gilt dann für die Differenz der x -Koordinaten zur Zeit t :

$$x^* - x = \Delta x_0 - K \left(e^{\frac{\kappa^*}{\omega_0} t} - e^{\frac{\kappa}{\omega_0} t} \right) \quad (16)$$

Hierbei ist für die beiden Startphasen derselbe K -Wert gesetzt, während κ^* und κ den verschiedenen x_0 -Werten entsprechen. Sie seien über die betrachtete Zeit konstant, d. h. es werden nur benachbarte Elektronen über kürzere Laufwege betrachtet. Entwickelt man

$$\kappa^* = \kappa(x_0 + \Delta x_0)$$

nach Δx_0 , setzt den Wert in die Klammer (15) ein und entwickelt die e -Funktionen nach kleinen Grössen, so folgt mit dem Wert von K

$$x^* - x = \Delta x_0 \left(1 + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\Lambda} x_0 \frac{1}{\omega_0} \frac{d\kappa}{dx_0} \cdot t \right)$$

Die Kompression der Elektronendichte wird damit unter Berücksichtigung des Wertes für κ und der Setzung $t = l/v$, wobei l der Laufweg ist, den das Elektron in der Zeit t bei der mittleren Geschwindigkeit v zurücklegt:

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{\Delta x_0}{\Delta x} = 1 + \frac{\gamma}{\omega_0} \frac{e}{m} \frac{V_0}{y_0} \frac{2\pi}{\Lambda} \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{\Lambda} x_0}{\cos \frac{2\pi}{\Lambda} x_0} \frac{l}{v}$$

oder wenn $\tilde{q} = q - q_0$ der reine Wechselanteil bedeutet und die Werte:

$$\frac{2\pi}{A} = \frac{\omega}{v} \quad \omega_0 = \frac{e}{m} \frac{H}{c} \quad v = \frac{V_0}{y_0 H/c}$$

benützt werden:

$$\tilde{q} = q_0 \gamma \omega \frac{l}{v} \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{A} x_0}{\cos \frac{2\pi}{A} x_0}$$

Dies ist die Kompression der an verschiedenen Stellen zur selben Zeit startenden Elektronen.

Wir müssen noch die an derselben Stelle zu verschiedenen Zeiten startenden Elektronen betrachten. Nach der Form des Drehfeldes

$$\sin \left(\frac{2\pi}{A} x - \omega t \right)$$

kann

$$\frac{2\pi}{A} x_0 = \omega t_s$$

gesetzt werden, wobei

$$t_s = t - \frac{l}{v}$$

die Startzeit ist. Damit wird

$$\tilde{I} = I_0 \gamma \omega \frac{l}{v} \frac{\sin^2 \omega \left(t - \frac{l}{v} \right)}{\cos \omega \left(t - \frac{l}{v} \right)} \quad (17)$$

wenn statt der Ladungsdichte die Stromdichte $\tilde{I} = \tilde{q} \cdot v$ gesetzt ist.

Dieser Ausdruck entspricht nun dem entsprechenden bekannten Ausdruck für das Klystron, wobei der Kompressionsfaktor

$$\gamma \omega \frac{l}{v}$$

genau derselbe ist (γ das Verhältnis von Wechselspannung zu Beschleunigungsspannung). Für v geht hier entsprechend der Wirkung von gekreuzten Feldern die Geschwindigkeit des Rollkreismittelpunktes ein.

Als wesentlicher Unterschied zum Klystron ist festzustellen, dass der Laufraum l nicht begrenzt ist (zirkuläre Elektronenströmung) und dementsprechend keine endliche Anschwingbedingung wie dort aufgestellt werden kann. Tatsächlich wurden bei genauer Konstruktion Anschwingströme unterhalb 1 mA beobachtet!

§ 4. Der Wirkungsgrad.

Wir behaupten, dass der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{y_0 - 2r}{y_0}$$

ist, wobei y_0 der Abstand Anode/Kathode und $2r$ der Rollkreisdurchmesser ist. Dazu muss bewiesen werden, dass die kinetische Energie der Elektronen beim Anlaufen gegen die Anode nicht zunimmt und den Maximalwert entsprechend der Zykloidenhöhe beibehält. Für die Häufungsstellen ($K = 0$, $\kappa < 0$, maximale y -Bewegung) ist

$$y = \frac{v}{\omega_0} e^{-\frac{\kappa}{\omega_0} t} - \frac{v}{\omega_0} \cos \omega_0 t$$

$$x = vt - \frac{v}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Die kinetische Energie im Scheitel der Zykloide

$$\left(\sin \omega_0 t = 0 \quad \cos \omega_0 t = 1 \quad t = n \frac{2\pi}{\omega_0} \right)$$

ist

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} (\dot{y}^2 + \dot{x}^2) = \frac{m}{2} \frac{V_0^2}{y_0^2 H^2 / c^2} \frac{\kappa^2}{\omega_0^4} e^{-\kappa \cdot 2n\pi}$$

und die potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = \frac{e V_0}{y_0} y = m \frac{V_0^2}{y_0^2 H^2 / c^2} [e^{-\kappa \cdot 2n\pi} - 1]$$

wobei wieder für v und ω_0 die Werte nach Gl. 6 und 1 eingesetzt sind. Es wird also für grosse Zeiten (grosses n)

$$\frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{pot}}} = \frac{\frac{\kappa^2}{\omega_0^4} e^{-\kappa \cdot 2n\pi}}{2 [e^{-\kappa \cdot 2n\pi} - 1]} \approx \frac{\kappa^2}{2 \omega_0^4}$$

Da κ eine kleine Grösse ist, so ist obige Behauptung bewiesen; d. h. die potentielle Energie von Zykloidenhöhe bis Anode wird in Schwingenergie umgewandelt.

ABSCHNITT II.

§ 5. Die Lösung der Bewegungsgleichungen für kleine Wechselfspannungen aber beliebige Λ/y_0 .

Hier ist die Entwicklung von \sin , \cos nach y nicht mehr erlaubt und für E_x , E_y sind die vollständigen Ausdrücke (Gl. (3))

zu nehmen. Bei Wahl derselben Transformation wie in I, Gleichungen (5), (8) resultiert für die Bewegungsgleichungen im mitbewegten Bezugssystem

$$\begin{aligned}\ddot{y} + \omega_0 \dot{\xi} &= \gamma' \mathfrak{Cof} \left(\frac{2\pi}{A} y \right) \cdot \sin \frac{2\pi}{A} (x_0 + \xi) \\ \ddot{\xi} - \omega_0 \dot{y} &= \gamma' \mathfrak{Sin} \left(\frac{2\pi}{A} y \right) \cdot \cos \frac{2\pi}{A} (x_0 + \xi)\end{aligned}\quad (18)$$

mit

$$\gamma' = \gamma \frac{e}{m} \frac{V_0 2\pi/A}{\mathfrak{Sin} \frac{2\pi}{A} y_0}$$

Auch die Entwicklung nach ξ ist hier nicht erlaubt, wie aus Fig. 1 für kleine Segmentbreite ersichtlich ist. Hingegen führt für kleine Wechselfelder ($\gamma < 1$) eine Störungsrechnung zum Ziel. Wir setzen:

$$\begin{aligned}y &= y_1 + y_2 \\ \xi &= \xi_1 + \xi_2\end{aligned}$$

wo y_2, ξ_2 die Störungsglieder hervorgerufen durch das Drehfeld sind und y_1, ξ_1 Lösungen der ungestörten Bewegung darstellen (rechte Seite = 0 in (18))

$$\begin{aligned}y_1 &= r(1 - \cos \omega_0 t) \\ \xi_1 &= -r \sin \omega_0 t\end{aligned}$$

Sie genügen den Anfangsbedingungen $\left(r = \frac{v}{\omega_0} \right)$

$$y_1 = \xi_1 = 0 \quad \dot{y}_1 = 0 \quad \dot{\xi}_1 = -v \quad \text{für } t = 0$$

Die Störungsgleichungen lauten bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_2 + \omega_0 \dot{\xi}_2 &= \gamma' \mathfrak{Cof} \left[\frac{2\pi}{A} r(1 - \cos \omega_0 t) \right] \cdot \sin \frac{2\pi}{A} (x_0 - r \sin \omega_0 t) \\ \ddot{\xi}_2 - \omega_0 \dot{y}_2 &= \gamma' \mathfrak{Sin} \left[\frac{2\pi}{A} r(1 - \cos \omega_0 t) \right] \cos \frac{2\pi}{A} (x_0 - r \sin \omega_0 t)\end{aligned}\quad (19)$$

Auf der rechten Seite sind für y und ξ die ungestörten Werte eingesetzt.

Die Lösung dieses Systems ist nicht einfach und gelingt nur mit besonderen mathematischen Methoden (siehe Anhang). Um das Physikalische hervortreten zu lassen, beschreiten wir einen andern Weg. Die rechte Seite ist die Störkraft auf die Bahnkurve

im mitbewegten System als Funktion der Zeit. Weil das Drehfeld bei Synchronismus im mitbewegten System zeitlich konstant ist und nur eine räumliche sin- resp. cos-Funktion darstellt, so ist zeitliche Mittelwertbildung der Störkraft gleichbedeutend mit räumlicher Mittelwertbildung. Das Drehfeld kann also im ξ -System durch ein räumlich konstantes Gleichfeld ersetzt werden, dessen Richtung und Grösse nur von der relativen Lage des Rollkreises, d. h. vom Startpunkt x_0 für $t = 0$ abhängt. Die Bewegungsgleichungen für die Störungswerte heissen dann

$$\begin{aligned}\ddot{y}_2 + \omega_0 \dot{\xi}_2 &= \overline{K_y} \\ \dot{\xi}_2 - \omega_0 \dot{y}_2 &= \overline{K_x}\end{aligned}$$

wobei jetzt \ddot{y}_2 und $\ddot{\xi}_2$ nicht mehr die ursprünglichen Beschleunigungen, sondern als mittlere Beschleunigungen aufzufassen sind, denen das Elektron im gemittelten Kraftfeld unterworfen ist. Der feinere periodische Charakter geht hierbei verloren, aber für die Phasenfokussierung interessiert nur die mittlere Bewegungsrichtung über viele Perioden.

Werden $\mathfrak{S}\sin$ und $\mathfrak{C}\cos$ durch die Exponentialfunktionen ausgedrückt und sin resp. cos nach den trigonometrischen Additionstheoremen zerlegt, so treten Integrale von der Form

$$\gamma' \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{A} x_0\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{A} x_0\right)} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{\pm \frac{2\pi}{A} r(1 - \cos \omega_0 t)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{A} r \sin \omega_0 t\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{A} r \sin \omega_0 t\right)} dt$$

auf; dieselben sind noch für vertauschte sin, cos vor dem Integralzeichen zu nehmen. Das Integral mit der (ungeraden) sin-Funktion ergibt den Wert null, dasjenige mit cos den Wert

$$T_0 \cdot e^{\pm \frac{2\pi}{A} r *})$$

Man erhält somit für die gemittelten rechten Seiten von (19):

$$\begin{aligned}\overline{K_y} &= \gamma \frac{2\pi}{A} \frac{e}{m} \frac{V_0}{\mathfrak{S}\sin \frac{2\pi}{A} y_0} \mathfrak{C}\cos \frac{2\pi}{A} r \cdot \sin \frac{2\pi}{A} x_0 \\ \overline{K_x} &= \gamma \frac{2\pi}{A} \frac{e}{m} \frac{V_0}{\mathfrak{S}\sin \frac{2\pi}{A} y_0} \mathfrak{S}\sin \frac{2\pi}{A} r \cdot \cos \frac{2\pi}{A} x_0\end{aligned}$$

*) Die Lösung der Integrale verdanke ich ebenfalls Herrn KÄCH: Man schreibe sin, cos in Exponentialform und entwickle die entstehenden e-Funktionen. Die gliedweise Integration über eine Periode T_0 gibt bis auf das erste Glied überall die Werte null.

Für $y_0 > r > A$ (hohe Segmentzahl) können \sin , \cos durch einfache Exponentialfunktionen ersetzt werden, so dass für die gemittelten Störkräfte folgt:

$$\begin{aligned}\bar{K}_y &= \gamma'' e^{-\frac{r\pi}{A}(y_0-r)} \cdot \sin \frac{2\pi}{A} x_0 \\ \bar{K}_x &= \gamma'' e^{-\frac{2\pi}{A}(y_0-r)} \cdot \cos \frac{2\pi}{A} x_0\end{aligned} \quad \gamma'' = \gamma \frac{2\pi}{A} \frac{e}{m} V_0$$

Die Bewegungsgleichungen mit den zeitlich konstanten Störkräften bilden ein einfaches, inhomogenes Gleichungssystem. Die Lösungen lauten:

$$\begin{aligned}\xi_2 &= \frac{\bar{K}_x}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t) - \frac{\bar{K}_y}{\omega_0^2} \sin \omega_0 t + \frac{\bar{K}_y}{\omega_0} t \\ y_2 &= \frac{\bar{K}_y}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t) + \frac{\bar{K}_x}{\omega_0^2} \sin \omega_0 t - \frac{\bar{K}_x}{\omega_0} t\end{aligned}$$

Sie genügen den Anfangsbedingungen

$$\xi_2 = 0 \quad \dot{\xi}_2 = 0 \quad \text{für } t = 0$$

Die letzten Glieder sind die interessanten, welche eine zeitlich fortschreitende Bewegung liefern, deren Richtungssinn von der Startphase x_0 in \bar{K}_y , \bar{K}_x abhängt (z. B. für $\sin \frac{2\pi}{A} x_0 = 0$ eine Bewegung nur in der $+y$ -Richtung, also immer senkrecht zum elektrischen Feld). In \bar{K}_y erkennt man die fokussierende Kraft: alle Elektronen, die zur Zeit $t = 0$ zwischen $0 \leq x_0 \leq A/2$ starten, bewegen sich in der positiven x -Richtung und häufen sich an der Stelle $x_0 = A/2$ bzw. $3/2 A$, $5/2 A$ usw. Dort erfahren sie eine Bewegung in der $+y$ -Richtung auf die Anode, also genau dasselbe Bild wie in I.

Man erkennt hier, wie der Wirkungsgrad, für den der gleiche Ausdruck wie in I gilt, mit abnehmendem Verhältnis A/y_0 kleiner

wird. Die fokussierenden Kräfte nehmen ab wie $e^{-\frac{2\pi}{A}(y_0-r)}$. Der Rollkreisradius r darf gegen y_0 nicht zu klein werden, d. h. die Elektronen müssen in der Nähe der Segmente vorbeikreisen.

In Fig. 3 ist für ein maßstäbliches Modell der Potentialverlauf zwischen den Segmenten im Elektrolyttrog aufgenommen (0 Messpunkte*). Darüberliegend sind die daraus ermittelten Punkte des

*) Die Messungen wurden von Herrn MILZ in unserem Labor ausgeführt.

radialen Potentialverlaufs in Richtung Segmentmitte eingezeichnet. Der nach Gleichung (2) berechnete Potentialverlauf für $t = 0$; $x = 1/4$ deckt sich gut mit dem experimentellen, so dass die theoretischen Voraussetzungen (ebener Fall) weitgehend gerechtfertigt sind.

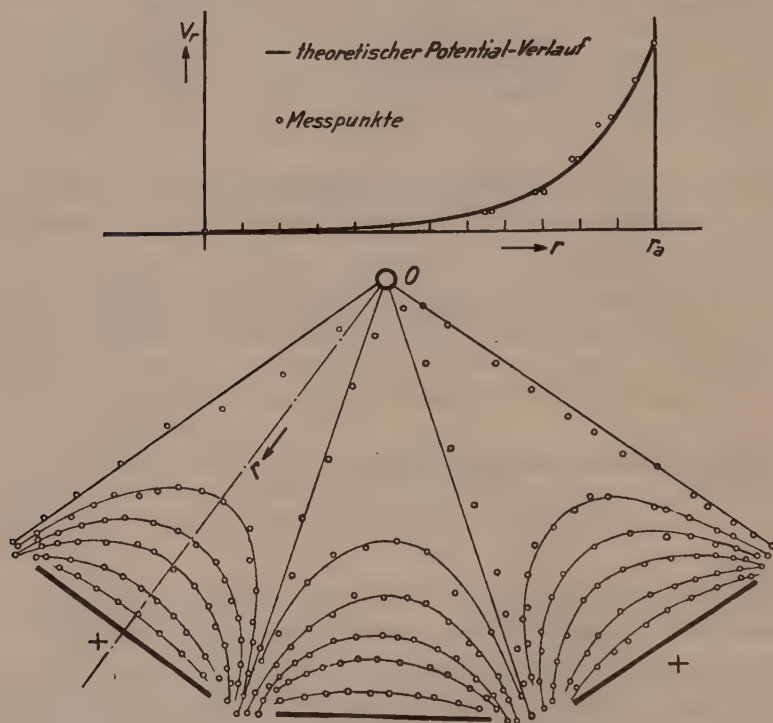


Fig. 3.

Niveaulinien gemessen im Elektrolyttrog.

Aus dem radialen Potentialverlauf lässt sich der Wirkungsgrad abschätzen. Durch einfache Differentiation erhält man daraus die fokussierende, radiale Feldkomponente, deren Radialverlauf mit dem Potentialverlauf (aber um $1/4$ verdreht) übereinstimmt. Der Halbwert des Feldes ergibt dann ungefähr ein Mass für den Wirkungsgrad; denn so weit müssen die Elektronen auf den Rollkreisbahnen in die Randzone eintauchen, um von der fokussierenden Kraft erfasst zu werden. Diese Stelle ist im untersuchten Modell bei ca. 85% des Anodenradius, so dass nach § 4 15% Wirkungsgrad resultieren würde. Optimale Messungen ergaben bei diesem Konstruktionstyp 12—14% bei ca. 12 Watt Hochfrequenzenergie und 20 cm Wellenlänge.

§ 6. Die Feinstruktur der Elektronenverdichtungen.

Um diese zu erfassen, muss die Betrachtung auf verschiedene Zeitphasen am selben Startpunkt erweitert werden. Man setze statt der bisherigen Transformation

$$x = x_0 + vt' + \xi = x_0 + v(t - \tau) + \xi$$

Dies ändert an den Gleichungen nur insofern etwas, als in den Kräften \bar{K}_y, \bar{K}_x an Stelle x_0 die Startphase

$$x_0 - v\tau$$

auftritt. Die Rollkreisbewegung 0-ter Näherung im mitbewegten Bezugssystem wird durch

$$y_1 = r (1 - \cos \omega_0(t - \tau))$$

$$\xi_1 = -r \sin \omega_0(t - \tau)$$

dargestellt, d. h. die Anfangsbedingungen sind jetzt für $t = \tau$ erfüllt. Es gilt also

$$\bar{K}_y(x_0, \tau) = \bar{K}_y(x_0 - v\tau, 0)$$

Die sich ergebenden Verhältnisse sind in Fig. 4 wiedergegeben, in welcher Rollkreise verschiedener Raumphasen und Zeitphasen eingezeichnet sind. Zum leichteren Verständnis hat man sich vorzustellen, dass sich das Drehfeld über die Raumphase x_0 hinweg-

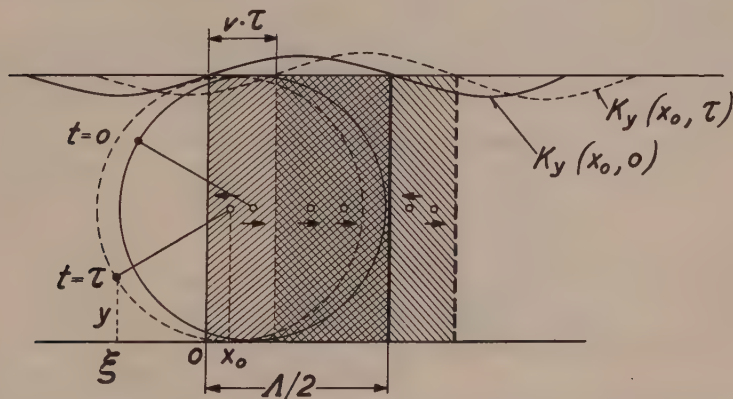


Fig. 4.

schiebt bis zur Zeitphase τ und dann das startende Elektron mitnimmt. Daraus können die Häufungsstellen im ξ -System abgelesen werden.

Die Rollkreismittelpunkte bewegen sich im ξ -System nicht über den $\Lambda/2$ -Bereich hinaus; deshalb genügt es, einen solchen für zwei verschiedene Zeitphasen $0, \tau$ zu betrachten. Es gilt dann

$$\Lambda/2 - x_0 \leq \Lambda/2$$

d. h. die Elektronen, die gleichzeitig ($t = 0$) an verschiedenen Raumphasen x_0 starten und dieser Bedingung genügen, häufen sich an derselben Stelle $x_0 = \Lambda/2$ (dicker, ausgezogener Strich). Für die Elektronen zu verschiedenen Zeitphasen $t = \tau$ gilt bei Ersetzen von x_0 durch $x_0 - v\tau$

$$\Lambda/2 - x_0 \leq \Lambda/2 - v\tau$$

Diese Gleichung gilt für beliebige Raum- und Zeitphasen.

$$v\tau_{\max} = \Lambda/2$$

ist die obere Grenze für die Startzeit bei gleichsinniger Bewegungsrichtung; für noch spätere Zeiten kehrt sich die Bewegungsrichtung um. Mit $v = \frac{\omega \Lambda}{2\pi}$ wird

$$\tau_{\max} = \pi/\omega = T/2$$

und ferner ist

$$\frac{\tau_{\max}}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\omega}$$

der Bruchteil aller über einer Periode T_0 des Rollkreises startenden Elektronen, die sich in derselben Richtung häufen.

In der Fig. 5 ist die Struktur der Elektronenverdichtungen im ξ -System gezeichnet, die sich bei Berücksichtigung der verschiede-

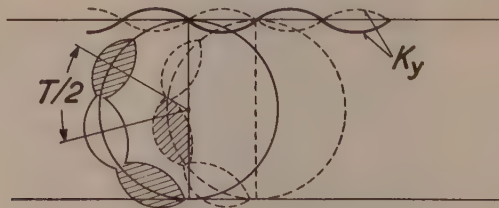


Fig. 5.

nen Vorgänge einstellt, und zwar vornehmlich für kleine Segmentbreite und $\omega > \omega_0$, d. h. für Wellenlängen, die kleiner als 0-ter Ordnung sind.

Der Umstand $\omega > \omega_0$ verursacht die Feinstruktur der Elektronenverdichtungen. In I ist $\omega < \omega_0$, und dementsprechend tritt

diese Feinstruktur nicht auf, sondern nur eine gleichmässige Elektronenverdichtung über grössere Raumgebiete.

Man erkennt ferner, dass für $\omega_0 = 2 \omega$, d. h. $\tau_{\max} = T/2 = T_0$ eine einseitige Elektronenhäufung auf dem Rollkreis eintritt. Diese Beziehung zwischen ω_0 und ω entspricht bekannterweise grösstem Wirkungsgrad, weil dann die Frequenz des Rollkreises und die des gegenlaufenden Drehfeldes gleich sind und ein weiterer Energieaustausch hinzutritt. Die Analyse hat also ergeben, dass sowohl für das mitlaufende wie für das gegenlaufende Drehfeld die Raumladeverdichtungen in solcher Weise entstehen, dass die Energiebilanz für das Wechselfeld positiv wird. Für möglichst hohen Wirkungsgrad ist auch bei kürzeren Wellen die Verwendung von grossen Magnetfeldern wünschenswert.

§ 7. Die Erweiterung der Posthumusformel (gebrochene Ordnungszahlen)

Bis jetzt wurde stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass die Synchronisierung von Rollkreisbewegung und Drehfeld durch entsprechende Einstellung der Betriebsdaten nach (6) möglich ist. Dies ist aber für die kurzen Wellen nicht der Fall. Eine Schwingungserregung tritt bei viel kleineren Spannungen und schwächeren Magnetfeldern ein. Nach Gleichung (6) (6a) wären einige Male grössere Felder erforderlich.

Die Erklärung dieser Tatsache liegt in folgendem: Der relativ kleine Durchgriff des Wechselfeldes in den Anodenraum gestattet das Abweichen vom Synchronismus. Erforderlich ist, dass die Elektronen in der Randzone gleichsinnige Impulserteilung erfahren. Das Drehfeld kann also im mitbewegten Bezugssystem noch eine Geschwindigkeit $(v' - v)$ haben. Die für diesen Fall erweiterten ungemittelten Störkräfte lauten dann:

$$\frac{K_y}{K_x} = \gamma' \frac{\cos}{\sin} \left[\frac{2\pi}{\lambda} r (1 - \cos \omega_0 t) \right] \frac{\sin}{\cos} \omega \left[\frac{x_0}{v'} - \frac{r}{v'} \sin \omega_0 t - \left(1 - \frac{v}{v'} \right) t \right]$$

wo v die Geschwindigkeit des Rollkreismittelpunktes und v' die Geschwindigkeit des Drehfeldes ist.

Die Bedingung für gleichsinnige Impulse in der Randzone der Segmente lautet

$$\omega \left(1 - \frac{v}{v'} \right) m T_0 = 2 n \pi \quad \begin{array}{l} m = 1, 2, 3 \dots \\ n = 0, 1, 2 \dots \end{array}$$

d. h. auf m Rollkreisperioden müssen n Schwingungsperioden des Resonators entfallen. Mit

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

ist

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v}{v'}}$$

Diese Betrachtung gilt so lange, als das Drehfeld im ξ -System keinen zu grossen Schlupf hat, so dass es während des Elektronendurchganges in der Randzone als zeitlich konstant aufgefasst werden kann. Setzt man für

$$v = \frac{V_0}{y_0 H/c}$$

und für

$$v' = \frac{\omega}{2\pi/\Lambda} = \frac{\omega}{2p/r_a}$$

($\pi r_a = p\Lambda$ gleich mittlerer Umfang für den Rollkreismittelpunkt im zylindrischen Fall, p Anzahl der Segmentpaare) so wird:

$$\omega = \frac{n}{m} \omega_0 + \frac{2pV_0}{r_a^2 \cdot H/c} \quad (20)$$

Diese Gleichung ist als erweiterte Posthumusformel zu bezeichnen. Sie geht für $n = 0$ (Synchronismus) in diese über. Die gebrochenen Ordnungszahlen wurden zuerst von W. ENGBERT und K. FRITZ⁴⁾ auf Grund unmittelbar anschaulicher Überlegungen eingeführt. Sie erscheinen hier in etwas anderem Zusammenhang, wobei jedoch ihre Bedeutung grundsätzlich dieselbe ist. Allerdings haben ganze Ordnungszahlen nach der vorliegenden Darstellung nur im Fall $n = 2$, wie in § 6 ausgeführt, eine physikalische Bedeutung (Ausnützung der Rollkreisenergie im gegenlaufenden Drehfeld). Für längere Wellen ist bei Synchronismus $n = 0$, und eine Messung der Rollkreisfrequenz in Eigenfrequenzen des Resonators bleibt willkürlich.

Die Gleichung (20) werde noch in Wellenlängen ausgedrückt:

$$\lambda_R = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda}{\frac{n}{m} \lambda + \lambda_0}$$

wobei λ_R die erregte Eigenwelle des Resonators

$\lambda_0 = \frac{10700}{H}$ die Wellenlänge der Rollkreisschwingung

und $\lambda = 942 \frac{r_a^2 H}{p V^0}$ die Wellenlänge nach Posthumus bedeutet.

Diese Wellenlängen sind eindeutig bestimmbare Grössen; zur Kontrolle werde nach n/m aufgelöst und die Ganzzahligkeit nachgeprüft.

Die folgende Tabelle gibt eine Zusammenstellung für verschiedene Beispiele, wobei die Segmentzahlen von 4—16, der Anodenradius von 4—13 mm variiert und Anodenspannung sowie Magnetfeld von 650—2000 Volt bzw. von 350—1300 Gauss variieren. λ_R ist jeweils die gemessene erregte Eigenwelle des Resonators.

λ_R	λ_0	λ	$\frac{n}{m} = \frac{\lambda_0}{\lambda} \frac{\lambda - \lambda_R}{\lambda_R}$
10	30	15,8	1,1 \approx 1/1
20	18	40	18/40 \approx 1/2
12	13	38	0,68 \approx 2/3
10	9	30	20/30 \approx 2/3
8,6	19	15,4	0,98 \approx 1/1
16	21,5	16,5	0/1
10	21,5	13	0,5 \approx 1/2
12,3	16,4	24	0,65 \approx 2/3
20	8,5	20	0/1
9,3	15	22	1,9 \approx 2/1
9,3	15	22	0,92 \approx 1/1

Man erkennt, dass die Übereinstimmung von Experiment und Theorie ohne besondere Korrekturen (wie abgeänderter Anodenradius für grössere virtuelle Kathoden) relativ gut ist.

Damit findet auch die Bemerkung von GUTTON und BERLIN⁵⁾, es könne sich bei den kurzen Wellen der hochgeteilten Magnetfeldröhre nicht um Laufzeitschwingungen handeln, weil die gemessenen Wellenlängen nicht der Posthumusformel genügen, ihre Erklärung.

Zu bemerken ist noch, dass nach Gleichung (20) dieselbe Frequenz ω beim gleichen Resonator für verschiedene diskrete Spannungen und Magnetfelder bei verschiedenen ganzzahligen Verhältnissen n/m auftreten sollte. Dies wurde auch experimentell bei mehreren Röhren verifiziert; z. B. wurden bei 750, 1250 und 2000 Volt mit entsprechenden Magnetfeldern ausgesprochene Schwingungsoptima festgestellt.

Zum Schluss noch eine vergleichende Bemerkung. Der optimale Wirkungsgrad von 58% wird beim Klystron für Wellenlängen unter 10 cm nur schwer zu erreichen sein; denn die hohen Frequenzen verlangen kleine Durchtrittszeiten der Elektronen durch

den Auskoppler (gleich einer halben Schwingungsdauer), was nur mit grossen Strahlgeschwindigkeiten und kleinen Auskopplerdicken möglich ist⁶⁾. Damit die Energieabgabe beim einmaligen Durchgang der Elektronen vollständig ist, müssen Wechselspannungen von derselben Grösse wie die Gleichspannung entstehen, was grösste Gütefaktoren der verwendeten Resonatoren voraussetzt. Bei der Magnetfeldröhre spielt der Gütefaktor nicht diese Rolle, da ja die Elektronen in beliebig vielen Stufen ihre Energie abgeben

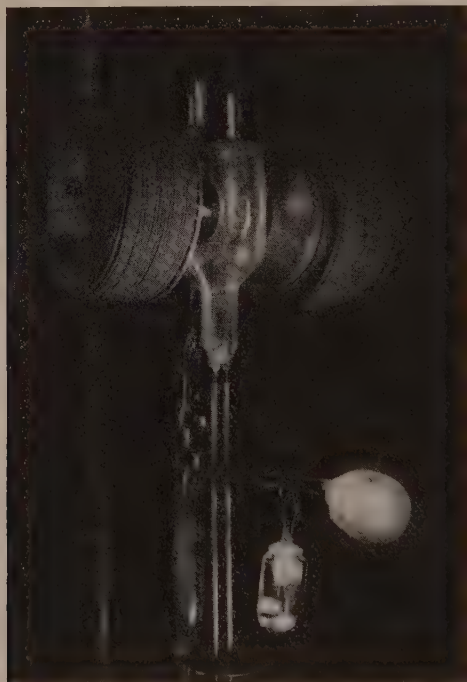


Photo: Turbator auf dem Pumpstand vor dem Abschmelzen. Ca. 10 Watt Hochfrequenzleistung.

können. Der Synchronismus wird automatisch aufrechterhalten, weil sich die Elektronenballungen an den Stellen anhäufen, wo das Gleichfeld plus die y -Komponente des Drehfeldes gerade die richtige Rollkreisgeschwindigkeit ergeben.

Endlich danke ich den Herren W. FREY, O. LARDELLI und KÄCH in unserer Firma für ihre Unterstützung bei der Diskussion des Grundsätzlichen und der mathematischen Lösung aufs beste.

Anhang.

Zur Lösung der im Abschnitt II aufgeführten simultanen Störungsgleichungen (19) gehen wir aus von der vereinfachten Darstellung:

$$\ddot{y}_2 + \omega_0 \xi_2 = \gamma' \varphi(t) \quad (1)$$

$$\ddot{\xi}_2 - \omega_0 \dot{y}_2 = \gamma' \psi(t) \quad (2)$$

worin

$$\varphi(t) = \Im \left[\frac{2\pi}{A} r(1 - \cos \omega_0 t) \right] \sin \left[\frac{2\pi}{A} (x_0 - r \sin \omega_0 t) \right]$$

$$\psi(t) = \Im \left[\frac{2\pi}{A} r(1 - \cos \omega_0 t) \right] \cos \left[\frac{2\pi}{A} (x_0 - r \sin \omega_0 t) \right]$$

Durch Laplace'sche Transformation erhält dieses Gleichungssystem mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen, wonach gemäss vorstehender Problemstellung

$$\begin{aligned} \xi_2 &= 0 & \dot{\xi}_2 &= 0 \\ y_2 &= 0 & \dot{y}_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{für } t = 0, \quad (3)$$

die Form

$$p^2 \mathfrak{L}(y_2) + \omega_0 p \mathfrak{L}(\xi_2) = \gamma' \mathfrak{L}[\varphi(t)]$$

$$p^2 \mathfrak{L}(\xi_2) - \omega_0 p \mathfrak{L}(y_2) = \gamma' \mathfrak{L}[\psi(t)]$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach den unbekannten Bildfunktionen $\mathfrak{L}(\xi_2)$ und $\mathfrak{L}(y_2)$ liefert die gesuchten Lösungen im Bildbereich zu

$$\mathfrak{L}(\xi_2) = \gamma' \frac{\mathfrak{L}[\psi(t)]}{p^2 + \omega_0^2} + \frac{\omega_0 \gamma'}{p} \frac{\mathfrak{L}[\varphi(t)]}{p^2 + \omega_0^2}$$

$$\mathfrak{L}(y_2) = \gamma' \frac{\mathfrak{L}[\varphi(t)]}{p^2 + \omega_0^2} - \frac{\omega_0 \gamma'}{p} \frac{\mathfrak{L}[\psi(t)]}{p^2 + \omega_0^2}$$

Eine kleine Umstellung lässt hierin leicht die Originalfunktionen von $\sin \omega_0 t$ und $\cos \omega_0 t$ erkennen. Ihre Einsetzung ergibt die Gleichungen

$$\mathfrak{L}(\xi_2) = \frac{\gamma'}{\omega_0} \mathfrak{L}(\sin \omega_0 t) \cdot \mathfrak{L}[\psi(t)] + \frac{\gamma'}{\omega_0} \mathfrak{L}(1 - \cos \omega_0 t) \cdot \mathfrak{L}[\varphi(t)] \quad (4)$$

$$\mathfrak{L}(y_2) = \frac{\gamma'}{\omega_0} \mathfrak{L}(\sin \omega_0 t) \cdot \mathfrak{L}[\varphi(t)] - \frac{\gamma'}{\omega_0} \mathfrak{L}(1 - \cos \omega_0 t) \cdot \mathfrak{L}[\psi(t)] \quad (5)$$

Für Gleichung (4) folgt weiter mit Hilfe des Faltungssatzes

$$\mathfrak{L}(\xi_2) = \frac{\gamma'}{\omega_0} \mathfrak{L} \left\{ \int_0^t \sin [\omega_0(t-\tau)] [\psi(\tau)] d\tau \right\} \\ + \frac{\gamma'}{\omega_0} \mathfrak{L} \left\{ \int_0^t (1 - \cos [\omega_0(t-\tau)]) [\varphi(\tau)] d\tau \right\}$$

und daraus die gesuchte Originalfunktion

$$\xi_2 = \frac{\gamma'}{\omega_0} \int_0^t \sin [\omega_0(t-\tau)] [\psi(\tau)] d\tau + \frac{\gamma'}{\omega_0} \int_0^t (1 - \cos [\omega_0(t-\tau)]) [\varphi(\tau)] d\tau$$

Analog findet sich aus Gleichung (5) die Lösung im Originalbereich zu

$$y_2 = \frac{\gamma'}{\omega_0} \int_0^t \sin [\omega_0(t-\tau)] [\varphi(\tau)] d\tau - \frac{\gamma'}{\omega_0} \int_0^t (1 - \cos [\omega_0(t-\tau)]) [\psi(\tau)] d\tau$$

Mit diesen Resultaten ist damit das vorliegende Problem grundsätzlich gelöst. Die sehr unpraktische Form der Gleichungen kann aber noch bedeutend verbessert werden. Zerlegt man die trigonometrischen Faktoren und macht die eingangs gemachte Relation, wonach

$$\varphi(\tau) = \mathfrak{Cof} \left[\frac{2\pi}{\Lambda} r(1 - \cos \omega_0 \tau) \right] \sin \left[\frac{2\pi}{\Lambda} (x_0 - r \sin \omega_0 \tau) \right]$$

$$\psi(\tau) = \mathfrak{Sin} \left[\frac{2\pi}{\Lambda} r(1 - \cos \omega_0 \tau) \right] \cos \left[\frac{2\pi}{\Lambda} (x_0 - r \sin \omega_0 \tau) \right]$$

wieder rückgängig, so zeigt sich, dass einzelne Glieder paarweise integriert werden können. Mit dieser Auswertung ergeben sich die Formeln

$$\xi_2 = \frac{\gamma'}{\omega_0} \int_0^t \mathfrak{Cof} \left[\frac{2\pi}{\Lambda} r(1 - \cos \omega_0 \tau) \right] \sin \left[\frac{2\pi}{\Lambda} (x_0 - r \sin \omega_0 \tau) \right] d\tau \\ - \frac{\gamma' \lambda}{2\pi r \omega_0^2} \mathfrak{Sin} \left[\frac{2\pi}{\Lambda} r(1 - \cos \omega_0 t) \right] \sin \left[\frac{2\pi}{\Lambda} (x_0 - r \sin \omega_0 t) \right] \sin \omega_0 t \\ - \frac{\gamma' \lambda}{2\pi r \omega_0^2} \mathfrak{Cof} \left[\frac{2\pi}{\Lambda} r(1 - \cos \omega_0 t) \right] \cos \left[\frac{2\pi}{\Lambda} (x_0 - r \sin \omega_0 t) \right] \cos \omega_0 t \\ + \frac{\gamma' \lambda}{2\pi r \omega_0^2} \cos \left(\frac{2\pi}{\Lambda} x_0 \right) \cos \omega_0 t \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 y_2 = & -\frac{\gamma'}{\omega_0} \int_0^t \mathfrak{S} \sin \left[\frac{2\pi}{A} r (1 - \cos \omega_0 \tau) \right] \cos \left[\frac{2\pi}{A} (x_0 - r \sin \omega_0 \tau) \right] d\tau \\
 & + \frac{\gamma' \lambda}{2\pi r \omega_0^2} \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \left[\frac{2\pi}{A} r (1 - \cos \omega_0 t) \right] \cos \left[\frac{2\pi}{A} (x_0 - r \sin \omega_0 t) \right] \sin \omega_0 t \\
 & - \frac{\gamma' \lambda}{2\pi r \omega_0^2} \mathfrak{S} \sin \left[\frac{2\pi}{A} r (1 - \cos \omega_0 t) \right] \sin \left[\frac{2\pi}{A} (x_0 - r \sin \omega_0 t) \right] \cos \omega_0 t \\
 & - \frac{\gamma' \lambda}{2\pi r \omega_0^2} \cos \left(\frac{2\pi}{A} x_0 \right) \sin \omega_0 t.
 \end{aligned} \quad (7)$$

Dies sind die gesuchten Lösungen von (1) und (2), wie sich mit Rücksicht auf (3) leicht verifizieren lässt.

Nachstehend werden noch kurz die Funktionswerte und deren Ableitungen für die besonders interessierenden Zeiten $t = 0$ und $t = T_0$ berechnet.

Für $t = 0$ verschwindet in Gleichung (6) voraussetzungsge-
mäss der ganze Ausdruck, während er für $t = T_0$ übergeht in

$$\xi_{2/t=T_0} = \frac{\gamma'}{\omega_0} \int_0^{T_0} \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \left[\frac{2\pi}{A} r (1 - \cos \omega_0 \tau) \right] \sin \left[\frac{2\pi}{A} (x_0 - r \sin \omega_0 \tau) \right] d\tau$$

Das Integral ist geschlossen lösbar und hat den Wert

$$T_0 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \left(\frac{2\pi}{A} r \right) \sin \left(\frac{2\pi}{A} x_0 \right);$$

damit wird

$$\xi_{2/t=T_0} = 2\pi \frac{\gamma'}{\omega_0^2} \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \left(\frac{2\pi}{A} r \right) \sin \left(\frac{2\pi}{A} x_0 \right)$$

Für Geschwindigkeit und Beschleunigung lässt sich leicht errechnen, dass

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_2 &= 0 \\
 \ddot{\xi}_2 &= 0
 \end{aligned} \quad \text{für } t = \begin{matrix} 0 \\ T_0 \end{matrix}$$

In analoger Weise ergibt sich aus Gleichung (7) $y_{2/t=0} = 0$, während für $t = T_0$

$$y_{2/t=T_0} = -\frac{\gamma'}{\omega_0} \int_0^{T_0} \mathfrak{S} \sin \left[\frac{2\pi}{A} r (1 - \cos \omega_0 \tau) \right] \cos \left[\frac{2\pi}{A} (x_0 - r \sin \omega_0 \tau) \right] d\tau$$

Die Auswertung des Integrals ergibt

$$T_0 \mathfrak{S} \sin \left(\frac{2\pi}{A} r \right) \cos \left(\frac{2\pi}{A} x_0 \right)$$

mithin

$$y_2 \Big|_{t=T_0} = -2\pi \frac{\gamma'}{\omega_0^2} \sin\left(\frac{2\pi}{A} r\right) \cos\left(\frac{2\pi}{A} x_0\right)$$

Ebenso findet man für die Geschwindigkeit

$$\dot{y}_2 = 0 \quad \text{für } t = \frac{0}{T_0},$$

während die Beschleunigung den Wert

$$\ddot{y}_2 = \gamma' \sin\left(\frac{2\pi}{A} x_0\right) \quad \text{für } t = \frac{0}{T_0}$$

aufweist.

Die Überprüfung der gefundenen Werte mit denjenigen in § 5 zeigt eine vollständige Übereinstimmung, womit die Zuverlässigkeit der verwendeten Mittelwertsmethode einwandfrei erwiesen ist.

¹⁾ A. ALLERDING, W. DÄLLENBACH und W. KLEINSTEUBER, Hochfr. u. El. Ak. **51**, S. 96 und weitere Publikationen.

²⁾ F. LÜDI, Bullt. S.E.V. XXXIII. Jahrg., S. 310 (1942). — F. LÜDI, 6. Hochfreq. Tagung des S.E.V., 6. Juni 1942, i/Druck.

³⁾ F. FISCHER und F. LÜDI, Bullt. S.E.V., Bd. 28 (1937).

⁴⁾ K. FRITZ und W. ENGBERT, Telefunken Mitteilungen Nr. 84 (1940).

⁵⁾ H. GUTTON und S. BERLINE, Bullt. S.F.R., 12^e Année, N^o 2 (1938).

⁶⁾ F. LÜDI, H.P.A., Vol. XIII, Fasc. Sec. 1940, S. 122 und Vol. XIII Fasc. Sext. 1940, S. 498.

Instabilité d'une rangée de tourbillons de long d'une paroi

par J. Patry.

(2. II. 1943).

Introduction. Le problème de la stabilité des rangées de tourbillons a été étudiée d'une manière approfondie (A). On peut alors montrer que la plupart des séries doubles de tourbillons sont instables. Seule, la disposition de KARMAN ne présente pas d'instabilité propre, mais sa stabilité en première approximation n'est qu'indifférente. Un tourbillon déplacé de sa position normale reste dans sa nouvelle position.

Toutes ces études ont été effectuées avec la supposition que le fluide était infini. La série de tourbillons le long d'une paroi n'a pas encore été étudiée à notre connaissance. Elle diffère de la série double symétrique par le fait que la symétrie doit se conserver. Cette propriété modifie le mouvement des tourbillons déplacés, même en première approximation. Nous verrons que l'instabilité de cette disposition est suffisante pour justifier l'hypothèse de SCHILLER (B) sur la naissance de la turbulence dans les canaux.

Théorie générale.

Soit une série de tourbillons régulièrement espacés le long d'une paroi, à une distance h de cette dernière. Nous choisirons les unités de longueur de façon que la distance entre deux tourbillons successifs soit de π . Comme la paroi doit être une ligne de courant, nous considérerons la série symétrique de la première avec la condition que cette symétrie est constamment réalisée. Les tourbillons se déplacent donc par paires et il faudra toujours tenir compte du mouvement du tourbillon symétrique.

Comme système d'axes, nous prendrons l'axe réel comme axe de symétrie. L'axe imaginaire est perpendiculaire à ce dernier, mais n'est pas autrement défini. Sa position exacte par rapport aux tourbillons n'a pas d'importance.

La vitesse d'une particule du fluide est alors donnée par la formule:

$$2\pi(v + i \cdot u) = J \cdot [\text{Cotg}(z - z_0) - \text{Cotg}(z - z_0')] \quad (1)$$

où z_0 est la position d'un tourbillon réel d'intensité J et z_0' , celle du tourbillon virtuel correspondant (d'intensité $-J$). En tenant compte de la relation:

$$z_0' + 2 \cdot i \cdot h = z_0 \quad (2)$$

Il est facile de déterminer la vitesse des tourbillons :

$$u_t = \frac{J \cdot \text{Coth } 2h}{2 \cdot \pi} . \quad (3)$$

La vitesse à la paroi, par contre, oscille entre les deux limites :

$$u_1 = \frac{J \cdot \text{Coth } h}{\pi} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{J \cdot \text{th } h}{\pi} . \quad (4)$$

Comme vitesse moyenne, nous prendrons :

$$u_m = \sqrt{u_1 \cdot u_2} = \frac{J}{\pi} . \quad (5)$$

Cette formule permet de déterminer les vitesses par rapport à la paroi où la vitesse moyenne doit être nulle.

$$w_t = u_t - u_m = u_m \cdot \left(\frac{\text{Coth } 2h}{2} - 1 \right) \quad (3')$$

$$w = -u_m .$$

Pour simplifier l'écriture, nous prendrons u_m comme unité de vitesse comme nous avons pris la distance entre deux tourbillons divisée par π comme unité de longueur. L'unité de temps se déduit facilement de ces deux définitions.

Déterminons maintenant la vitesse d'un tourbillon qui aurait été désaxé. Elle se compose de la vitesse du fluide à cet endroit sous l'influence de la série complète des tourbillons (I), moins l'influence de la paire de tourbillons déplacés (II) plus, enfin, l'influence de tourbillon symétrique à l'endroit exact (III) :

$$2 \cdot (v + i \cdot u) = \text{Cotg } (z - z_0) - \text{Cotg } (z - z_0') - \quad (\text{I})$$

$$- \left(\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - z_0'} \right) + \quad (\text{II}) \quad (6)$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot |y|} \quad (\text{III}).$$

Dans le cas d'un tourbillon virtuel, nous aurons exactement la même formule. En tenant compte que :

$$z' - z_0' = (z - z_0)^*$$

on obtient facilement les relations suivantes :

$$u' = u \quad \text{et} \quad v' = -v . \quad (7)$$

La symétrie est donc constamment conservée.

Instabilité de la série régulière.

Soit maintenant $z - z_0 = \xi + i\eta$, avec $|\xi + i\eta| \ll 1$, nous avons :

$$\begin{aligned} \operatorname{Cotg}(z - z_0') &= \operatorname{Coth} 2h + (\xi + i\eta) \cdot \frac{1}{Sh^2 2h} \\ \operatorname{Cotg}(z - z_0) - \frac{1}{z - z_0} &= \frac{1 - \delta z \cdot \operatorname{Cotg} \delta z}{\delta z} = \frac{\delta z}{3} \\ \frac{1}{z - z_0'} + \frac{i}{2 \cdot |y|} &= \frac{\delta z^*}{(2h)^2} \end{aligned}$$

On en déduit alors facilement les équations du mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -\frac{1}{2} \cdot \left(A + \frac{1}{(2h)^2} \right) \cdot \eta \\ \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{1}{2} \cdot \left(A - \frac{1}{(2h)^2} \right) \cdot \xi \end{aligned} \quad (9)$$

avec

$$A = \frac{1}{Sh^2 2h} + \frac{1}{3}.$$

Introduisons la quantité toujours réelle :

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{A^2 - \frac{1}{(2h)^4}}.$$

Les équations de mouvement pourront s'écrire :

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = \omega^2 \xi; \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \omega^2 \eta. \quad (10)$$

Il y aura donc instabilité dans tous les cas.

Supposons maintenant que le déplacement initial soit perpendiculaire à la paroi. On aura alors :

$$\eta = \eta_0 \cdot Ch \omega t; \quad \xi = -\eta_0 \cdot \left(A + \frac{1}{(2h)^2} \right) \cdot \frac{Sh \omega t}{2 \cdot \omega}. \quad (11)$$

La table 2 donne la valeur du facteur de $Sh \omega t$ dans ξ . La fig. 1 montre les trajectoires du tourbillon par rapport à sa position normale. La valeur envisagée pour η_0 est toujours celle de $h \cdot (0,1)$.

Un calcul semblable nous conduira, pour un écart initial tangent, aux relations :

$$\xi = \xi_0 \cdot Ch \omega t; \quad \eta = -\xi_0 \cdot \left(A - \frac{1}{(2h)^2} \right) \cdot \frac{Sh \omega t}{2 \cdot \omega} \quad (12)$$

Table 1.
Calcul de ω et de u_t .

h	$A + \frac{1}{(2h)^2}$	$A - \frac{1}{(2h)^2}$	ω	u_t
0,00	∞	0,00000	0,182	∞
0,05	200,0007	0,00066	0,182	5,01
0,10	50,0026	0,00265	0,182	2,53
0,15	22,2281	0,00592	0,182	1,72
0,20	12,5104	0,01040	0,181	1,32
0,25	8,0160	0,01603	0,180	1,08
0,30	5,5782	0,02269	0,178	0,93
0,35	4,1119	0,03030	0,177	0,83
0,40	3,1637	0,03869	0,175	0,76
0,45	2,5169	0,04777	0,174	0,70
0,50	2,0574	0,05739	0,172	0,66
0,55	1,7203	0,06744	0,170	0,63
0,60	1,4667	0,07778	0,169	0,60
0,65	1,2717	0,08829	0,168	0,58
0,70	1,1193	0,09889	0,166	0,57
0,75	0,9983	0,10945	0,165	0,55
0,80	0,9011	0,11990	0,164	0,54
0,85	0,8222	0,13018	0,164	0,54
0,90	0,7575	0,14022	0,163	0,53
0,95	0,7040	0,14995	0,163	0,53
1,00	0,6594	0,15936	0,162	0,52
∞	0,3333	0,33333	0,167	0,50

Table 2.
Valeurs de $B = (A + 1/(2h)^2) \cdot 1/2 \cdot \omega$

h	B	h	B	h	B	h	B
0,00	∞	0,25	22,33	0,50	6,00	0,75	3,03
0,05	549,5	0,30	15,67	0,55	5,06	0,80	2,75
0,10	137,37	0,35	11,65	0,60	4,35	0,85	2,51
0,15	61,23	0,40	9,04	0,65	3,80	0,90	2,32
0,20	34,65	0,45	7,25	0,70	3,37	0,95	2,17
1,00	2,04			∞	1,00		

Le facteur de $Sh \omega t$ dans η est donc dans ce cas très petit, ce qui fait que le mouvement est très lent. Nous ne l'étudierons pas plus, car la turbulence ne sera pas produite par un tel mouvement.

En tenant compte que l'unité de temps est donnée par le temps pris par le fluide à l'infini pour parcourir la distance entre

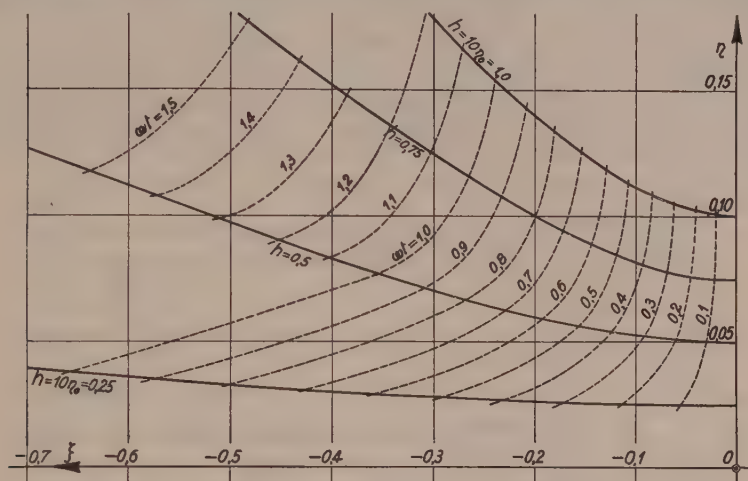


Fig. 1.

Mouvement en première approximation.

Les traits pleins représentent les trajectoires d'un tourbillon qui a été déplacé perpendiculairement à la paroi. Les traits pointillés donnent une idée sur la vitesse du mouvement. L'unité de temps est le temps pris par le fluide pour parcourir la distance entre deux tourbillons divisée par π . En tenant compte de la valeur approchée de 0,18 pour ω , on constate que le tourbillon a une vitesse du même ordre de grandeur que celle du fluide, si sa position régulière est considéré comme immobile.

deux tourbillons, divisé par π , on constatera que l'instabilité est très forte et que le temps mis par un tourbillon pour sortir manifestement de sa place et pour avoir une influence destructrice sur la série, est relativement minime. Ce résultat sera confirmé par une étude plus exacte sur le mouvement.

Mouvement en seconde approximation.

Considérons maintenant l'équation (6) et résolvons-la par une méthode point-par-point. Nous obtiendrons le mouvement exact du tourbillon si tous les autres étaient à leur place. Nous donnons dans la figure 2, les résultats obtenus avec :

$$h = 0,25, \quad \text{d'où} \quad \frac{d}{h} = 12,566.$$

La vitesse des tourbillons est de :

$$u_i = 1,08 \cdot u_m$$

ce qui correspond environ à des tourbillons immobiles par rapport à la paroi. Une valeur inférieure de h aurait conduit à une vitesse des tourbillons dans le même sens que le fluide et à une instabilité encore plus rapide, comme on peut le constater sur la fig. 1.

Pour déterminer le domaine où la solution ainsi obtenue est exacte, nous avons calculé l'influence de ce mouvement sur le tourbillon le plus influencé, qui est le tourbillon le plus proche en aval

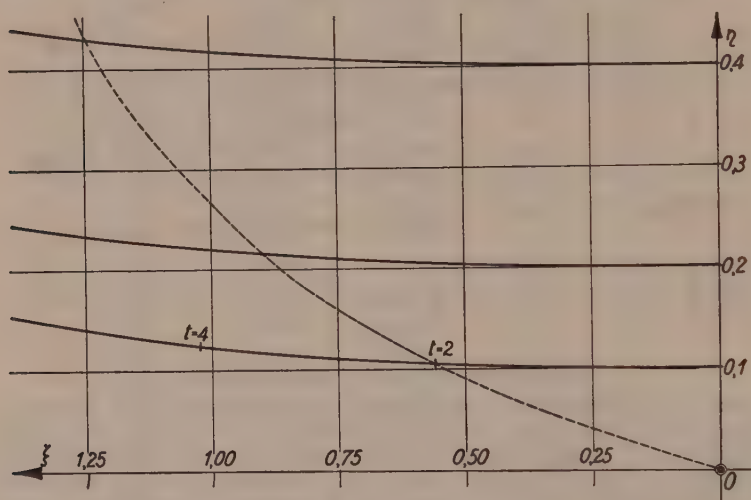


Fig. 2.

Mouvement du tourbillon décalé en seconde approximation.

Les traits pleins représentent les trajectoires du tourbillon que l'on aurait éloigné de la paroi. La valeur choisie pour h est 0,25. La vitesse des tourbillons est alors presque nulle par rapport à la paroi. Une valeur plus faible de h conduirait à un mouvement encore plus rapide du tourbillon par rapport à sa position normale et à une vitesse d'ensemble dans le même sens que le fluide, ce qui est réalisé dans la réalité. Il est évidemment possible que notre définition de la vitesse moyenne ne corresponde pas exactement à la vitesse à la paroi par rapport au fluide à l'infini.

dans notre cas. Le résultat est donné dans la fig. 3. La trajectoire est tracée pour un temps égal au temps nécessaire au tourbillon désaxé pour parcourir la trajectoire de la fig. 2. Nous pouvons donc considérer ces trajectoires comme exactes dans les limites tracées.

On constate ainsi que le tourbillon désaxé se déplace avec une vitesse environ moitié de celle du fluide à l'infini. L'instabilité est encore plus rapide qu'en première approximation.

Discussion qualitative.

Ayant ainsi obtenu quelques données numériques sur le temps pris par un tourbillon pour s'échapper, il est possible de discuter avec fruits, le problème très complexe de l'influence ultérieure de ce premier désordre. Considérons tout d'abord les deux tourbillons que nous avons déjà suivis, le mouvement va continuer comme il a commencé jusqu'au moment où les deux tourbillons se seront trop rapprochés et qu'ils seront arrivés à la même abscisse (même partie réelle de z_0 et de z_{-1}). A partir de cet instant, il formeront une paire de tourbillons associés, tournant l'un autour de l'autre tout en continuant à descendre la série en raison de l'influence de

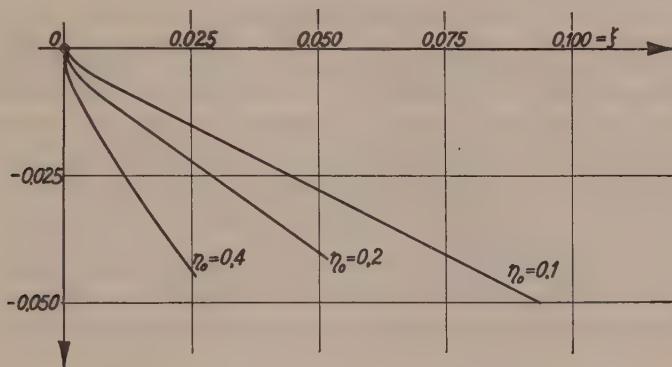


Fig. 3.

Mouvement du tourbillon d'ordre -1 sous l'influence du déplacement du tourbillon d'ordre 0 .

Les traits pleins représentent la trajectoire résultant du mouvement du tourbillon d'ordre 0 représenté dans la fig. 2. Il est donc manifeste que l'écart entre ce tourbillon d'ordre -1 et sa position normale est restée faible, ce qui justifie les suppositions que nous avons faites pour ce calcul.

tous les autres tourbillons de la série. Ils atteindront donc le tourbillon d'ordre -2 et se l'associeront. La série sera donc complètement désorganisée en aval du tourbillon perturbateur. C'est le résultat obtenu si ce premier tourbillon s'est éloigné de la paroi. Si, par contre, le tourbillon a été comprimé contre la paroi, c'est la partie en amont qui sera désorganisée. Cependant, le groupe des tourbillons associés a une vitesse comparable à celle du fluide. L'influence de ce groupe ne se fera donc pas sentir en amont d'un certain point de la paroi. C'est ainsi que l'on pourrait expliquer pourquoi les séries de tourbillons le long des canaux ne comprennent qu'un nombre fini de tourbillons, nombre en général assez restreint (cf. les études expérimentales sur la turbulence dans les canaux (B)).

Ayant étudié l'influence sur une des deux régions intéressantes, il nous faut maintenant considérer l'autre partie. Le tourbillon d'ordre 1 dans le cas considéré, tendra à se rapprocher de la paroi, car l'influence opposée du tourbillon perturbateur aura disparu. Cette influence sera faible, car elle sera compensée en partie par l'éloignement du tourbillon virtuel d'ordre 0. Une fois rapproché de la paroi, il subira l'influence de toute la série et remontera la série selon le procédé que nous avons décrit à la fin du dernier alinéa. Cette influence se manifestera aussi au début de la formation de la série. Cette raison explique clairement le petit nombre des tourbillons dans de telles séries dans les canaux.

Conclusion.

L'étude de l'instabilité d'une série de tourbillons le long d'une paroi montre que le seul fait qu'un tourbillon se rapproche de la paroi peut empêcher la série de dépasser ce point de la paroi. Il se forme un agglomérat de tourbillons qui donnent lieu à une forte turbulence. Si cet agglomérat se désagrège et se trouve emporté par le courant, le simple fait que la série est interrompue, provoque la répétition du phénomène. Nous confirmons donc l'hypothèse de SCHILLER sur l'origine de la turbulence dans les canaux.

Institut d'Aérodynamique de l'E.P.F. Zurich.

Bibliographie.

A — Stabilité des files de tourbillons.

- DOLAPTSCHIEV, Zeitschrift für ang. Mathematik und Mechanik, **17**, 313, 1937.
 DOLAPTSCHIEV, Zeitschrift für ang. Mathematik und Mechanik, **18**, 263, 1938.
 MAUE, Zeitschrift für ang. Mathematik und Mechanik, **20**, 129, 1940.
 SCHMIEDEN, Ingenieur-Archiv **7**, 215 et 337, 1936.

B — Expériences sur la naissance de la turbulence.

- HAHNEMANN, Forsch. auf dem Gebiete des Ingenieurwesens **8**, 226, 1937.
 KURZWEIG, Annalen der Physik **18**, 193, 1933.
 NAUMANN, Forsch. auf dem Gebiete des Ingenieurwesens **2**, 85, 1931.
 NAUMANN, Forsch. auf dem Gebiete des Ingenieurwesens **6**, 139, 1935.
 SCHILLER, Verh. des 3. intern. Kongresses für technische Mechanik I, 226, 1931.
 SCHILLER, Zeitschrift für ang. Mathematik und Mechanik **14**, 36, 1934.
 SCHILLER, Proc. of the fifth Congress for applied Mechanics 315, 1938.
-

Die Ausmessung der Feinstruktur akustischer Resonanzen mit dem Hitzdrahtschallmesser¹⁾

von A. Loebenstein.

(22. I. 1943).

Zusammenfassung. Die von ZICKENDRAHT gefundene Feinstruktur akustischer Resonanzen wurde mit einem Hitzdrahtschallmesser nachgemessen. Aufbau und Arbeitsweise der Apparatur werden beschrieben, und schliesslich wird auf eine merkwürdige quantitative Beziehung zwischen den gefundenen Resonanzfrequenzen hingewiesen.

Vor kurzem berichtete in dieser Zeitschrift H. ZICKENDRAHT²⁾ über einen neuen Effekt, den er an akustischen Resonatoren beobachtet hat. Er fand, dass ein Helmholtzresonator, und auch solche von zylindrischer Gestalt, nicht nur, wie man früher dachte, eine Resonanzfrequenz habe, sondern mehrere, die mehr oder weniger dicht zusammenliegen und die in keinem harmonischen Verhältnis zueinanderstehen. Gefunden wurden diese Resonanzlagen mit Hilfe der schallempfindlichen Flamme, und es erschien nun wünschenswert, sie auch mit einer andern Methode nachzuweisen.

Ausmessungen akustischer Resonatoren sind in neuerer Zeit schon verschiedentlich gemacht worden. So verwandte HARDUNG³⁾ 1936 zur Untersuchung von offenen und gedeckten Pfeifen ein Thermokreuz, das durch den darauffallenden Schall abgekühlt wurde. 1937 untersuchten SCHILLER und CASTELLIZ⁴⁾ einen Resonator mit Hilfe einer Bolometerdüse, wie sie ihr Gerät nannten. Es ist dies ein enges Rohr, das in den Resonator eingeführt werden kann und das am vorderen Ende einen dünnen Draht trägt, der elektrisch geheizt wird. Der auffallende Schall kühlt ihn ab, dadurch ändert sich sein Widerstand, und die Grösse dieser Widerstandsänderung kann man in einer Wheatstone'schen Brücke messen. Diese Methode wählten wir mit einigen Abänderungen für unsern Zweck.

Das Prinzip, Schallintensitäten so zu bestimmen, wurde zuerst 1921 von TUCKER und PARIS⁵⁾ angewandt. Weiter befassten sich RICHARDS⁶⁾ 1923 und von HIPPEL 1924—1925⁷⁾ damit. Der letztere untersuchte in zwei umfangreichen Arbeiten Theorie und praktische Anwendung des Geräts und kam zu dem Ergebnis, dass

sich dabei mehrere Effekte komplizierter Weise überlagern, auf die näher einzugehen hier zu weit führen würde. Alle Autoren stellen fest, dass, was für unsere Zwecke wesentlich ist, die Widerstandsänderung proportional der Schallintensität ist, die Empfindlichkeit aber mit steigender Frequenz abnimmt.

Wir wählten als Hitzdraht einen Pt-Ir-Draht vom Durchmesser 0,02 mm, von dem ein Stück von ungefähr 2 cm Länge spiralig aufgewunden und an den Enden zwischen je zwei flach gehämmerte Kupferdrähte angelötet wurde. In den Arbeiten anderer Autoren wurde der Hitzdraht immer in ein Rohr, eine Büchse oder einen Schalltrichter eingebaut, um ihn vor Luftströmungen zu schützen (oder auch um Luftströme definierter Richtung zu erhalten) und die Resonanzen dieser Räume zur Verstärkung auszunützen. In unserm Fall war aber die Verstärkung einer bestimmten Frequenz unerwünscht, deswegen liessen wir den Hitz-

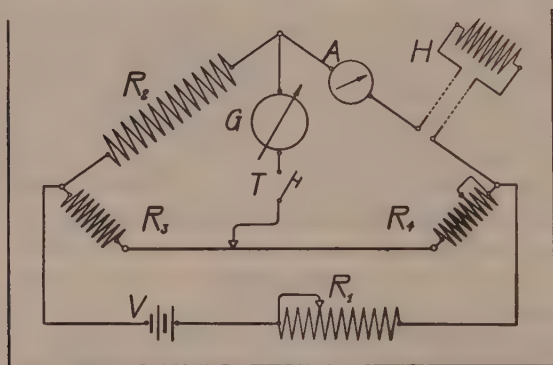


Fig. 1

draht in freier Luft arbeiten. Gegen Luftströmungen wurde er durch eine übergeschobene Gazehülle geschützt und, falls nötig, das ganze Gerät noch mit aufgehängten Tüchern, weicher Pappe usw. umgeben. Dass diese Vorkehrungen die Frequenzmessung nicht stören, zeigen Messungen von Prof. ZICKENDRAHT⁸⁾, der mit dem gleichen Resonator und einer schallempfindlichen Flamme ohne diesen Schutzraum dieselben Resonanzfrequenzen fand wie ich mit dem Hitzdraht.

Die Messung der Widerstandsänderung erfolgte in einer Wheatstone'schen Brücke, deren Schallschema Fig. 1 zeigt. Die Gleichstromspannungsquelle V (12 Volt) dient sowohl zum Betrieb der Brücke wie zur Heizung des Hitzdrahts H . Das Messinstrument A gestattet, den Heizstrom zu messen, der mit Hilfe des variablen Widerstandes R_1 (total 2000 Ω) reguliert werden kann. Er wurde

auf 150 mA konstant gehalten. Die festen Brückenzweige sind R_2 und R_3 mit 40 bzw. 30 Ω , der veränderliche Teil besteht aus dem Widerstand R_4 (total 30 Ω) zur Grobeinstellung und dem Schleifdraht zwischen R_3 und R_4 (2,82 Ω auf 110 cm Länge) zur Feinregulierung. Als Brückengalvanometer G wurden zwei Instrumente verwandt, ein Dosengalvanometer mit der Empfindlichkeit 10^{-6} Amp/Skt. und ein hochempfindliches Spiegelinstrument mit der Empfindlichkeit $4,5 \cdot 10^{-10}$ Amp. pro m Abstand pro mmSkt. Sie waren bei Stille auf Null kompensiert, als Mass für die Widerstandsänderung bei Schalleinwirkung wurden die zugehörigen Galvanometerausschläge genommen.

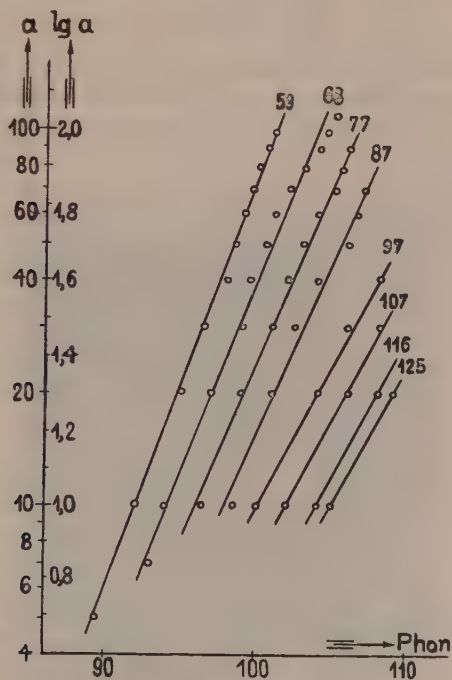


Fig. 2.

Zur Eichung wurden der Hitzdraht und das Mikrophon eines Marconi-Ekco-Schallmessers dicht nebeneinander vor einen Lautsprecher gestellt, der durch einen Siemens-Schwebungstongenerator kontinuierlich zwischen 0 und 10000 Hz erregt werden konnte, und an beiden Geräten abgelesen. Das Ergebnis zeigt Fig. 2. Auf der Abszisse ist die Lautstärke in Phon aufgetragen, auf der logarithmischen Ordinate die Galvanometerausschläge. Es ergibt sich für die verschiedenen Frequenzen eine Schar fast paralleler Gera-

den — die Zahlen an den Geraden bedeuten die Frequenz. Man erkennt, dass die Empfindlichkeit mit steigender Frequenz abnimmt. Weiter sieht man die Proportionalität mit der Schallintensität. Die Geraden haben mit guter Annäherung die Steigung 0,1. Bezeichnet man mit A den Galvanometerausschlag, mit P die Anzahl der Phon, so ist

$$\log A \cong 0,1 P$$

P ist proportional dem 20fachen log des Schalldrucks:

$$P \sim 20 \log p$$

also

$$A \sim p^{20 \cdot 0,1} = p^2$$

Das Quadrat des Schalldrucks ist aber der Schallintensität proportional. Auch SCHILLER und CASTELLIZ haben die Abhängigkeit der Widerstandsänderung vom Schalldruck gemessen und fin-

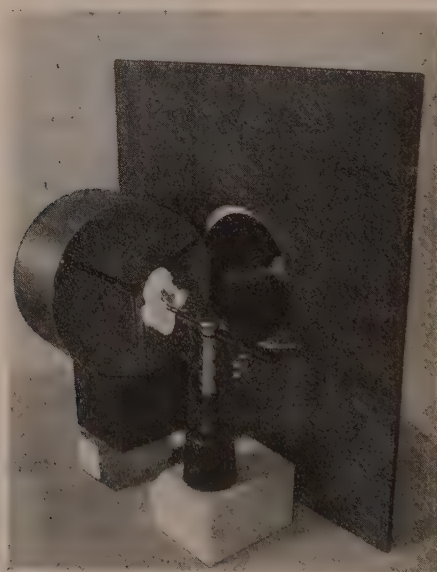


Fig. 3.

den parabelähnliche Kurven, ohne aber den mathematischen Zusammenhang anzugeben.

Der auszumessende Resonator war ein flacher Zylinder (Durchmesser 20 cm, Höhe 11 cm, Mündungs-Durchmesser 1,5 cm, -Länge 0,1 cm). Beide Grundflächen waren durch aufgeschraubte

Leisten verstärkt, um Membranwirkungen zu verhindern. Die nach der Formel⁹⁾

$$n = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{V}}$$

berechnete Resonanzfrequenz betrug 100 Hz (a = akustische Leitfähigkeit der Mündung gleich 1,2 gesetzt).

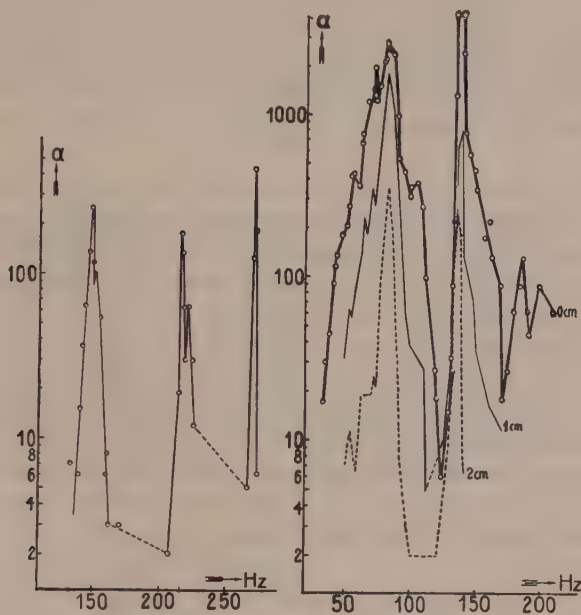


Fig. 4b.

Fig. 4a.

Zur Messung wurde der Hitzdraht zunächst so weit vom Lautsprecher entfernt aufgestellt, dass er ohne Resonator nicht mehr auf den Schall reagierte, und dann der Resonator dazugestellt, wie es Fig. 3 zeigt.

Die Ergebnisse enthält Fig. 4a: Als Abszissen sind die Frequenzen aufgetragen, als Ordinaten die Galvanometerausläge im logarithmischen Mass. Die drei Kurven beziehen sich auf verschiedene Abstände zwischen Resonatorloch und Hitzdraht, nämlich 2 cm, 1 cm und Ebene des Resonatorlochs. Die Resonanzstelle bei 93 Hz entspricht dem Resonatoreigenton, die Differenz gegen die berechneten 100 Hz lässt sich leicht durch zu hohes Ansetzen der Leitfähigkeit a der Mündung erklären.

Ausserdem treten nun noch drei tieferliegende und drei höherliegende Resonanzstellen auf, die in keinem harmonischen Verhältnis zur Grundschiwingung stehen. Dass die zwei höchsten nur in der obersten Kurve vorkommen, liegt wohl nur daran, dass sie in den beiden unteren Kurven unter die Empfindlichkeitsgrenze des Hitzdrahts gesunken waren. Die drei unteren Resonanzstellen entstehen allein durch Vorgänge an der Mündung, denn, wie Fig. 4b zeigt, fallen sie weg, wenn man mit dem Hitzdraht in den Resonator hineingeht. Zur Aufnahme dieser letzten Kurve ist der Hitzdraht 1,5 cm tief in den Resonator hineingesteckt worden. Der eigentliche Resonanzton ist gegenüber Fig. 4a etwas verschoben, wohl durch Temperatureinflüsse; er zeigt ein doppeltes Maximum. Ferner sind zwei höhere Resonanzlagen vorhanden, die erste davon auch doppelt.

Bei dem Versuch, diese Resonanzen zu deuten, bin ich nun auf eine merkwürdige Übereinstimmung gestossen. Die oben erwähnte Formel für den Resonatoreigentönen gilt unter der Voraussetzung, dass die Wellenlänge gross ist gegen die Dimensionen des Resonators. Das ist in unserm Fall erfüllt, denn die Frequenz 93 Hz ergibt eine Wellenlänge von 2,58 m. Die Form des Resonators spielt dabei gar keine Rolle, die in ihm enthaltene Luft wirkt nur durch ihre Zusammendrückbarkeit, der eigentliche Schwingungsvorgang spielt sich in der Mündung ab. Nun kann man aber auch die ebenen radialen Schwingungen der Luft im Zylinder betrachten, wie dies RAYLEIGH in seiner „Theorie des Schalls“ getan hat¹⁰⁾. Er setzt dafür die Wellengleichung an:

$$\Delta^2 \psi + \kappa^2 \psi = 0$$

$$\psi = \text{Geschwindigkeitspotential}; \quad \kappa = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \lambda = \text{Wellenlänge}$$

setzt voraus, dass ψ von der Länge des Zylinders unabhängig ist, entwickelt es in eine Fourierreihe, führt ebene Polarkoordinaten ein und löst die Gleichung unter der Randbedingung

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0; \quad r = \text{Radius},$$

d. h. an der Wand ist die Teilchengeschwindigkeit gleich 0. Die Glieder der Fourierreihe für ψ haben dann die Form:

$$\psi_n = A J_n(\kappa r)$$

wobei J_n die n te Besselfunktion ist, und die möglichen Werte für κr genügen der Gleichung

$$\frac{dJ_n}{d(\kappa r)} = 0$$

Für die kleineren Werte von κr hat RAYLEIGH eine Tabelle angegeben. Für unsern Zylinder ergibt sich daraus die tiefste radiale Eigenfrequenz mit einer Wellenlänge von 34 cm, also $n = 1000$. Setzt man diese Frequenz gleich 1, so haben die ersten drei Obertöne die Werte der ersten Spalte von Tabelle 1. Berechnet man nach unsern Ergebnissen das Verhältnis der höheren Resonanzlagen

Tabelle 1.

Schwingungszahlen der Obertöne bezogen auf den Grundton.

Zylinderschwingungen nach RAYLEIGH	Gemessene Frequenzen				
	2 cm	1 cm	0 cm	innen	Mittel
1,66	1,58	1,62	1,63	1,68 1,69	1,64
2,08			2,15		2,15
2,28			2,30	2,26	2,28

Die Überschriften über den Spalten der gemessenen Frequenzen beziehen sich auf die Abstände des Hitzdrahts vom Resonator, entsprechend den Beschriftungen der Kurven auf den Abbildungen.

zur Hauptresonanz, so ergeben sich die folgenden Spalten der Tabelle 1 in einer guten Übereinstimmung mit den theoretischen Werten. Es kommt also das erstaunliche Ergebnis heraus, dass wir bei diesen tiefen Frequenzen, die unmöglich die Rayleigh'schen radialen Schwingungen sein können, die gleiche Obertonfolge haben wie bei jenen. Im Fall der im Resonator gemessenen doppelten Maxima des Grundtons und ersten Obertons gilt die Rayleigh'sche Beziehung für das erste Maximum des Grundtons und das erste des Obertons und für das zweite des Grundtons und das zweite des Obertons je für sich.

Man könnte den Einwand erheben, dass der Tongenerator keine rein sinusoidalen Schwingungen geliefert und der Resonator in Wirklichkeit auf hohe Obertöne um 1000 Hz herum angesprochen habe. In diesem Frequenzgebiet zeigt aber der Hitzdraht nicht mehr an, so dass diese Möglichkeit auszuschliessen ist.

Es soll versucht werden, diese Verhältnisse in einer späteren Arbeit zu klären.

Diese Arbeit wurde an der Abteilung für angewandte Physik der Universität Basel bei Herrn Prof. Dr. ZICKENDRAHT ausgeführt. Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. ZICKENDRAHT nochmals für viele wertvolle Ratschläge und für die Überlassung der Apparaturen danken.

Physikalisches Institut der Universität Freiburg.

Literaturverzeichnis.

- ¹⁾ Siehe vorläufige Mitteilung H.P.A. **15**, 321 (1942).
 - ²⁾ H. ZICKENDRAHT, H.P.A. **14**, 525 (1941).
 - ³⁾ V. HARDUNG, H.P.A. **9**, 341 (1936).
 - ⁴⁾ P. E. SCHILLER und H. CASTELLIZ, Akust. Ztschr. **2**, 11 (1937).
 - ⁵⁾ W. S. TUCKER und E. T. PARIS, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A **221**, 389 (1921).
 - ⁶⁾ R. C. RICHARDS, Phil. Mag. [6] **45**, 926 (1923).
 - ⁷⁾ A. v. HIPPEL, Ann. Physik **75**, 521 (1924); — **76**, 590 (1925).
 - ⁸⁾ Private, unveröffentlichte Mitteilung.
 - ⁹⁾ RAYLEIGH, Theorie des Schalls II, S. 211 (Braunschweig 1880).
 - ¹⁰⁾ RAYLEIGH, Theorie des Schalls II, S. 344.
-

Ueber den piezoelektrisch bedingten ΔE -Effekt der Seignettelektrika

von Bernd Matthias.

(7. I. 1943.)

Zusammenfassung. Das anomale elastische Verhalten der Seignettelektrika wird durch eine Theorie erklärt, welche in ihren Grundzügen zum Teil in formaler Analogie zu derjenigen des ΔE -Effekts bei den Ferromagnetika steht. Der anomale Verlauf eines Elastizitätsmoduls des Seignettesalzes kann jetzt allein aus dem anomalen Temperaturgang der Dielektrizitätskonstanten berechnet werden.

Die Ursache der übergrossen Dämpfung von Resonanzfrequenzen, bei welchen der Kristall unter 45° zur b - und c -Achse, und senkrecht zur a -Achse schwingt, wird in Hysteresisverlusten gefunden; die Messungen geben eine quantitative Bestätigung für diese Behauptung. Sämtliche Messungen werden nach zwei verschiedenen Methoden durchgeführt. Einmal wird die Resonanzkurve dynamisch aufgenommen, das andere Mal mittels eines geeichten Generators „stationär“ bestimmt.

Man gelangt zu einer anschaulichen Deutung des Abfalls der Dielektrizitätskonstanten mit der Frequenz von statischen Messungen bis in das Gebiet oberhalb der piezoelektrischen Resonanzstellen der Kristalle.

I. Einleitung.

1. Dispersion der Dielektrizitätskonstanten.

Von verschiedenen Autoren ist die Frequenzabhängigkeit des dielektrischen Verhaltens von Seignettesalz untersucht worden. Die zahlreichen Arbeiten umfassen das Gebiet von statischen Messungen bis in den Bereich der Dezimeterwellen, im wesentlichen immer mit dem Ziel, die Relaxationszeit der die Seignettelektrizität bewirkenden „Dipole“ dadurch zu bestimmen, dass nach einer Dispersionsstelle der Dielektrizitätskonstanten (DK) gesucht wird. Man hoffte, auf diese Weise näheren Aufschluss über die Art und Bindung dieser „Dipole“ zu erhalten. Dabei weisen die Resultate der verschiedenen Autoren sehr grosse Unterschiede auf.

ERRERA¹⁾ berichtet über eine Dispersionsstelle aussergewöhnlicher Breite der DK zwischen 10^3 Hz und 10^5 Hz. Da Seignettesalz stark piezoelektrisch ist, waren in diesem Frequenzgebiet jedoch piezoelektrische Resonanzen der Kristalle zu erwarten, an denen bekanntlich die im Kondensator gemessenen Stromstärken sich anomal verhalten. Um zu zeigen, dass diese Dispersionsstellen piezoelektrisch bedingt seien, untersuchte BUSCH²⁾ den Dispersionsver-

lauf in seiner Abhängigkeit von den Dimensionen der Kristalle. In der Tat verschob sich das Maximum der DK mit wachsender Grösse der Kristalle zu kleineren Frequenzwerten. Eine einwandfreie Zuordnung der Dispersionsfrequenzen zu den Kristalldimensionen war aber hier nicht möglich. Der Wert der DK für Frequenzen oberhalb des piezoelektrischen Resonanzgebiets erwies sich stets kleiner als für Frequenzen unterhalb desselben.

ZELENY und VALASEK³⁾ fanden, dass bei Frequenzen von 10^4 Hz die DK auf die Grössenordnung 100 abgefallen ist, während sie bei 50 Hz etwa 20000 gemessen haben. Ausserdem zeigen ihre Messungen eine Dispersionsstelle bei etwa 10^7 Hz, die als wahre Dispersionsstelle von den Kristalldimensionen unabhängig zu sein schien.

Wie BANTLE und BUSCH⁴⁾ zeigen konnten, handelte es sich jedoch um einen durch die benützte Apparatur vorgetäuschten Effekt. Tatsächlich zeigt die DK bis zu den Dezimeterwellen keinen plötzlichen Abfall und keine Anomalie. Sie bleibt konstant in der Grössenordnung von 10^2 . Erwähnt seien auch die Arbeiten von SCHULWAS-SOROKINA und POSNOV⁵⁾, sowie die Untersuchung von GOEDECKE⁶⁾. Die erstgenannten fanden Dispersionsstellen der DK bei tiefen Frequenzen, wobei die tiefste zwischen 1 und 100 Hz lag. GOEDECKE versuchte die Unübersichtlichkeit, die in Folge der verschiedenen Arbeiten geschaffen war und durch das Auftreten der piezoelektrischen Resonanzen noch vergrössert wurde, zu vermeiden, indem er die zeitliche Ausbildung der Polarisierung bestimmte. Zu diesem Zweck mass er die Spannung in Funktion der Zeit an einem sich entladenden Seignettesalzkapazitor. Aus den Abweichungen der Entladekurve von einem Exponentialgesetz schloss er auf das Vorhandensein von drei verschiedenen Ladungsträgergruppen. Infolge der Remanenz und wohl auch der Leitfähigkeit ist es aber schwierig, aus den so gewonnenen Entladekurven festzustellen, wie und durch welche Träger die grosse Polarisierung bedingt wird. Erwähnt sei auch die DK -Messung von HABLÜTZEL²⁴⁾.

Sicher ist auf jeden Fall, dass die DK bei statischen Messungen einen grösseren Wert hat als bei Radiofrequenzen. Es stellt sich nun die Frage: Gibt es in diesem Frequenzgebiet eine wahre, d. h. allein durch den Mechanismus des Polarisationsvorgangs bedingte Dispersionsstelle der DK , die für alle Seignettesalzkristalle bei der gleichen Frequenz liegt, oder rührt der Abfall von den piezoelektrischen Resonanzstellen her und ist somit dimensionsbedingt?

Wir haben nun untersucht, ob es eine dimensionsunabhängige Dispersionsstelle der DK gibt, die für Kristalle der verschiedensten Grössen bei der gleichen Frequenz liegt. Mit der in Fig. 8 gezeigten Apparatur wurden etwa 50 Seignettesalzkristalle gemessen, indem

mit Hilfe einer Braun'schen Röhre die Spannung am Kristall in Funktion der Frequenz bestimmt wurde.

Das elektrische Feld war immer parallel der a -Achse gerichtet; in der b, c -Ebene waren die Kristalle dagegen verschieden dimensioniert und orientiert. *Es wurde keine Dispersionsstelle gefunden, die nicht mit einer piezoelektrischen Resonanz verbunden, also dimensionsbedingt war.*

2. Die piezoelektrischen Resonanzen

bilden ebenfalls den Gegenstand verschiedener Arbeiten. Unter diesen zeigte sich nun eine prinzipielle Divergenz. Bei BUSCH²⁾ hat die Resonanzfrequenz eines Kristalls in Funktion der Temperatur am oberen seignettelektrischen Curiepunkt ein ausgeprägtes Minimum. Dagegen zeigen Messungen der Resonanzfrequenzen nach DAVIS⁷⁾, MIKHAILOV⁸⁾ und MATTHIAS⁹⁾ einen stetigen Temperaturverlauf. MASON¹⁰⁾ wies wohl als erster klar auf diesen Unterschied hin. Er fand bei seinen Messungen eine ausgeprägte Temperaturabhängigkeit — wie BUSCH — für den Fall, dass der Kristall mit völlig dicht anliegenden Elektroden versehen war. Wurde der Kristall jedoch in einem Kondensator durch ein elektrisches Feld erregt, wobei ihn ein Luftspalt aber von beiden Platten isolierte, dann verhielten sich die gemessenen Resonanzfrequenzen genau so, wie dies von ⁷⁾, ⁸⁾ und ⁹⁾ beschrieben worden war. MASON stellte die Behauptung auf, dass für den Kristall, auf dessen Oberflächen die Elektroden direkt angebracht sind (beklebter Kristall), die Resonanzfrequenz stark temperaturabhängig sei. Befinde sich aber der Kristall im Luftspalt, so sei das elastische Verhalten normal (Fig. 1). Diese Behauptung wurde später von MÜLLER unterstützt¹¹⁾.

Die piezoelektrische Resonanzfrequenz eines bestimmten Kristalls ist eine Funktion der verschiedenen Elastizitätsmoduln, der Dichte ρ und der Dimensionen. Im allgemeinen gibt es eine grosse Anzahl möglicher Schwingungszustände. Um nur *eine* ausgeprägte Resonanzstelle zu erhalten, wird ein Stäbchen betrachtet, dessen Längsdimension gross gegen die beiden anderen ist. Für diese Längsrichtung kann dann ein bestimmter Elastizitätsmodul angegeben werden, der jetzt eine Funktion der ursprünglichen Moduli ist. Die Resonanzfrequenz für Schwingungen in dieser Längsrichtung berechnet sich nach folgender Formel:

$$\nu_R = \frac{2n+1}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (I)$$

L ist die Dimension in der Längsrichtung und E der dieser Richtung entsprechende Elastizitätsmodul. $n = 0$ entspricht der

Grundfrequenz. Die Dichte ϱ verhält sich im ganzen betrachteten Temperaturbereich normal. Die ausgeprägte Temperaturabhängigkeit kann also nur durch eine der die Funktion E bildenden Größen hervorgerufen werden. Dieser Gedanke liegt den Arbeiten von MASON¹⁰⁾ und MÜLLER zugrunde¹¹⁾.

Es ist nun zu erwarten, dass mechanische statische Messungen des Elastizitätsmoduls in der Schwingungsrichtung dasselbe Resultat ergeben. Mit anderen Worten: Würde der Elastizitätsmodul

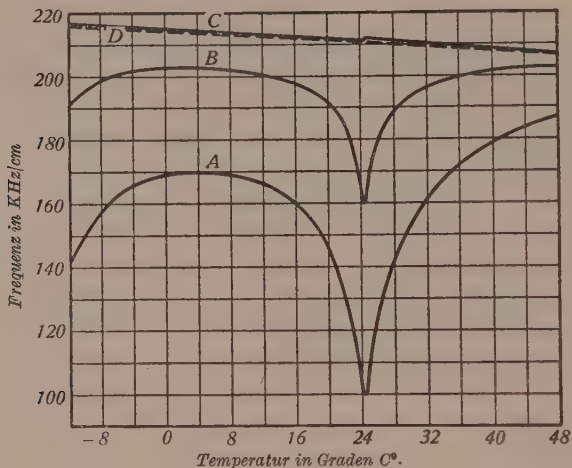


Fig. 1.

Verlauf der Resonanzfrequenz mit der Temperatur.

- A: Resonanz eines vollständig beklebten Kristalls.
- B: Antiresonanz für den gleichen Fall.
- C: Resonanz und Antiresonanz eines im Luftspalt schwingenden Kristalls.
- D: Normaler Temperaturverlauf der Resonanzfrequenz.

(Nach MASON: Phys. Rev. Bd. 55; S. 775; 1939.)

am isolierten Kristall gemessen, so müsste sein Verhalten in Funktion der Temperatur normal sein. Für den Fall aber, dass die Oberflächen leitend gemacht und kurzgeschlossen würden, sollte er eine ausgeprägte Temperaturabhängigkeit zeigen. Seignettesalz zeigt sein bekanntes anomales piezoelektrisches Verhalten nur für Schubbeanspruchungen in der b, c -Ebene. Aus diesem Grund interessiert hier auch nur der Elastizitätsmodul eines Stäbchens, dessen Längsrichtung einen Winkel von 45° mit der b - und c -Achse und einen solchen von 90° mit der a -Achse bildet; künftig als 45° -Stäb-

chen bezeichnet. Statische Messungen in dieser Richtung sind von ISELY¹²⁾, MANDELL¹³⁾ und HINZ¹⁴⁾ ausgeführt worden, wobei jedoch die Resultate der drei Autoren völlig voneinander abweichen. Die von den beiden Erstgenannten gefundenen Werte sind auch für den isolierten Kristall bedeutend kleiner als der Wert, den man mittels Resonanzfrequenzmessungen von 7), 8) und 9) aus Formel I erhalten würde. Diesen Wert findet allein HINZ. Obwohl MANDELLS Werte noch etwa 50% grösser sind als diejenigen ISELYS, so sind sie doch noch so klein, dass HINZ darüber schreibt: „Eine Erklärung für diese Diskrepanz gibt es nicht“. Da HINZ auf statischem Weg den gleichen Wert findet, wie er durch dynamische Messungen erhalten wird, ist anzunehmen, dass nicht von einem prinzipiellen Unterschied zwischen statischem und dynamischem Elastizitätsmodul gesprochen werden kann. Wie werden weiter unten zeigen, dass alle besprochenen Messungen miteinander gut in Einklang gebracht werden können.

Wie eingangs erwähnt, wurde nach elektrischen Dispersionsstellen rein atomarer oder molekularer Natur bei kleinen Frequenzen gesucht, indem Kristalle der verschiedensten Grössen und Orientierungen, im Bereich der Radiowellen gemessen wurden. Ausser piezoelektrischen Resonanzstellen konnte, wie schon gesagt, nichts gefunden werden. Die Kristalle waren mit einer im Vakuum aufgedampften Silberschicht als Elektroden versehen, derart, dass das erregende Feld parallel der a -Achse gerichtet war. Neben den temperaturabhängigen Resonanzfrequenzen wurden nun auch solche bemerkt, die praktisch temperaturunabhängig waren. Die temperaturabhängigen Resonanzfrequenzen hatten eine ganz aussergewöhnlich grosse Resonanzbreite, während die temperaturunabhängigen sich als sehr scharf, ähnlich denen des Quarzes erwiesen. TASCHEK und OSTERBERG¹⁵⁾ schlossen aus der Existenz der breiten Resonanzkurve auf einen anomal grossen mechanischen Viskositätskoeffizienten. Die atomare Ursache dieser Anomalie haben sie aber nicht weiter untersucht. MÜLLER¹¹⁾ erklärt die übergrosse Resonanzbreite der piezoelektrischen Schwingungen durch eine Spannungsabhängigkeit des Elastizitätsmoduls und einer daraus resultierenden Frequenzmodulation. (Eine kurze Rechnung auf Grund der von ihm angegebenen Formel, auf die wir später noch zurückkommen werden, zeigt die Unhaltbarkeit dieser Behauptung.) Die Ursache für die ausserordentlich grosse Halbwertsbreite der piezoelektrischen Resonanzkurven werden wir weiter unten erklären können, wobei sich zeigen wird, dass sie in engstem Zusammenhang mit der Anomalie des Elastizitätsmoduls und der DK steht. Es ist das der Zweck dieser Arbeit.

II. Theoretische Ueberlegungen.

Obwohl bei den Ferromagnetika und den Seignette-elektrika die atomaren Mechanismen grundverschieden sind, so weisen doch beide in ihrem makroskopischen Verhalten starke Ähnlichkeiten auf. Die Tatsache, dass der Elastizitätsmodul der Ferromagnetika sich unterhalb des Curiepunkts anomal verhält, ist schon seit langem bekannt, doch nie in Verbindung mit den Seignettelektrika betrachtet worden. Der sogenannte ΔE -Effekt der Ferromagnetika und dessen Folgen stehen aber in engster Analogie zur Anomalie des Elastizitätsmoduls der Seignettelektrika und der ausserordentlich grossen Dämpfung der entsprechenden piezoelektrischen Schwingungen. Wie wir sehen werden, lassen sich diese Erscheinungen auf einen *elektrischen* ΔE -Effekt zurückführen.

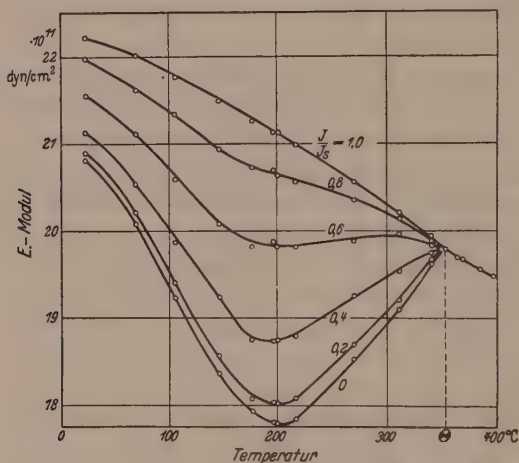


Fig. 2.

Der Elastizitätsmodul von Nickel in Abhängigkeit von der Temperatur für verschiedene Werte der relativen Sättigung J/J_s . [Nach S. SIEGEL u. S. L. QUIMBY: Phys. Rev. Bd. 49 (1936) S. 663.]

Als ΔE -Effekt der Ferromagnetika bezeichnet man die Erscheinung, dass der Elastizitätsmodul von der makroskopischen Sättigung der Substanz abhängt und im magnetisch gesättigten Zustand grösser ist als im ungesättigten. Der Elastizitätsmodul einer ferromagnetischen Substanz zeigt am Curiepunkt einen stark unstetigen Verlauf (Fig. 2). Wird jetzt durch ein äusseres Feld das Ferromagnetikum gesättigt, so verschwindet die Unstetigkeit am Curiepunkt vollkommen (vereinzelte Spezialfälle ausgenommen). Beim gesättigten Ferromagnetikum haben wir nur noch die normale Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls von der Temperatur.

Die Anomalie des Elastizitätsmoduls hat ihren Ursprung in der Magnetostriktion. Im magnetisch ungesättigten Zustand stellen sich unterhalb des Curiepunktes bei Zug oder Druck die Vektoren der spontanen Magnetisierung derart ein, dass die damit verbundene Magnetostriktion gleichsinnig mit dem äusseren Zug oder Druck wirkt, so dass das Material nach aussen hin weicher erscheint, der Elastizitätsmodul also sinkt. Wird durch ein genügend starkes Gleichfeld die spontane Magnetisierung festgehalten, so zeigt die Substanz wieder ein normales elastisches Verhalten (Fig. 2). Es gibt wohl Abweichungen von diesem Verhalten, die aber für unseren Fall weniger wichtig sind¹⁶⁾.

R. BECKER¹⁶⁾ leitet auf anschaulichem Weg her, um wieviel sich der Elastizitätsmodul ändert, wenn das Material vom völlig unmagnetischen Zustand bis zur Sättigung magnetisiert wird, und er kommt zu folgender Formel:

$$\frac{\Delta E}{E_0 \cdot E} = c \cdot \left(\frac{\lambda_s}{J_s} \right)^2 \cdot \chi_a \quad (\text{II})$$

λ_s = Sättigungsmagnetostriktion

J_s = Sättigungspolarisation

χ_a = Anfangssuszeptibilität

E = Elastizitätsmodul (Index 0 bezeichnet den Wert für den gesättigten Zustand)

wobei die Konstante c von der Grössenordnung 1 ist und davon abhängt, ob die durch die inneren Spannungen verursachte Deformationsenergie klein oder gross im Verhältnis zur Orientierungsenergie der Polarisation im Gitter ist.

Wird ein Eisenstab gedrückt, so stellen sich die Bereiche der spontanen Magnetisierung senkrecht zur Druckrichtung, im Falle eines Zuges dagegen parallel und antiparallel zu dieser Richtung. In allen Fällen wirkt aber die mit der Drehung der Bereiche verbundene Magnetostriktion in der gleichen Richtung und im gleichen Sinn wie die äussere Kraft¹⁶⁾ ¹⁷⁾. In allen Fällen bleibt das Material nach aussen hin unpolarisiert, da die Magnetostriktion ein quadratischer Effekt ist und somit beide Richtungssinne der Magnetisierung im Mittel gleich besetzt sind.

Mittels der Magnetostriktion ist es möglich, einen Eisenstab in einer seiner Resonanzfrequenzen zu erregen. Diese Resonanzen sind bekanntermassen ausserordentlich stark gedämpft¹⁶⁾. Diese Dämpfung beruht bei den Ferromagnetika im wesentlichen auf drei Ursachen: Mikroskopische Wirbelströme an den „Wänden“ der Weiss'schen Bezirke, makroskopische Wirbelströme und Hysteresisverluste¹⁶⁾. Wird der Stab rein mechanisch zu Schwingungen angeregt, so sind auch dann noch Hysteresisverluste vorhanden, die

jetzt nur magnetomechanischer Art sind. Die von der Hysteresis herrührende Dämpfung wird, solange nicht Sättigung erreicht wird, mit der Schwingamplitude zunehmen. Diese Zunahme der Dämpfung und der damit zusammenhängende Verlauf des Elastizitätsmoduls sind von KORNETZKI¹⁸⁾ untersucht worden. Er findet für die Spannungs-Dehnungskurve den in Fig. 3 dargestellten Zusammenhang. Im Bereich kleiner Amplituden (um nicht zur Sättigung zu gelangen) nimmt die Dämpfung mit der Amplitude zu, der Elastizi-

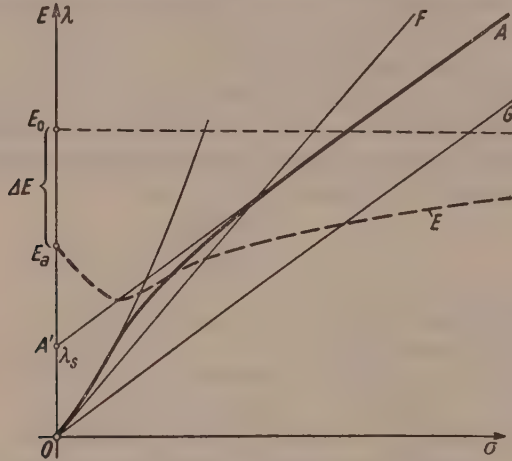


Fig. 3.

OG: Spannungs-Dehnungsverlauf, der einem konstanten Elastizitätsmodul entspricht.

OA: Wirklicher Verlauf.

λ_s ist der Sättigungswert der zusätzlichen Dehnung.

(Nach KORNETZKI: Wiss. Veröff. Siemens-Werk, Bd. 17; S. 48; 1938.)

tätsmodul dagegen ab. Das Verhalten der beiden Grössen ist durch Formel (III) miteinander verknüpft.

$$-\frac{1}{E_0} \cdot \frac{dE}{df} = \frac{3}{4} \frac{d\lambda}{df} \quad (\text{III})$$

λ = logarithmisches Dämpfungsdekrement

f = Dehnungsamplitude.

Eine Abnahme des Elastizitätsmoduls mit zunehmender Amplitude, kleine Werte vorausgesetzt, wurde bereits von FÖRSTER und KÖSTER¹⁹⁾ experimentell festgestellt. Wie aus Fig. 3 weiter ersichtlich ist, tritt eine Umkehr bei immer mehr wachsender Amplitude ein, indem der Elastizitätsmodul wieder zu, der relative Anteil der Dämpfung durch Hysteresisverluste dagegen wieder abnimmt; ein Verhalten, das ebenfalls (III) entspricht.

Da die Dämpfung amplitudenabhängig ist, geschieht das Abklingen jeder Schwingung nicht mehr nach einem Exponentialgesetz. Die Dämpfung ist nicht mehr konstant und kann deshalb jetzt auch nicht ohne weiteres aus der Halbwertsbreite der Resonanzkurve nach Formel (IV) bestimmt werden.

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} A \quad (IV)$$

In seiner Arbeit¹⁸⁾ unterscheidet KORNETZKI somit auch zwischen der wahren und der nach Formel IV bestimmten scheinbaren Dämpfung. Er findet, dass letztere grössere Werte ergibt, falls die Dämpfung mit der Amplitude zunimmt.

Der durch Hysteresisverluste bedingte Anteil der Dämpfung lässt sich durch ein genügend starkes Gleichfeld vermeiden, indem dieses die spontan magnetisierten Bereiche am Umlappen verhindert.

Wie schon ausgeführt, zeigen bei Seignettesalz die durch den Piezoeffekt erregten Resonanzschwingungen eine ganz aussergewöhnliche Dämpfung, die offensichtlich in Analogie zur Dämpfung der magnetostriktiven Schwingungen steht. Bei dem Dielektrikum fällt aber jetzt der Dämpfungsbeitrag durch mikroskopische und makroskopische Wirbelströme weg, so dass nur der durch Hysteresisverluste bedingte Anteil bleibt. Da der Piezoeffekt linear ist, werden hier aber auch bei rein mechanischer Anregung elektromechanischer und rein elektrischer Anteil bestehen bleiben.

Äusserlich zeigen also Seignettelektrikum und Ferromagnetikum im elastischen Verhalten eine bemerkenswerte Analogie. Man könnte nun annehmen, dass alle bei den Ferromagnetika aufgestellten Theorien sich ohne weiteres auf das Seignettelektrikum übertragen liessen. Das ist nun nicht der Fall, weil wir auch makroskopisch eine Verschiedenheit zwischen beiden haben. Während beim ferromagnetischen Einkristall die Magnetisierung jede Richtung, allerdings leichter oder schwerer, einnehmen kann, haben wir beim Seignettesalz nur *eine* mögliche Richtung der spontanen Polarisierung, nämlich parallel und antiparallel der a -Achse. Ein Zustandekommen von elastischen Spannungen durch Herausdrehen der Polarisierung aus der a -Achse, wie das beim Eisen für entsprechende Richtungen der Fall ist, tritt hier nicht auf. Dafür kommt in erster Linie die als Piezoeffekt mit dem Umlappen der spontanen Polarisierung verbundene Deformation in Frage. Der Piezoeffekt nimmt bekanntlich beim Seignettelektrikum grössere Werte an, als bei irgendeinem anderen bekannten Dielektrikum.

Es muss noch erwähnt werden, dass es auch einen quadratischen Piezoeffekt gibt, welcher in formaler Analogie zur Elektrostriktion steht. Die Formel für die Deformation in einem elastischen Körper, der zugleich piezoelektrisch ist, lautet nach OSTERBERG und COOKSON²⁰⁾:

$$x_k = \sum_{n=1}^6 s_{kn} X_n + \sum_{i=1}^3 d_{ik} E_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ijk} E_i E_j \quad (\text{V})$$

X_n = Mechanische Spannung

E_i = Elektrische Feldstärke

s_{kn} = Elastizitätskoeffizienten

d_{ik} = Piezoelektrische Moduli.

Die 216 Konstanten g_{ijk} , von OSTERBERG als piezodielektrische Moduli bezeichnet, lassen sich nach folgendem Schema auf die Matrix der 36 piezooptischen Konstanten g_{hk} nach PÖCKELS zurückführen.

$$\begin{aligned} h &= 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4 \ 5 \ 5 \ 6 \ 6 \\ i &= 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 2 \ 3 \ 1 \ 2 \ 1 \\ j &= 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 3 \ 1 \ 3 \ 1 \ 2 \end{aligned}$$

Die entsprechenden Matrizen lauten für Seignettesalz:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{matrix} d_{ik} \end{matrix} \right\| &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix} \\ \left\| \begin{matrix} g_{hk} \end{matrix} \right\| &= \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & 0 & 0 & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{66} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Man sieht, dass im Fall eines zur a -Achse parallelen elektrischen Feldes, der Kristall in erster Näherung nur auf Schub beansprucht wird. In zweiter Näherung kommen auch die Normalkräfte x_x ; y_y ; z_z hinzu. Sie werden aber nur einen von dem Feldrichtungssinn unabhängigen Zug oder Druck des Kristalls bedingen, im Gegensatz zum linearen Piezoeffekt. Diesem werden sie sich einfach überlagern, indem sie eine Dichteänderung des Kristalls zur Folge haben. Eine reine Kontraktion x_x bei Anlegen eines Feldes parallel der a -Achse wurde von MÜLLER²¹⁾ experimentell gefunden. Diese Kon-

traktion war unabhängig vom Richtungssinn des Feldes und der Grössenordnung nach etwa 10^3 mal grösser als irgendein bekannter elektrostriktiver Effekt.

Im Curiegebiet ist der Modul d_{14} beim Seignettesalz etwa 10^3 mal grösser als die Moduli d_{25} und d_{36} . d_{14} zeigt zugleich Hysteresis und eine ausgeprägte Temperaturabhängigkeit. Wenn also ein Seignettesalzkristall auf den Schub y_z beansprucht wird, klappt seine innere spontane Polarisierung in den entsprechenden Richtungssinn der a -Achse. Wird auf einen Kristallstab, dessen Längsrichtung unter 45° zur b - und c -Achse liegt, ein Zug oder Druck in der Längsrichtung ausgeübt, so wird die spontane Polarisierung sich nach dem entsprechenden Richtungssinn der a -Achse ausrichten, wodurch sich die zu dieser Achse senkrechten Flächen mit einander entgegengesetztem Vorzeichen aufladen. Der durch Ausrichten der spontanen Polarisierung bedingte Piezoeffekt wird nun eine zusätzliche Deformation im Richtungssinn der ursprünglichen ausüben.

Man könnte annehmen, dass der Kristall sich auf diese Weise gleich spontan bis zur Sättigung polarisieren und somit zu einem Elektreten würde. Dem Vorgang ist nun durch Entstehen der Oberflächenladung, sowie durch innere Spannungen, eine Grenze gesetzt. Die Oberflächenladung kann man durch Anbringen kurzgeschlossener Elektroden vermeiden; es bleiben also nur noch die inneren Spannungen. Die Überlegung, dass die inneren Spannungen die völlige Polarisierung begrenzen, bildet aber gerade den Ausgangspunkt für die Ableitung der Formel (II) von BECKER²².

Bei einer formalen Übertragung berechnet sich jetzt der ΔE -Effekt für das Seignettelektrikum nach folgender Formel:

$$\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} = \frac{\Delta E}{E_0 \cdot E} = C \left(\left(\frac{\Delta l}{l} \right)_s \right)^2 \frac{\epsilon_a - 1}{4 \pi} \quad (\text{VI})$$

$\left(\frac{\Delta l}{l} \right)_s$ = bei elektrischer Sättigung erfolgte Längenänderung

$\epsilon_a = DK$ in Richtung der a -Achse

P_s = Sättigungspolarisation

E = Elastizitätsmodul; Index $_0$ bezeichnet den normalen Wert, wie er im Luftspalt oder bei vollständiger Sättigung gemessen wird.

Formel (VI) lässt sich auch thermodynamisch herleiten.

Die Arbeit δA , die durch das elektrische Feld \mathcal{E} und die mechanische Kraft Z am Kristall geleistet wird, ist gegeben durch

$$\delta A = \mathcal{E} dP + Z dL$$

P bedeutet hierbei die makroskopische Polarisierung.

Man findet entsprechend für die freie Energie F

$$dF = -SdT + \mathfrak{E}dP + ZdL$$

und das Gibb'sche Potential

$$\Phi = F - \mathfrak{E} \cdot P - Z \cdot L$$

Da

$$d\Phi = -SdT - Pd\mathfrak{E} - LdZ$$

ein totales Differential ist, ergibt eine zweimalige Differentiation von $d\Phi$ nach \mathfrak{E} und Z

$$\left(\frac{\partial P}{\partial Z}\right)_{\mathfrak{E}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{E}}\right)_Z \quad (\text{VII})$$

In Formel (VII) ist enthalten, dass die spontane Polarisation sich derart einstellt, dass die damit verbundene piezoelektrische Deformation die ursprüngliche verstärkt, d. h. unter dem Einfluss einer mechanischen Spannung richtet sich die spontane Polarisation so aus, wie wenn sie durch ein elektrisches Feld hervorgerufen würde, dessen Richtungssinn derart ist, dass der damit verbundene Piezoeffekt im gleichen Sinn wie die mechanische Spannung auf den Kristall wirkt.

Die Polarisation ist eine Funktion der elektrischen Feldstärke und der mechanischen Spannung. Wir haben nun zwischen zwei verschiedenen Elastizitätsmoduln zu unterscheiden: dem Elastizitätsmodul bei konstanter Polarisation: E_P , wenn also ein Umklappen der Polarisation nicht stattfinden kann und bei konstantem äusseren Feld: $E_{\mathfrak{E}}$, das z. B. auch 0 sein kann. Aus der Definition des Elastizitätsmoduls ergeben sich dann die folgenden Formeln:

$$\frac{1}{E_P} = \frac{1}{l_0} \left(\frac{\delta l}{\delta \sigma}\right)_P \quad \frac{1}{E_{\mathfrak{E}}} = \frac{1}{l_0} \left[\left(\frac{\delta l}{\delta \sigma}\right)_P + \left(\frac{\delta l}{\delta P}\right)_{\sigma} \left(\frac{\delta P}{\delta \sigma}\right)_{\mathfrak{E}} \right]$$

Formel (VII) ergibt auf Spannung und relative Längenänderung umgeformt

$$\frac{1}{l_0} \left(\frac{\delta l}{\delta \mathfrak{E}}\right)_{\sigma} = \left(\frac{\delta P}{\delta \sigma}\right)_{\mathfrak{E}}$$

wobei nach der Kettenregel gilt

$$\left(\frac{\delta l}{\delta \mathfrak{E}}\right)_{\sigma} = \left(\frac{\delta l}{\delta P}\right)_{\sigma} \left(\frac{\delta P}{\delta \mathfrak{E}}\right)_{\sigma}$$

In die Formeln der Elastizitätsmoduln eingesetzt, erhalten wir für

die Differenz der reziproken Werte und somit für den ΔE -Effekt

$$\frac{1}{E_{\mathfrak{E}}} - \frac{1}{E_P} = \frac{\left[\frac{1}{l_0} \left(\frac{\partial l}{\partial \mathfrak{E}} \right)_{\sigma} \right]^2}{\left(\frac{\partial P}{\partial \mathfrak{E}} \right)_{\sigma}}$$

oder nach anderer Substitution

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \sigma} \right)_{\mathfrak{E}} = \frac{1}{l_0} \left(\frac{\partial l}{\partial P} \right)_{\sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial \mathfrak{E}} \right)_{\sigma}$$

für den ΔE -Effekt

$$\frac{\Delta E}{E_0 \cdot E} = \left[\frac{1}{l_0} \left(\frac{\partial l}{\partial P} \right)_{\sigma} \right]^2 \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial \mathfrak{E}} \right)_{\sigma} \quad (\text{VIII})$$

Man sieht, dass Formel (VI), die auf anschaulichem Weg bei den Ferromagnetika gefunden wurde und die wir formal auf das Seignettelektrikum übertrugen, nur eine Näherung darstellt, indem der Quotient

$$\frac{1}{l_0} \left(\frac{\partial l}{\partial P} \right)_{\sigma} \quad \text{dort durch} \quad \frac{\left(\frac{\Delta l}{l} \right)_s}{P_s} \quad \text{ersetzt wird.}$$

Dieser Quotient ist — vor allem bei kleinen Amplituden — von der Temperatur unabhängig, wie aus den Messungen von NORGORDEN²³⁾ hervorgeht. Für $\frac{\left(\frac{\Delta l}{l} \right)_s}{P_s}$ stimmt dies mit den von HINZ¹⁴⁾ und

HABLÜTZEL²⁴⁾ gefundenen Werten nur in der Umgebung des Curiepunkts. Auch ist der absolute Wert grösser als bei kleinen Amplituden, was, wie noch gezeigt werden wird, dem Sinken der Resonanzfrequenz mit wachsender Amplitude entspricht.

In der thermodynamisch abgeleiteten Formel kommt die von BECKER eingeführte Konstante c nicht mehr vor. Dadurch ist die früher gemachte Annahme gerechtfertigt, dass sie in der Grössenordnung von 1 liegt. Es ist möglich, dies auch auf andere Weise zu zeigen:

In der Formel (VI) sind alle Grössen bis auf c bekannt. Der ΔE -Effekt kann aus den Resonanzfrequenzmessungen von MASON rein experimentell ermittelt werden. Unter Benützung der ebenfalls von MASON¹⁰⁾ gemessenen DK kann er aber auch berechnet werden, indem c durch Anpassung eines Werts erhalten wird. Für $\frac{1}{l_0} \left(\frac{\partial l}{\partial P} \right)_{\sigma}$ wurde der von NORGORDEN²³⁾ gefundene Wert an Stelle von $\frac{\left(\frac{\Delta l}{l} \right)_s}{P_s}$ eingesetzt, da Messungen der Resonanzfrequenz immer

nur mit Feldstärken ausgeführt werden, die weit von der Sättigungsfeldstärke entfernt sind. Fig. 4 gibt die graphische Darstellung der experimentell gefundenen, sowie der berechneten Werte.

Nach NORGORDEN findet man bei einer Feldstärke von 47 V/cm $\frac{1}{l_0} \left(\frac{\partial l}{\partial P} \right)_\sigma = 1,38 \cdot 10^{-7}$ pro ESE, und daraus für die Konstante $c = 5,6$.

Setzt man die Werte von HINZ¹⁴⁾ und HABLÜTZEL²⁴⁾ für den Sättigungsquotienten ein, so erhält man für

$$\frac{\left(\frac{\Delta l}{l} \right)_s}{P_s} = 5,37 \cdot 10^{-7} \text{ pro ESE, und daraus } c = 0,27.$$

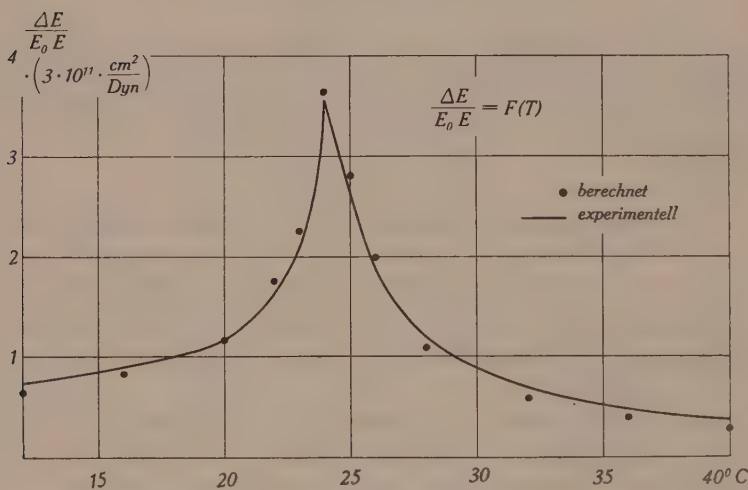


Fig. 4.

Vergleich der experimentell ermittelten Werte des ΔE -Effekts (aus Resonanzfrequenzmessungen von MASON umgerechnet) mit den nach Formel VIII berechneten. (Für die DK wurden die von MASON angegebenen Werte eingesetzt.)

Für Fig. 4 spielt der Unterschied der beiden Quotienten keine Rolle, da beide temperaturunabhängig sind (letzterer nur in der Umgebung des Curiepunkts). In der graphischen Darstellung wurde nur ein Wert angepasst, folglich würde sich mit dem Quotienten nur die Konstante ändern. Würde man diese dagegen unverändert lassen, so ergibt sich, wenn auch vorerst nur qualitativ, die später noch mitzuteilende Beobachtung, dass der ΔE -Effekt spannungsabhängig ist, indem er mit wachsender Feldstärke zunimmt.

Durch ein überlagertes elektrisches Gleichfeld wird der Kristall im entsprechenden Richtungssinn polarisiert. Ein Teil der Polarisation wird auch noch beim Schwingen durch dieses Feld festge-

halten und kann somit keinen Beitrag zum ΔE -Effekt und zur Dämpfung liefern. Es kann aber nicht erwartet werden, dass die ganze Polarisation festgehalten wird, da der in Resonanz schwingende Kristall sich durch den Piezoeffekt ein eigenes Wechselfeld bildet, das in der einen Hälfte der Periode dem überlagerten Gleichfeld entgegengesetzt gerichtet ist. So erklärt sich, wie später noch berichtet werden wird, dass selbst bei einem überlagerten Gleichfeld vom Fünffachen des Sättigungswerts immer noch ein gewisser Teil der Polarisation umklappt und deshalb ein Abweichen des Elastizitätsmoduls vom normalen Verlauf bedingt. Um diesen Verlauf auch im Curiegebiet mit beklebten Elektroden normal halten zu können, müsste man Feldstärken anwenden, die den Kristall zerstören würden. Da beim Eisen kein Piezoeffekt auftritt, gelingt es dort schon mit der Sättigungsfeldstärke, Unstetigkeiten des Elastizitätsmoduls am Curiepunkt zu verhindern.

Auch die Ursache der grossen Dämpfung der Resonanzfrequenzen ist nach dem Ausgeführten verständlich. Es sind Hysteresisverluste, elektrischer und mechanischer Natur, hervorgerufen durch das Umklappen der spontanen Polarisation. Durch Anlegen eines Gleichfeldes können sie vermindert werden. Zum gleichen Zweck kann man den Kristall auch im Luftspalt schwingen lassen. Die auf den Kristall wirkende Feldstärke ist dann infolge der hohen DK so klein, dass ein Umklappen nicht mehr erfolgen kann und man auch wieder den normalen Elastizitätsmodul misst. Dasselbe erreicht man angenähert beim vollständig beklebten Kristall, wenn man die erregende Feldstärke so klein wie möglich hält. Eine andere Erregung wurde von HILTSCHER²⁵⁾ angewandt, der die Elektroden wohl aufklebte, sie aber nur einen kleinen Teil der Kristalloberfläche bedecken liess. HILTSCHER erhielt so durch Cady'sche Leuchtfiguren ebenfalls den normalen Elastizitätsmodul.

Nun ist es möglich, die Differenz zwischen den verschiedenen statischen Messungen des Elastizitätsmoduls zu erklären. Wir rufen uns zu diesem Zweck nochmals Fig. 3 in Erinnerung, d. h. den Zusammenhang zwischen mechanischer Spannung und Dehnung eines spontan polarisierten Mediums. Danach steigt der Elastizitätsmodul von einer gewissen mechanischen Spannung an, was die Erklärung dafür liefert, dass Isely¹²⁾ bei kleinen Drucken kleinere Werte erhielt als MANDELL¹³⁾, der bei einem grösseren Druck arbeitete. HINZ¹⁴⁾ endlich erhielt den normalen Wert, da er den Kristall mit 26 kg/cm^2 belastete, was ungefähr dem Sättigungsdruck entspricht. Mit wachsendem Druck muss aber, wie man ohne weiteres sieht, der Unterschied zwischen dem normalen Elastizitäts-

modul und dem anomalen verschwinden, da die zusätzliche Dehnung einem Grenzwert, welcher der Sättigungsdeformation entspricht, zustrebt.

III. Apparatur und Messergebnisse.

1. Der reine ΔE -Effekt.

Die Verschiebung der Resonanzfrequenzen mit wachsendem überlagerten Gleichfeld wurde bereits von MÜLLER¹¹⁾ festgestellt, jedoch nur für einzelne Temperaturen und dazu an einer Platte, bei der die einzelnen Schwingungen nicht zugeordnet werden konnten.

Es wurden jetzt an einem Stäbchen, dessen Elektrodenflächen senkrecht zur a -Achse lagen und dessen Längsrichtung unter 45° zur b - und c -Achse orientiert war, die Resonanzfrequenz über das

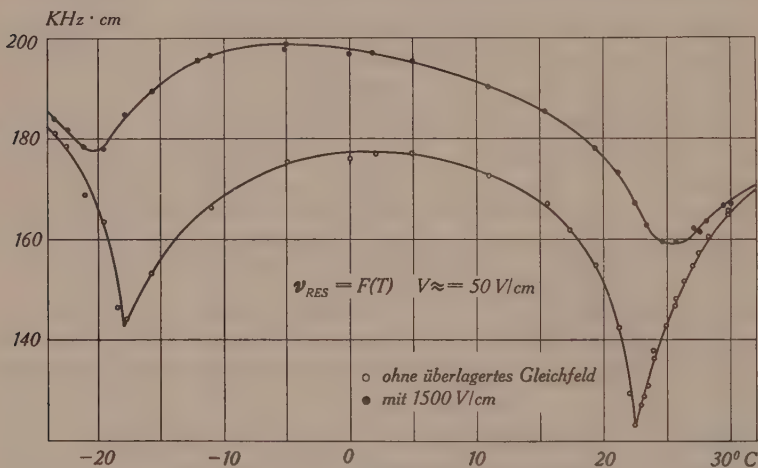


Fig. 5.

Verlauf der Resonanzfrequenz eines beklebten 45° -Stäbchens im Curiegebiet, mit und ohne überlagertes Gleichfeld.

ganze Curiegebiet mit und ohne überlagertem Gleichfeld bestimmt. Die Elektroden bestanden aus einer im Vakuum aufgedampften Silberschicht. Das überlagerte Gleichfeld betrug 1500 V/cm, was dem Fünffachen der Sättigungsfeldstärke entspricht. Das Resultat ist in Fig. 5 dargestellt. Die Messung geschah auf zwei Arten:

a) Die erste Methode war eine rein qualitative, dafür aber sehr anschaulich. Mit Hilfe eines Frequenzmodulators (Wobbler) wurde der Strom durch den Kristall in Funktion der Frequenz über eine Breite von ungefähr 50 KHz auf dem Schirm eines Kathoden-

strahloszillographen sichtbar gemacht. Die gesamte Anordnung zeigt Fig. 6. Der Wobbler stellt einen Generator der Frequenz 4 Mhz dar, der mit Hilfe einer äusseren Synchronisationsspannung periodisch eine Änderung seiner Eigenfrequenz um $\max. \pm 25$ KHz erfährt. Das geschieht durch eine als variable Selbstinduktion geschaltete Penthode nach folgendem Prinzipschema, in Fig. 7 dargestellt. Wie

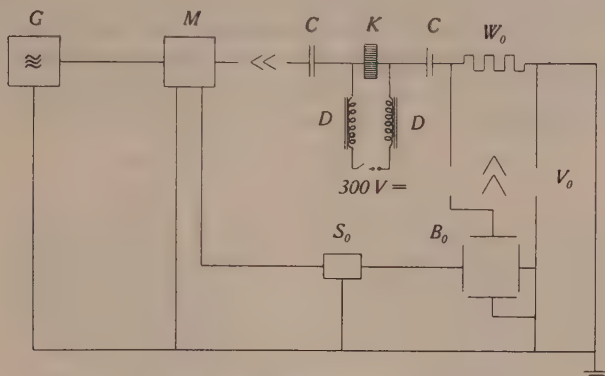


Fig. 6.

Apparatur zur Aufnahme der Resonanzkurve.

- | | |
|---|--|
| G : Hochfrequenzgenerator (4 Mhz + n KHz) | S_0 : Synchronisationsgerät |
| M : Frequenzmodulator | B_0 : Braun'sche Röhre |
| C : Kapazitäten | V_0 : Breitbandverstärker |
| K : Kristall | W_0 : Eingangswiderstand des Verstärkers |
| D : Niederfrequenzdrosseln | |

Die mit dem Index $_0$ bezeichneten Schaltelemente sind im Kathodenstrahloszillographen Philips GM 3152 eingebaut.

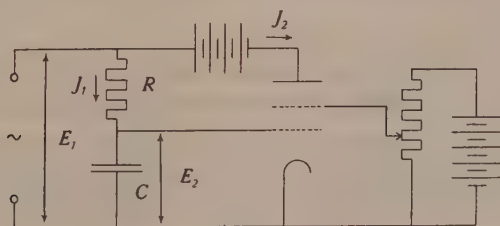


Fig. 7.

Prinzipschema des Frequenzmodulators (Wobbler).

Der Widerstand R sei gross gegenüber dem kapazitiven Widerstand. Dann ist

$$R \gg \frac{1}{\omega C} \quad J_1 = \frac{E_1}{R} \quad E_2 = \frac{J_1}{i\omega C}$$

$$J_2 = S E_2 \quad S \cdot E_2 = \frac{E_1 \cdot S}{i\omega C R}$$

S sei die Steilheit der Röhre, demnach ist

$$J_2 = \frac{E_1}{i\omega L} \quad \text{und} \quad L = \frac{C \cdot R}{S}$$

man sieht, ist also die Selbstinduktion des Systems eine Funktion der Steilheit der Röhre und somit der Schirmgitterspannung. Diese wird durch die Kippspannung des Oszillographen geliefert. Erhält nun das Gitter einer Mischröhre im Wobbler eine Frequenz von $4 \text{ Mhz} + n \text{ KHz}$, so entsteht als Differenzfrequenz $n \text{ KHz}$, die ihrerseits jetzt mit $\pm 25 \text{ KHz}$ frequenzmoduliert ist, falls die Schirmgitterspannung, wie oben beschrieben, variiert wird. Da dieser Vorgang synchron mit dem Oszillographenstrahl läuft, wird jedem Abszissenpunkt ein bestimmter Frequenzwert zugeordnet. Schickt

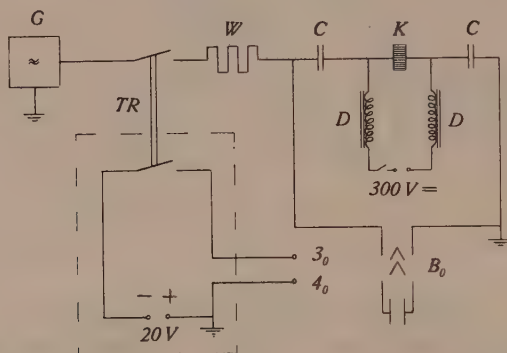


Fig. 8.

Apparatur zur direkten Bestimmung der Resonanzfrequenz.

G: Generator

W: Widerstand, um Belastungsschwankungen des Generators zu vermeiden.

C: Kapazitäten

D: Niederfrequenzdrosseln

K: Kristall

B₀: Braun'sche Röhre im Oszillograph

Tr: Zwei einpolige Schalter eines Telephonrelais

$\begin{matrix} 3_0: \\ 4_0: \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} 3_0: \\ 4_0: \end{matrix}} \right\} \text{ Entsprechende Zuführungen zu dem Philips Oszillograph GM 3152}$

Die beiden unteren Schaltelemente beziehen sich auf die später noch zu beschreibende Aufnahme der Abklingkurven. Im Fall der Bestimmung der Resonanzfrequenzen ist der obere Schalter geschlossen und der gestrichelte Teil nicht in Betrieb.

man das Frequenzgemisch durch den Kristall und misst den Strom durch die Vertikalablenkung des Oszillographen, so erhält man direkt die Resonanzkurve. Für eine ausführliche Beschreibung des Wobblers sei auf Philips Technische Rundschau 1939 verwiesen.

b) Als zweite Methode wurden die Resonanzfrequenzen mittels eines geeichten Generators direkt bestimmt. Die Schaltung hierfür ist in Fig. 8 wiedergegeben. Die Spannung wird in Funktion der Frequenz auf einer Braun'schen Röhre beobachtet. Die Resonanz

machte sich durch Sinken (die Antiresonanz durch Steigen) des Spannungsabfalls am Kristall bemerkbar. Unsere Messungen beziehen sich sämtlich auf die Resonanz.

Es sei noch kurz auf den Unterschied zwischen den beiden Methoden eingegangen. Die Wobblermethode ist sehr anschaulich. Der Kristall wird geschont, da er sich immer nur Bruchteile einer Sekunde in Resonanz befindet. Auf der anderen Seite ist es nur mit der zweiten, sogenannten stationären Methode möglich, die Werte der Resonanzfrequenz exakt zu bestimmen. Geschieht das mit einer zu starken Wechselspannung, so erwärmt sich der Kristall, wodurch sich dann im Curiegebiet die Resonanzfrequenz stark ändert.

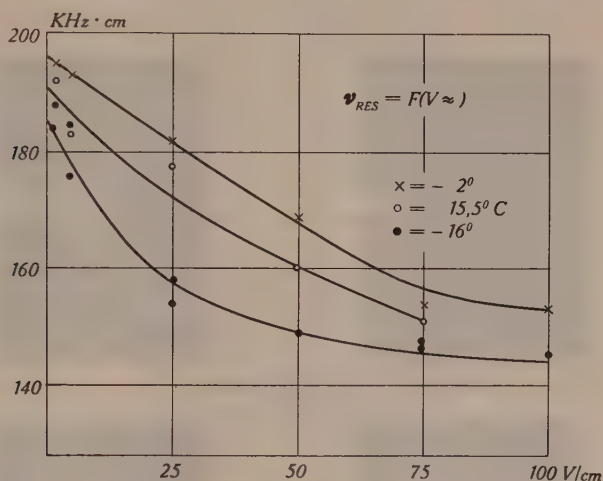
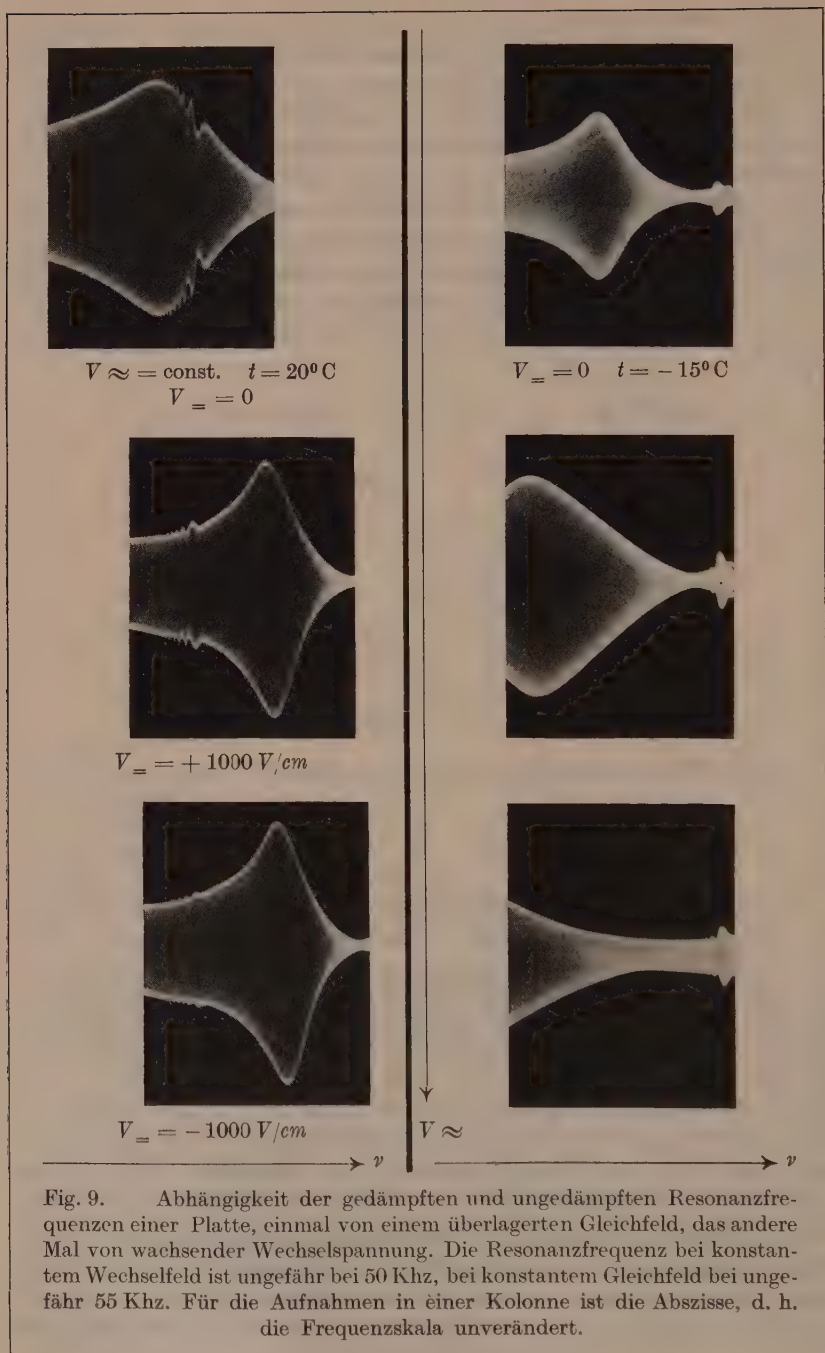


Fig. 10.

Abhängigkeit der Resonanzfrequenz eines 45° -Stäbchens von wachsender Wechselspannung bei verschiedenen Temperaturen.

Wie schon ausgeführt, reagieren die spontan polarisierten Bereiche im Kristall gegenteilig auf Gleich- und Wechselspannung. Durch ein überlagertes Gleichfeld werden sie am Umklappen verhindert, man arbeitet in einer Lanzettkurve auf einem Ast der Hysteresisschleife, wodurch sich eine Verminderung der Dämpfung und ein Steigen des Elastizitätsmoduls ergibt. Wird jedoch die Amplitude des den Kristall in Resonanz erregenden Wechselfeldes gesteigert, so steigt anfänglich die Dämpfung und der Elastizitätsmodul sinkt. Die qualitative Bestätigung ergibt sich ohne weiteres im Frequenzspektrum, indem beim Steigern der Wechselspannung das Strommaximum sich zu tieferen Frequenzwerten verschiebt (Fig. 9). Diese Messungen sollten aber auch auf die stationäre Me-



thode ausgeführt werden. Sie gestalteten sich hier infolge der erwähnten Erwärmung des Kristalls wesentlich schwieriger. Wie aus Fig. 5 ersichtlich ist, hängt der Elastizitätsmodul am stärksten in der Umgebung der Curiepunkte von der Temperatur ab. Aus diesem Grund wurde die Messdauer mit Hilfe eines Morsetasters möglichst kurz gehalten, wodurch die Resultate gut reproduzierbar wurden (Fig. 10). Der beste Beweis liegt wohl in den Messungen bei -16°C . Hier würde ein Steigen der Temperatur ein Steigen der Resonanzfrequenz zur Folge haben. Dadurch wird aber die Vortäuschung eines positiven Resultats durch Erwärmung des Kristalls ausgeschlossen, da ein Sinken der Resonanzfrequenz erwartet und beobachtet wurde. Für die Temperatur -2° besteht keine Gefahr, da in diesem Gebiet die Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmo-

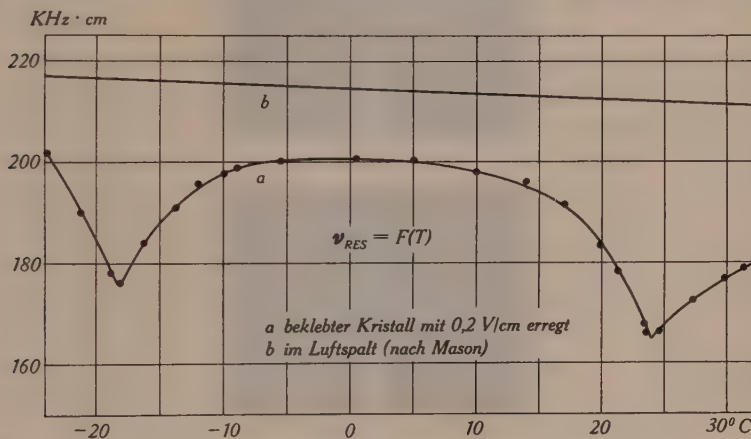


Fig. 11.

Resonanzfrequenz eines beklebten 45° -Stäbchens bei einer maximalen Feldstärke von 0,2 V/cm.

duls verhältnismässig klein ist. Um nun das Steigen des Elastizitätsmoduls bzw. der Resonanzfrequenz mit kleiner werdenden Amplitude des Wechselfeldes eindrücklich zu zeigen, wurde die Resonanzfrequenz im ganzen Curiegebiet mit einer Feldstärke von weniger als 0,2 V/cm nochmals auf die stationäre Weise gemessen. Das Resultat ist in Fig. 11 dargestellt.

Diese verschiedene Abhängigkeit von Gleich- und Wechselspannung ist ein guter Beweis für das Mitwirken der spontanen Polarisation beim Schwingen des Kristalls. Die Abhängigkeit wird durch unsere Theorie richtig erklärt, im Gegensatz zur Arbeit von



Fig. 12.

Verschiedene Temperaturabhängigkeit der gedämpften und ungedämpften Resonanzfrequenzen einer Platte. Die praktisch temperaturunabhängige Resonanzfrequenz liegt bei etwa 65 KHz. Der Übersichtlichkeit wegen ist die Frequenzskala der einzelnen Abbildungen verschoben.

MÜLLER²¹⁾, wonach der Elastizitätsmodul mit dem Quadrat der Polarisierung zunehmen sollte.

Wie ausgeführt, findet ein Umklappen der spontanen Polarisierung nur bei einer y_z -Deformation statt. Für ein 45° -Stäbchen klappt also beim Schwingen in seiner Längsrichtung die Polarisierung um. Ist die Länge des Stäbchens gross im Vergleich zu den anderen Dimensionen, so wird in der Hauptsache die Resonanzfrequenz dieser Längsschwingung und ihrer Oberschwingungen beobachtet werden, da alle anderen Schwingungen bei viel höheren Frequenzen liegen. Für diese wird, da sie keinen Schub bedingen, kein Umklappen erfolgen. Sie sind deshalb, im Verhältnis zu den ersteren, praktisch ungedämpft und unabhängig von Temperatur, Elektroden, sowie Gleich- und Wechselspannung. Im Frequenzspektrum sieht man in der Tat das Auftreten solcher Resonanzen bei hohen Frequenzen.

Bei einer Platte liegen die Verhältnisse dagegen anders. Für sie als dreidimensionales System gibt es Schwingungen, die keinen Schub y_z bedingen und doch in der gleichen Grössenordnung wie diejenigen liegen, die einen solchen zur Folge haben. Es ist das aus den Fig. 9, 12, und 18 zu erschen. Des weiteren sind noch „elektrostriktive“ Schwingungen möglich, die, da sie quadratisch vom Feld abhängen und keinen Schub bedingen, ebenfalls kein Umklappen zur Folge haben und dadurch auch von allen äusseren Umständen weitgehend unabhängig sein werden. Es sei noch bemerkt, dass Dickenschwingungen in Richtung der a -Achse infolge des endlichen x_x sicher möglich sind. Das Problem der ungedämpften Schwingungen sei hier nur erwähnt. Es ist so mannigfaltig, dass es den Rahmen der Arbeit weit überschritten hätte.

2. Die Dämpfung.

Auch sie steht, wie bereits mehrfach erwähnt, in Analogie zur Dämpfung der Ferromagnetika. Es ist nochmals zu wiederholen, dass sie nur für Schubschwingungen auftritt, d. h. für Längsschwingungen eines 45° -Stäbchens. Die Dämpfung erfolgt durch Hysteresisverluste und steigt dementsprechend mit der Frequenz. Im Fall der Resonanz ändert sich noch zusätzlich die Phasenbeziehung zwischen Strom und Spannung am Kristall im Sinne zunehmender Verlustleistung in diesem. Wird bei einem gewöhnlichen piezoelektrischen Kristall die Amplitude des den Kristall erregenden Wechselfeldes zu sehr gesteigert, so wird der Kristall in regelmässige Stücke springen. In unserem Fall, wo die enormen inneren Dämpfungsverluste vorherrschen, schmilzt der Kristall.

Als Mass für die Dämpfung gibt es zwei verschiedene Grössen. Das logarithmische Dekrement A und die Dämpfungskonstante δ . Das logarithmische Dekrement ist der natürliche Logarithmus des Verhältnisses zweier aufeinander folgender Amplitudenmaxima einer freien abklingenden Schwingung. Die Dämpfungskonstante ist numerisch gleich dem reziproken Wert der Zeit, in der die Amplitude auf $1/e$ ihres Anfangswerts abgefallen ist. Beide sind miteinander verknüpft durch die Beziehung

$$A = \frac{\delta}{\nu}$$

wobei ν die Frequenz der Schwingung ist. Bei dem normalen festen Körper ist das logarithmische Dekrement oder die Dämpfungskonstante von der Amplitude unabhängig. Das bedeutet, dass immer der gleiche Bruchteil der aufgewandten Energie, wie gross diese auch immer sein möge, in der Dämpfungsverlustleistung verloren geht. Diese rührt im allgemeinen von elastischen Nachwirkungen und plastischen Verformungen her.

Beim Seignettesalz kommen nun noch die durch die Hysterese erfolgenden Verluste hinzu. Diese wachsen aber (solange keine Sättigung erreicht wird) mit der Amplitude stärker an, als die vorher beschriebenen Dämpfungsanteile. Das gilt allerdings nur so lange, als keine Sättigung erreicht ist. Wird die Amplitude so gross, dass das doch der Fall ist, so bleibt bei noch grösseren Werten der Energieverlust durch Hysterese, auch absolut genommen, konstant, indem er gleich der Fläche der durchlaufenen Hystereseschleife ist. Als Folge dieses Verhaltens wird auch das Dämpfungsdekrement veränderlich sein. Es muss bei kleinen Amplituden mit diesen steigen, um im Bereich der Sättigung ein Maximum zu durchlaufen. Bei noch grösseren Schwingungsweiten wird es dann wieder sinken und dem normalen Wert als Grenzwert zustreben. Das ist der Wert, den man ausserhalb des Curiegebietes bei ganz beliebigen Amplituden erhalten würde.

Betrachtet man die Abklingkurve eines in Resonanz befindlichen Kristalls im Curiegebiet, so wird die Amplitude hier nicht mehr nach einem Exponentialgesetz abnehmen. Die Kurve kann durch den inversen Piezoeffekt auf dem Schirm einer Braun'schen Röhre sichtbar gemacht werden. Trägt man dann den Abklingvorgang logarithmisch auf, so zeigt sich die variable Dämpfung in einer Abweichung von der Geraden, deren Steigung einer konstanten Dämpfung entsprechen würde. Fig. 13 zeigt eine solche Auswertung innerhalb und ausserhalb des Curiegebiets. Innerhalb von diesem Temperaturgebiet zeigt die Abklingkurve selbst, ähn-

lich wie bei BECKER und KORNETZKI²⁶⁾, einen anfänglich praktisch linearen Abfall, der erst für kleine Amplituden in eine Exponentialkurve übergeht. In schöner Analogie zur gleichen Arbeit zeigt sich beim Überlagern eines Gleichfelds eine weitgehende Dämpfungsverminderung.

Die Messungen der Dämpfung wurden wiederum auf zwei verschiedene Arten ausgeführt.

a) Durch photographische Aufnahme der Resonanzkurve eines Stäbchens auf dem Oszillographenschirm und nachheriger Ausmessung der Halbwertsbreite. Sämtliche Aufnahmen geschahen mit und ohne überlagertem Gleichfeld. Beispiele dafür, sowie der Verlauf der so bestimmten Dämpfungskonstanten zeigen die Figuren 14 und 15.

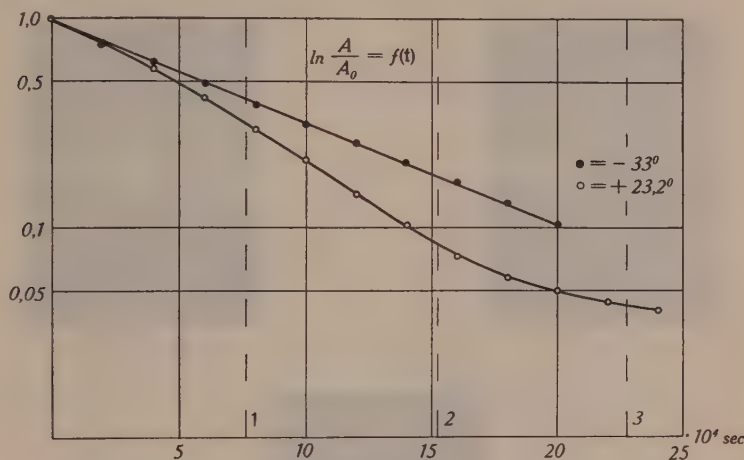


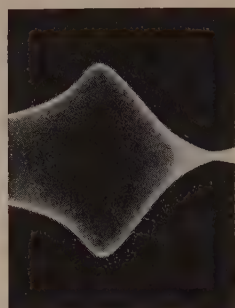
Fig. 13.

Logarithmisch aufgetragene graphische Auswertung der Abklingkurven eines 45° -Stäbchens von 20 mm Länge, bei Temperaturen innerhalb und ausserhalb des Curiegebiets.

Die gestrichelte Zeitskala gehört zum Verlauf bei $+23,2^\circ$.

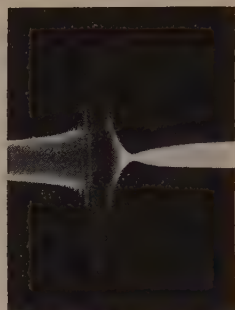
b) Aus den Photographien der Abklingkurve des gleichen schwingenden Kristallstäbchens. Die Auswertung der Aufnahmen zeigt sehr deutlich (Fig. 13), dass die Abklingkurve keine reine Exponentialkurve ist. Wenn man trotzdem eine Dämpfungskonstante angeben will, so kann es sich infolge der veränderlichen Dämpfung immer nur um einen Mittelwert handeln. Dieser muss, wie schon ausgeführt, kleiner sein als der, den man mittels der ersten Methode nach Formel (II) berechnet.

Die Aufnahmen der Abklingkurven (Fig. 16) sind nach Anordnung in Fig. 8 erhalten worden. Der Philips Kathodenstrahl-

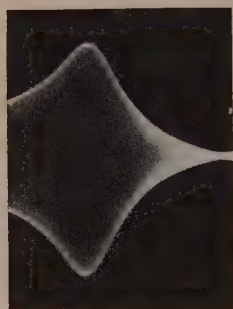


$$V_{\perp} = 0$$

$$t = -15^{\circ}\text{C}$$

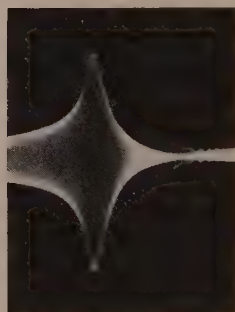


$$V_{\perp} = 1500 \text{ V/cm}$$

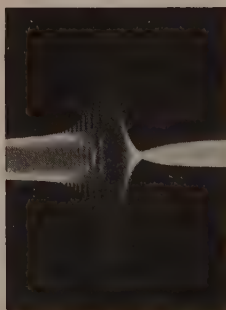


$$V_{\perp} = 0$$

$$t = +23^{\circ}\text{C}$$



$$V_{\perp} = 1500 \text{ V/cm}$$



$$t = -31^{\circ}\text{C}$$

$$V_{\perp} = \begin{cases} 0 \\ 1500 \text{ V/cm} \end{cases}$$

Fig. 14.

Aufnahmen der Resonanzkurve eines 45° -Stäbchens von 20 mm Länge bei verschiedenen Temperaturen, mit und ohne überlagertes Gleichfeld.

Oszillograph GM 3152 besitzt eine Einrichtung, um die Horizontalablenkung des Strahls durch Unterbrechung einer Gleichspannung einmalig auszulösen. Die Schreibgeschwindigkeit ist dabei einstellbar. Ein Telephonrelais mit zwei voneinander getrennten einpoligen Schaltern wird so eingestellt, dass ihre Schaltdifferenz zwischen 10^{-5} und 10^{-6} sec liegt. Zuerst wird die Spannung unterbrochen, welche die Strahlablenkung freigibt, worauf die den Kristall erregende Wechselspannung abgeschaltet wird. Der ganze Vorgang geschieht bei offenem Objektiv der Kamera. Die Zeitdauer, in der die Amplitude auf $1/e$ abgefallen war, betrug am Curiepunkt ungefähr 10^{-4} sec. Die Ablenkgeschwindigkeit wurde entsprechend

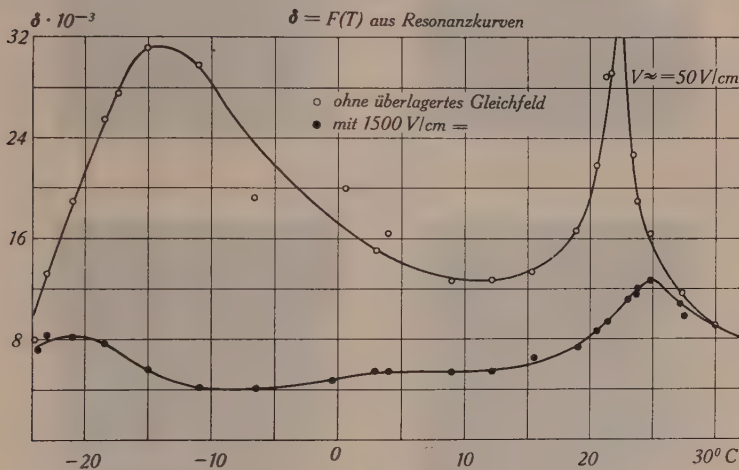


Fig. 15.

Verlauf der Dämpfungskonstanten im Curiegebiet, aus Halbwertsbreiten der Resonanzkurven gemessen, mit und ohne überlagertes Gleichfeld.

eingestellt, um den Schirm mit der Abklingkurve ganz auszufüllen. Beispiele dafür, sowie den so bestimmten Verlauf der Dämpfung zeigen die Figuren 16 und 18.

Berechnet man jetzt den Energieverlust pro Schwingung, das eine Mal aus der Abklingkurve, das andere Mal aus der entsprechend durchlaufenen Hysteresisschleife, so kommt man zu einer numerischen Prüfung der gemachten Aussagen. Da die einzelnen Daten wie DK und Sättigungspolarisation in den verschiedenen Arbeiten voneinander etwas abweichen und wohl auch von Exemplar zu Exemplar kleine Verschiedenheiten aufweisen, kann keine absolute Übereinstimmung erwartet werden.

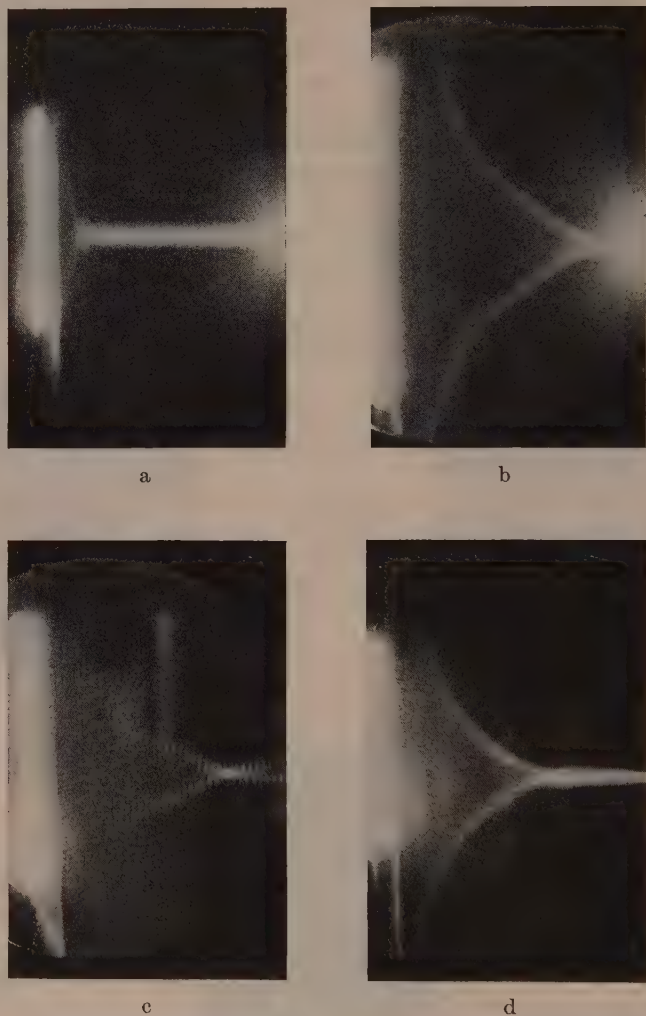


Fig. 16.

Abklingkurven, an einem 45° -Stäbchen von 20 mm Länge aufgenommen.

	$t^\circ\text{C}$	Khz	
a)	-13,0	76,5 ohne Gleichfeld	5 mm = $3,3 \cdot 10^{-4}$ sec
b)	-13,0	98,4 mit 1500 V/cm	
c)	17,3	80,6 ohne Gleichfeld	5 mm = $2,7 \cdot 10^{-4}$ sec
d)	17,3	91,5 mit 1500 V/cm	

Ein Schwingungsvorgang, dessen Amplitude nach einer Formel der Art

$$A = A_0 \cdot e^{-\delta t}$$

abfällt, hat einen relativen Energieverlust pro Schwingung

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{1}{\nu} = -2 \frac{\delta}{\nu} = -2 \Delta \quad (\text{IX})$$

$$(u = \text{Energie/cm}^3)$$

ν ist die Frequenz der Schwingung. Bei einer Schwingungsperiode eines seignettelektrischen Kristalls ist der irreversibel verbrauchte Teil der elektrischen Energie gegeben durch

$$\oint \mathcal{E} dP$$

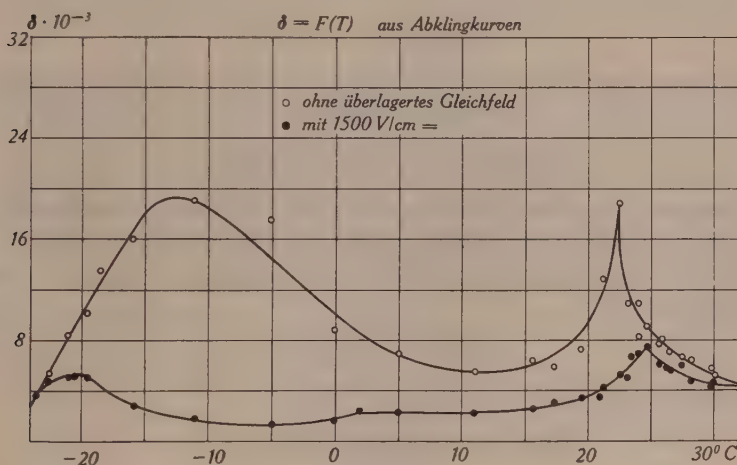


Fig. 17.

Verlauf der Dämpfungskonstanten im Curiegebiet, aus Abklingkurven gemessen, mit und ohne überlagertes Gleichfeld.

und nach Obigem

$$\oint \mathcal{E} dP = \frac{du}{dt} \cdot \frac{1}{\nu} \quad (\text{X})$$

Die elektrische Energie eines isotropen und idealen Dielektrikums ist gegeben durch

$$u = \frac{1}{8\pi} \varepsilon \cdot \mathcal{E}^2$$

Diese Formel wenden wir nun auch für unseren Kristall an, wobei $\varepsilon = \varepsilon_a$ gleich der DK in Richtung der a -Achse ist. Der Formel ist

ein linearer Anstieg der Polarisierung mit dem Felde zugrunde gelegt, was einer feldunabhängigen DK entspricht. Das ist aber bei Seignettesalz sicher nicht der Fall. Man hat deshalb für die DK einen passenden Mittelwert zu nehmen. Vergleicht man die eingangs erwähnten Arbeiten, so findet man am Curiepunkt ungefähr den Wert

$$\epsilon_a = 2,5 \cdot 10^3$$

Im Fall der Resonanz haben wir, immer am Curiepunkt, bei gleichbleibender Feldstärke ein Anwachsen des Stroms auf etwa den dreifachen Wert. Formal ist das gleichbedeutend mit einem gleichen Anstieg der DK . Wir haben also den dreifachen Energiebetrag zu setzen. Für den Curiepunkt ergeben unsere Messungen an einem 45° -Stäbchen von 20 mm Länge ein mittleres logarithmisches Dämpfungsdecrement

$$A = \delta/\nu = 4,1 \cdot 10^{-1}$$

und daraus, mit Hilfe von Formel IX und X, für die irreversibel verbrauchte Energie bei einer maximalen Feldstärke von 50 V/cm

$$2 A \cdot 3 u = 9,8 \text{ erg/cm}^3 \text{ Periode.}$$

Vergleichen wir diesen Wert mit der Fläche der Hysteresisschleife bei der gleichen Temperatur, wie sie in den Arbeiten von HÄBLÜTZEL²⁴⁾, und SAWYER und TOWER²⁷⁾ angegeben ist, indem man angenähert setzt

$$\oint \mathcal{E} dP \approx 2 P_s \mathcal{E}_c$$

so erhalten wir für

$$\oint \mathcal{E} dP = 11,8 \text{ erg/cm}^3 \text{ Periode.}$$

Man sieht, die Übereinstimmung ist weit über die Grössenordnung hinaus gut. Sie wird aber nur so lange möglich sein, als die erregende Feldstärke gross genug ist, um die vollständige Hysteresisschleife zu durchlaufen. Da am Kristall eine maximale Feldstärke von 60 V/cm lag, die nur an den Curiepunkten genügte, um das Koerzitivfeld ganz zu überwinden, werden wir mithin nur dort eine Übereinstimmung erwarten dürfen. Für Zwischentemperaturen ist die Koerzitivfeldstärke immer so gross, dass in der Hauptsache nur ein reversibler Teil durchlaufen wird. Mit der gleichen Maximalfeldstärke findet z. B. DAVID²⁸⁾ bei Zimmertemperatur für

$$\oint \mathcal{E} dP = 3 \text{ erg/cm}^3 \text{ Periode.}$$

Entsprechend dem flachen Abfall der Koerzitivfeldstärke gegen den

unteren Curiepunkt hin²⁴), haben auch wir dort einen viel flacheren Anstieg der Dämpfung als gegen den oberen Curiepunkt gefunden. Da die verwendete Feldstärke verhältnismässig klein ist, finden wir die zwei Maxima der Dämpfung bei Temperaturen in der Umgebung der Curiepunkte und entsprechend das Minimum bei der Temperatur der maximalen Koerzitivfeldstärke. Mit wachsender Feldstärke am Kristall würden beide Maxima sich somit einander nähern. Könnte man die erregende Feldstärke so gross machen, dass im ganzen Curiegebiet die vollständige Hysteresisschleife durchlaufen würde (was aber bei den in Frage kommenden Frequenzen infolge der grossen Verluste nicht möglich ist), hätte man einen Verlauf der Dämpfung proportional dem Integral

$$\oint \mathfrak{E} dP$$

und somit

$$\sim P_c \cdot \mathfrak{E}_c$$

indem beide Maxima in ein einziges zusammenfallen (siehe HABLÜTZEL²⁴).

Bei der strengen Kopplung zwischen Polarisation und inversem Piezoeffekt, werden wir auch eine *mechanische Hysterese* erwarten. Die dadurch bedingten Verluste berechnen sich, in der gleichen Weise wie oben, aus dem logarithmischen Dämpfungsdekrement und der anfänglichen mechanischen Energie. Diese erhält man aus der mechanischen Amplitude $\frac{\Delta l}{l}$ und dem Elastizitätsmodul nach folgender Formel

$$u_{\text{Elast}} = \frac{E}{2} \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2$$

Für $\left(\frac{\Delta l}{l} \right)_{\text{max}}$ findet man nach NORGORDEN²³) am Curiepunkt einen Wert

$$\left(\frac{\Delta l}{l} \right)_{\text{max}} = 2,5 \cdot 10^{-6}$$

bei einer Feldstärke von 47 V/cm. Für die mechanische Verlustleistung erhält man somit

$$\oint_{\text{Elast}} \frac{\Delta l(\sigma)}{l} d\sigma = 0,82 \cdot u_{\text{Elast}} = 0,63 \text{ erg/cm}^3 \text{ Periode}$$

Im Fall der Resonanz würden bei einer nur dreimal grösseren mechanischen Amplitude die Verluste den neunfachen Wert annehmen und dadurch in die Grössenordnung der überhaupt verfügbaren

elektrischen Energie fallen, die aber ihrerseits schon ganz in der elektrischen Hysteresisschleife verloren geht.

So kommen wir zu der Erklärung von Beobachtungen, die uns anfänglich unverständlich waren. Als wir das erstmal gedämpfte und ungedämpfte Resonanzfrequenzen am beklebten Kristall nebeneinander bemerkten, jedoch nichts über ihren Zusammenhang wussten, stellte sich damals die Frage, ob sich bei beiden Schwingungsarten das Anwachsen des Stroms im Resonanzfall auch in einem entsprechenden Anstieg der mechanischen Amplitude nachweisen lasse. Um das zu entscheiden, wurden die verschiedensten Methoden zum Nachweis von mechanischen Schwingungen angewandt. Es zeigte sich, dass *ein verstärktes mechanisches Schwingen nur bei den ungedämpften, temperaturunabhängigen Resonanzfrequenzen festzustellen* war, was nun verständlich ist, da bei den gedämpften die ganze Energie zum Umklappen der spontanen Polarisierung verbraucht wird.

Folgende Experimente wurden ausgeführt:

1. Ein Lichtstrahl wurde am Kristall gespiegelt und nach der Reflexion auf einer Mattscheibe beobachtet. Der Lichtweg wurde zur Erhöhung der Empfindlichkeit durch Spiegel verlängert. Ein mechanisches Schwingen ergab eine Verbreiterung des abgebildeten Spalts. Legte man eine genügend hohe Spannung an, so war auch das mechanische Schwingen ausserhalb jeglicher Resonanz feststellbar. Bei gedämpften Resonanzfrequenzen, die durch Strommessungen kontrolliert wurden, war so gut wie kein Anwachsen der mechanischen Amplitude zu bemerken, während das mechanische Schwingen bei scharfen Resonanzen sehr stark ausgeprägt war.

2. Das Cady'sche Leuchten schwingender Kristalle wurde beobachtet. Für Schwingungen eines 45° -Stäbchens in seiner Längsrichtung hatte HILTSCHER²⁵⁾ auf den Flächen senkrecht zur a -Achse das Leuchten an den Schwingungsbäuchen beobachtet. Das gleiche Ergebnis erzielten wir nur bei starker Reduktion der Elektroden, andernfalls das Leuchten im Curiegebiet unsichtbar war. Dagegen zeigten sich bei einer *Platte*, deren Elektroden die ganzen zur a -Achse senkrechten Flächen bedeckten, die verschiedensten Leuchtfiguren an den Kanten. Wurden die Elektroden reduziert, so erstreckten sie sich auch über den unbeklebten Teil der Oberfläche. Für das 45° -Stäbchen war ausserhalb des Curiegebiets ebenfalls keine Reduktion der Elektroden notwendig, indem sich hier die Längsschwingungen an den Kanten beobachten liessen. Das Verhalten der gedämpften und ungedämpften Resonanzfrequenzen sei noch ergänzend durch die Fig. 18 beschrieben.

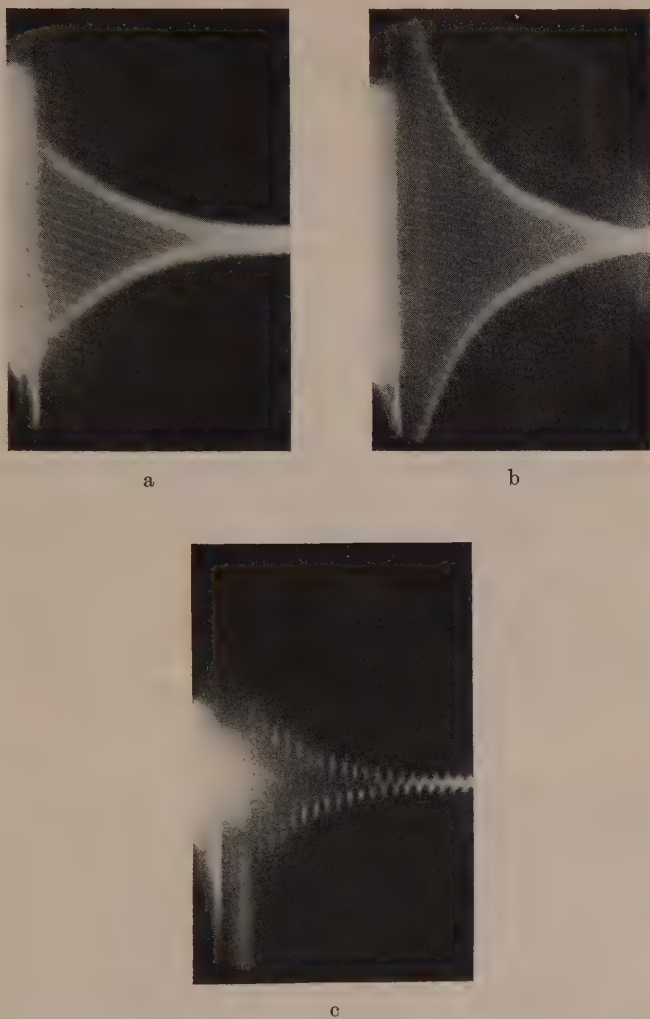


Fig. 18.

Abklingkurven an einer Platte und einem 45° -Stäbchen.

- a) praktisch temperaturunabhängige, scharfe Resonanzfrequenz einer Platte
 $t = 21,9^\circ$ 78,5 Khz 5 mm = $6,9 \cdot 10^{-4}$ sec
- b) 45° -Stäbchen, 20 mm Länge; $t = -33^\circ$ 102 Khz 5 mm = $4,6 \cdot 10^{-4}$ sec
- c) gedämpfte Resonanzfrequenz der gleichen Platte wie a) $t = 23,8^\circ$
 40,4 Khz 5 mm = $1,01 \cdot 10^{-4}$ sec

3. Die durch ein mechanisches Schwingen erzeugte photoelastische Doppelbrechung wurde untersucht. In der Hauptsache wurde hier bei hohen Feldstärken die überaus starke Erwärmung für die gedämpften Resonanzfrequenzen beobachtet. Ein mechanisches Schwingen zeigte sich nur bei den ungedämpften Resonanzfrequenzen.

4. Eine Kristallplatte wurde auf ihren zur a -Achse senkrechten Oberflächen gut poliert und gleich darauf im Hochvakuum eine Silberschicht auf sie aufgedampft. Dann wurde mittels einer feinen Feder und einer dazwischen liegenden dünnen Aluminiumfolie der Kristall an den Generator angeschlossen. Die andere Elektrode war eine als Unterlage dienende polierte Messingplatte. Auf den Kristall wurden sehr gut getrocknete Bärllappsamen gestreut. Beim Schwingen in Resonanz wurden die Staubteilchen an den Bäuchen fortgeweht und blieben nur an den Knotenstellen liegen. Bei den scharfen Resonanzfrequenzen zeigten sich so ausserordentlich schöne Figuren. Bei den Gedämpften dagegen war im Curiegebiet nur ein leises Vibrieren über die ganze Oberfläche sichtbar, was aber auch von statischen Aufladungen des Pulvers herrühren konnte.

In früheren Arbeiten²⁵⁾ war schon einmal der Versuch gemacht worden, Staubfiguren auf Seignettesalz zu erhalten. Das negative Resultat lag wohl hauptsächlich daran, dass die Bärllappsamen kleben blieben, denn allein schon zum Gleiten ist ein Versilbern notwendig. Diese Methode war von allen bei weitem die empfindlichste.

IV. Diskussion.

Eine Diskussion wäre nicht vollständig, wollte man nicht kurz ein anderes Seignetteelektrikum, das KH_2PO_4 erwähnen. Bei diesem zeigt in Richtung der c -Achse die DK ein dem Seignettesalz ähnliches Verhalten²⁹⁾. Messungen der DK bei hohen Feldstärken geben für Seignettesalz und primäres Kaliumphosphat ein ähnliches Bild, wenngleich die Curiepunkte auch bei ganz verschiedenen Temperaturen liegen. Es wurde nun eine vollständigere Untersuchung der DK bei kleinen Spannungen und verschiedenen Frequenzen durchgeführt. Gleich wie im Fall des Seignettesalzes zeigte sich ein Abfall der DK oberhalb des Gebiets der piezoelektrischen Resonanzfrequenzen. Es ist das verständlich, wenn man bedenkt, dass die hohe DK durch das Umklappen der spontanen Polarisierung bedingt ist. Wie oben ausgeführt, wird dieses Umklappen noch mechanisch verstärkt. Befindet man sich jetzt oberhalb des Gebiets der Resonanzfrequenzen, so wird die mechanische Schwingamplitude gegen 0 streben und ebenso mit ihr die mechanische Verstär-

kung des Umklappens. Da die DK aber auch weiterhin gross, d. h. in der Grössenordnung von 10^2 bleibt, setzt sie sich also aus einem ursprünglichen elektrischen und einem bei kleinen Frequenzen mechanisch verstärktem Umklappen der spontanen Polarisation zusammen. Es ist möglich, dass wir hier eine Erklärung für den reversiblen und irreversiblen Teil der DK bzw. der Hysteresisschleife haben. Man kann nämlich auf diese Weise die Divergenz zwischen den Messungen von HABLÜTZEL²⁴⁾ und GOEDECKE⁶⁾ verstehen. Nach GOEDECKE zeigt Seignettesalz bei 10^5 Hz keine Hysteresisschleife mehr, in vollständigem Gegensatz zu HABLÜTZEL. Beide Arbeiten lassen sich nun miteinander vereinbaren, unter der Annahme, dass hier das Gebiet beginnt, in welchem der mechanische Beitrag verschwindet. Der genauere Wert hängt von den Dimensionen des Kristalls ab. HABLÜTZELS Kristall musste also kleiner als der GOEDECKES gewesen sein. Er war in der Tat ein Kreisscheibchen von nur 5 mm \varnothing . GOEDECKES Kristallplatten hatten dagegen eine Oberfläche von $35 \cdot 55 \text{ mm}^2$. Es wird so für alle Seignettesalzkristalle, deren Dimensionen zwischen 1 mm und 10 cm variieren, das Gebiet der mechanisch bedingten ersten Dispersionsstelle der DK zwischen 10^4 und 10^6 Hz liegen.

Die DK -Messung mit kleinen Feldstärken zeigte nun beim KH_2PO_4 einen grundsätzlichen Unterschied zu der entsprechenden Messung an Seignettesalz. Für das letztere wird die DK am oberen und am unteren Curiepunkt eine Spitze durchlaufen. KH_2PO_4 zeigt dagegen nur *eine* Spitze, und zwar am oberen Curiepunkt. Der Abfall der DK bei tieferen Temperaturen ist stark frequenz- und spannungsabhängig, indem er sich mit wachsender Frequenz und sinkender Feldstärke zu höheren Temperaturen verschiebt. Diese Tatsache, sowie die Aufnahme der Hysteresisschleifen³⁰⁾ und die Messung der spezifischen Wärme³¹⁾ deuten darauf hin, dass bei KH_2PO_4 die spontane Polarisation erhalten bleibt und einfriert. Der untere Curiepunkt wird also nur durch ein Anwachsen des inneren Feldes vorgetäuscht.

Da nun die Maxima der DK und des ΔE -Effekts die Folgen einer labilen spontanen Polarisation sind, zeigt auch für KH_2PO_4 , wie erwartet, der ΔE -Effekt eine Spitze am oberen Curiepunkt. Die Messungen wurden von LÜDY³²⁾ ausgeführt. Da bei KH_2PO_4 der untere Curiepunkt der Messung nicht zugänglich war, setzte LÜDY die Untersuchung auch an KD_2PO_4 fort, dessen Curiegebiet um etwa 90° zu höheren Temperaturen verschoben ist. Hier konnte das ganze Gebiet der anomalen DK beobachtet werden, jedoch zeigte sich wieder nur am sogenannten oberen Curiepunkt der ΔE -Effekt.

Schliesst man aus dem Maximum des ΔE -Effekts auf den Curiepunkt, so zeigt sich aus Fig. 5 eine Curiepunktsverschiebung bei überlagertem Gleichfeld. BANCROFT³³⁾ fand bei grossen hydrostatischen Drucken eine Curiepunktsverschiebung, des unteren sowie des oberen, zu höheren Temperaturen. Am oberen Curiepunkt haben wir die Verschiebung im gleichen Sinn, am unteren jedoch im entgegengesetzten. Diese Verschiebung lässt sich dadurch erklären, dass beim Verschwinden des inneren Feldes das überlagerte mit diesem vergleichbar wird, und so das Verschwinden der spontanen Polarisation um wenige Grade verzögert wird.

Viele der zitierten Arbeiten würden eine vollständigere Ausführung erfordern. Der Elastizitätsmodul sollte kontinuierlich bei kleinsten mechanischen Spannungen und in Funktion der Temperatur gemessen werden. Wenn einmal die Natur der ungedämpften Schwingungen geklärt sein wird, muss es möglich sein, Kristalle zu erhalten, die um Zehnerpotenzen stärker als Quarz schwingen. Weiterhin müsste man versuchen, den kontinuierlichen Übergang vom vollständig beklebten Kristall zu dem im Luftspalt schwingenden zu realisieren. Ähnlich wie Seignettesalz wird nun auch KH_2PO_4 auf sein mechanisches Verhalten untersucht werden; so zum Beispiel bei Variation der Wechsellspannung oder einem überlagerten Gleichfeld. Vielleicht wird man hier im Temperaturgebiet des Einfrierens der spontanen Polarisation neue Aufschlüsse über das Wesen der Seignette-Elektrizität erhalten.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER, bin ich für sein stets förderndes Interesse an dieser Arbeit und die vielen wertvollen Diskussionen zu grossem Dank verpflichtet. Dem Aluminiumfonds Neuhausen danke ich für die Überlassung von Apparaten.

Physikalisches Institut an der E.T.H., Zürich.

Literaturverzeichnis.

- 1) ERRERA: Phys. Ztschr. **32**, 369, 1931.
- 2) BUSCH: HPA **6**, 315, 1933.
- 3) ZELENY und VALASEK: Phys. Rev. **46**, 450, 1934.
- 4) BANTLE und BUSCH: HPA **10**, 261, 1937.
- 5) SCHULWAS-SOROKINA und POSNOV: Phys. Rev. **47**, 166, 1935.
- 6) GOEDECKE: Ztschr. f. Phys. **94**, 574, 1935.
- 7) DAVIS: Phil. Mag. **16**, 97, 1933.
- 8) MIKHAILOV: Techn. Phys. USSR **3**, 652; **4**, 461.
- 9) MATTIAT: Hochfrequenztechn. und Elektroak. **50**, 115, 1937.
- 10) MASON: Phys. Rev. **55**, 775, 1939.
- 11) MÜLLER: Phys. Rev. **57**, 829 und 840, 1940.
- 12) ISELY: Phys. Rev. **24**, 569, 1924.

- ¹³⁾ MANDELL: Proc. Roy. Soc. A **116**, 623, 1927.
 - ¹⁴⁾ HINZ: Ztschr. f. Phys. **111**, 617, 1938.
 - ¹⁵⁾ TASCHKE und OSTERBERG: Phys. Rev. **50**, 572, 1936.
 - ¹⁶⁾ BECKER-DÖRING: Ferromagnetismus, Verlag Springer 1939.
 - ¹⁷⁾ AKULOV und KONDORSKY: Ztschr. f. Phys. **78**, 807, 1932.
 - ¹⁸⁾ KERSTEN: Ztschr. f. Phys. **85**, 708, 1933.
 - ¹⁹⁾ KORNETZKI: Wiss. Veröff. Siemens-Werk **17**, 48, 1938.
 - ²⁰⁾ FÖRSTER und KÖSTER: Naturw. **25**, 436, 1937.
 - ²¹⁾ OSTERBERG und COOKSON: Phys. Rev. **51**, 1096, 1937.
 - ²²⁾ MÜLLER: Phys. Rev. **58**, 565 und 805, 1940.
 - ²³⁾ BECKER und KERSTEN: Ztschr. f. Phys. **64**, 660, 1930.
 - ²⁴⁾ KERSTEN: Ztschr. f. Phys. **71**, 553, 1931.
 - ²⁵⁾ NORGORDEN: Phys. Rev. **49**, 820, 1936.
 - ²⁶⁾ HABLÜTZEL: HPA **12**, 489, 1939.
 - ²⁷⁾ HILTSCHER: Ztschr. f. Phys. **104**, 672, 1937.
 - ²⁸⁾ BECKER und KORNETZKI: Ztschr. f. Phys. **88**, 634, 1934.
 - ²⁹⁾ SAWYER und TOWER: Phys. Rev. **35**, 269, 1930.
 - ³⁰⁾ DAVID: HPA **8**, 431, 1935.
 - ³¹⁾ BUSCH: HPA **11**, 269, 1938.
 - ³²⁾ BUSCH und GANZ: HPA **15**, 501, 1942.
 - ³³⁾ BANTLE und SCHERRER: HPA **14**, 146, 1941.
 - ³⁴⁾ BANTLE: HPA **15**, 373, 1942.
 - ³⁵⁾ LÜDY: HPA **15**, 527, 1942.
 - ³⁶⁾ BANCROFT: Phys. Rev. **53**, 587, 1938.
-

III. Ultrakurzwellengenerator mit Phasenfokussierung

von F. Lüdi.

(A.G. Brown, Boveri & Cie., Baden.)

(9. II. 1943.)

Inhalt: Es wird die Kopplung eines Elektronenstrahls mit einem einfachen Schwingkreis berechnet und Anschwingstrom sowie Frequenzstabilität in Abhängigkeit seiner charakteristischen Daten festgestellt.

Einleitung.

Die bisherigen Berechnungen des Klystrons erfolgten meist in der Weise, dass in erster Linie der Elektronenmechanismus untersucht wurde. Die Wirkung des dichtemodulierten Elektronenstrahls auf den Resonator und die Rückkopplung wird dann mit Hilfe von Ersatzschemen weiter verfolgt.

Weil aber der Resonator gerade bei Klystrons eine ausschlaggebende Rolle für die Schwingungsanfachung spielt, ist es von Interesse, die Rechnung auf die Kopplung des Elektronenstrahls mit einem konkreten Resonator auszudehnen und Anschwingstrom sowie Frequenzstabilität in Abhängigkeit von seinen charakteristischen Konstanten zu bestimmen.

Als einfaches Beispiel wählen wir ein beidseitig abgeschlossenes koaxiales Rohrsystem, das in der Mitte (Spannungsbauch) von einem Elektronenstrahl diametral durchstossen wird. Dieses System ist gekennzeichnet durch Strahlungsfreiheit, durch einen Steuer-raum endlicher Dicke, einen feldfreien Kompressionsraum (innerer Rohrdurchmesser) und einen Auskopplerraum gleicher Dicke wie der Steuer-raum. Steuerspannung und Auskopplerspannung sind gleich gross und entgegengesetzt. Die erregte Wellenlänge ist gleich der doppelten Rohrlänge*).

*) Die Resultate der Rechnung wurden bereits im Dezember 1941¹⁾ publiziert und darüber ausführlich im Zürcher physikalischen Kolloquium vom Winter 1941 referiert. Die Veröffentlichung wurde zurückgestellt, da befriedigende experimentelle Ergebnisse noch fehlten und andere Entwicklungsarbeiten dringender waren.

Inzwischen wurde über interessante Ergebnisse eines ähnlichen Generators von Herriger und Döring berichtet, sodass der vorliegende Aufsatz nicht der konkreten Unterlagen entbehrt.

1. Voraussetzungen.

Fig. 1 zeigt den Axialschnitt durch das System. Wir operieren mit der linken Hälfte; die rechte bewirkt nur, dass der Verlustwiderstand verdoppelt wird. Die Durchtrittsöffnungen haben den Querschnitt F und entsprechen an der Stelle 2 der Auskoppler-

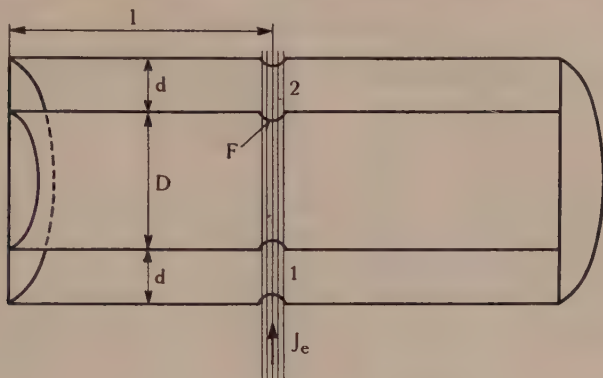


Fig. 1.

kapazität $C_2 = \frac{F}{4\pi d}$. Sie werden im praktischen Fall durch Grenzübergang gleich Null, aber mit unendlich grosser Elektronenstromdichte gesetzt.

Der Verlustwiderstand des Resonators (Skinneffekt) werde als konstanter Parallelwiderstand an die Stelle 2 transformiert. Das System schwingt am besten in der Nähe der Resonanzstelle, und eine kleine Frequenzänderung beeinflusst den Verlustwiderstand nicht wesentlich. Der Wirkstrom, der durch den Parallelwiderstand bei 2 fließt, sei klein gegen den Blindstrom im Resonator, so dass der Feldaufbau wesentlich durch letzteren bedingt ist. Für die Rechnung sei das Feld vom inneren zum äusseren Rohr gerichtet und die Stromrichtung positiv (nach rechts) auf dem äusseren Rohr.

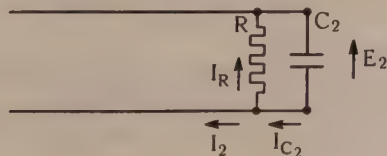


Fig. 2.

Wir haben dann ein einseitig offenes konzentrisches Lechersystem, das an einer Stelle (2) im Spannungsbauch mit einem Widerstand R belastet ist und von der induzierten EMK des Kondensators C_2 gespeissen wird, Fig. 2.

2. Die Kopplungsgleichungen.

Mit der Impedanz der $\lambda/4$ Lecherleitung wird die Verknüpfung von Spannungs- und Stromamplitude am offenen Ende

$$E_2 = I_2 j Z_0 \operatorname{tg} \beta l, \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1)$$

Z_0 = Wellenwiderstand

und mit der Belastung folgt, da $I_2 = I_{c_2} - I_R$ $I_R = \frac{E_2}{R}$

$$E_2 = \left(I_{c_2} - \frac{E_2}{R} \right) j Z_0 \operatorname{tg} \beta l \quad (2)$$

I_{c_2} muss mittels einer zweiten Gleichung, welche die eigentliche Kopplung zwischen Elektronenstrahl und Kopplungskapazität enthält, eliminiert werden.

Diese folgt nach früheren Arbeiten²⁾³⁾ im folgenden als I bzw. II bezeichnet aus

$$u_2 = - \mathfrak{E} \cdot d + E_1 b \sin \frac{\pi d}{\Lambda} \cdot \sin \left(\omega t - \frac{\omega l}{v_0} - \frac{\pi d}{\Lambda} \right) \quad (\text{I, 24})$$

bei sin-förmiger Steuerspannung an der Stelle 1

$$u_1 = E_1 \sin \omega t \quad (3)$$

mit Geschwindigkeitsmodulation bei unendlich dünner Steuerdicke

$$v = v_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{E_1}{E_0} \sin \omega t \right) \quad (4)$$

Das erste Glied rechts in (I, 24) ist die Spannung am Kondensator C_2 welche durch den angeschlossenen Kreis entsteht, das zweite Glied die durch die Elektronenpakete influenzierte Lehrlaufspannung, worin

$$b = \frac{4\pi \mathfrak{F}_e \cdot D}{\omega E_0}$$

d = Auskopplerdicke

$\Lambda/2$ = die Länge der sin-förmigen Elektronenverdichtung

l = Luftraum, im vorliegenden Fall = D

v_0 = Elektronengeschwindigkeit entsprechend Beschleunigungsspannung E_0 .

bedeuten.

Wir wählen für das weitere $d = (2n + 1) \Lambda/2$ (nach (I, 24) max. induzierte Spannung), was gleichbedeutend ist, dass die Durchtrittszeit durch Auskoppler- resp. Steuerelektrode gleich einem ungeradzahigen Vielfachen einer halben Schwingungsdauer $T/2$ des

Resonanzkreises beträgt. Ferner werde wegen der späteren komplexen Schreibweise statt Gleichung (4) eine cos-förmige Steuerungspannung benützt.

$$u_1 = E_1 \cos \omega t$$

Damit wird die Geschwindigkeitsmodulation bei endlicher Steuerdicke

$$v = v_0 \left(1 - \frac{1}{(2n+1)\pi} \frac{E_1}{E_0} \sin \omega t \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, 4 \dots \quad (5)$$

vgl. II Gleichung (10), und

$$u_2 = -\mathfrak{E} \cdot d + E_1 b' (-1)^n \cdot \sin \left(\omega t - \frac{\omega D}{v_0} - (2n+1)\pi/2 \right) \quad (6)$$

$$b' = \frac{2}{(2n+1)\pi} \cdot \frac{4\pi \mathfrak{J}_e \cdot D}{\omega \cdot E_0}$$

Durch zeitliche Differentiation bekommt man daraus unter Berücksichtigung von

$$d \cdot \frac{d\mathfrak{E}}{dt} = 4\pi \mathfrak{J} \cdot d = \frac{\mathfrak{J} \cdot F}{C_2} = \frac{J_{c_2}}{C_2}$$

$$\frac{du_2}{dt} = -\frac{J_{c_2}}{C_2} + \omega b' E_1 (-1)^n \cdot \cos \left(\omega t - \frac{\omega D}{v_0} - (2n+1)\pi/2 \right)$$

oder in komplexer Form mit:

$$u_1 = E_1 e^{j\omega t} \quad u_2 = E_2 e^{j\omega t} \quad J_{c_2} = I_{c_2} e^{j\omega t} \quad (-1)^n = e^{jn\pi}$$

$$j\omega E_2 = -\frac{I_{c_2}}{C_2} + \omega E_1 b' \cdot e^{-j\Phi}$$

$$\Phi = \frac{\omega D}{v_0} + (2n+1) \frac{\pi}{2} - n\pi = \frac{\omega D}{v_0} + \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

Aus (2) und (7) folgt nun die Kopplung des Resonators mit dem Elektronenstrahl durch Elimination von I_{c_2} , so dass:

$$E_1 \cdot j B Z_0 e^{-j\Phi} \cdot \operatorname{tg} \beta l - E_2 \left[1 - \left(\omega C_2 - \frac{j}{R} \right) Z_0 \operatorname{tg} \beta l \right] = 0 \quad (8a)$$

und

$$E_1 + E_2 = 0 \quad (8b)$$

(8a) ist die Verknüpfung der erzeugten Resonator-Wechselspannung E_2 mit der Steuerspannung E_1 $\left(B = \omega C_2 b' = \frac{2}{(2n+1)\pi} \cdot \frac{J_e \cdot D}{E_0 \cdot d} \right)$ ist als positive Grösse einzusetzen, $J_e = F \cdot \mathfrak{J}_e$ Elektronenstrom)

(8b) ist die Rückkopplungsgleichung, in vorliegender Anordnung besonders einfach, weil $E_1 = -E_2$.

Die Gleichungen (8) entsprechen den Gleichungen (I 39, 40) loc. cit.

Durch geeignete Konstruktion könnte auch hier die Rückkopplung kleiner als 1 gemacht werden, wie dies für optimale Arbeitsweise nach II der Fall sein muss; denn im Steuerraum 1 soll ja noch keine Dichtemodulation stattfinden, und E_2 muss für max. Wirkungsgrad ungefähr E_0 sein.

3. Amplituden- und Frequenzbedingung.

Aus (8a) und (8b) erhält man in geeigneter Form ($-1 = e^{j\pi}$, $\Phi' = \Phi - \pi$):

$$\frac{Z_0 \cdot B \cdot e^{-j\Phi'}}{\frac{Z_0}{R} - j(\cotg \beta l - \omega C_2 Z_0)} = 1 \quad (9)$$

Diese Gleichung enthält die Anschwingbedingung (Realteil) und die Frequenzbedingung (Imaginärteil). Sie gilt noch allgemein, wenn statt der einfachen Öffnungen im Auskoppler eine reale Kapazität vorhanden ist, etwa durch Einbuchtungen in den beiden Rohren hervorgebracht, um den Laufwinkel im Auskoppler zu verkleinern. Aus dem gleichen Grund können auch steuerseitig Einbuchtungen angebracht werden. Diese Kapazität geht aber nur im Nenner als Belastungskapazität (Wellenlängenvergrößerung) und nicht als Auskopplungskapazität im Zähler ein.

Für unseren Fall sei jedoch $C_2 \rightarrow 0$ gesetzt, was auch weitgehend für Einbuchtungen gilt, solange die Wellenlängenvergrößerung klein bleibt; die Grösse B bleibt unverändert, wenn die Elektronenstromdichte gegen unendlich geht, da ja das Produkt $F \cdot \mathfrak{F}_e = J_e$ massgebend ist.

Dann resultiert für den Realteil

$$\frac{Z_0 \cdot B \left(\cotg \beta l \cdot \sin \Phi' + \frac{Z_0}{R} \cos \Phi' \right)}{(\cotg \beta l)^2 + \left(\frac{Z_0}{R} \right)^2} = 1 \quad (10a)$$

und für den Imaginärteil

$$\cotg \beta l \cdot \cos \Phi' - \frac{Z_0}{R} \cdot \sin \Phi' = 0 \quad (10b)$$

Aus (10b) folgt:

$$\Phi' = \frac{\omega D}{v_0} - \frac{\pi}{2} = \arctg \left(\frac{R}{Z_0} \cotg \beta l \right) + 2m\pi \quad (11)$$

Man beachte: n bestimmt den Laufwinkel im Steuer- bzw. Auskopplerraum, m den Laufwinkel im Kompressionsraum.

Hieraus kann die Elektronengeschwindigkeit v_0 bestimmt werden, welche das System in einer $\lambda/4$ -Welle erregt (Resonanzfall: $\cotg \beta l = 0$); also

$$v_0 = \sqrt{\frac{2e}{m} E_0} = \frac{2 \omega D}{(4m+1)\pi} \quad (12)$$

Damit nimmt der Resonanznenner in (10a) den kleinsten Wert an, was zum kleinsten Anschwingstrom führt. Die Anschwingbedingung erhält mit dem Wert B die einfache Form: ($\text{tg } \Phi = 0$)

$$\frac{2}{(2n+1)\pi} \cdot \frac{J_e \cdot D R}{E_0 \cdot d} = 1 \quad (13)$$

Der Faktor $\frac{2}{2n+1}$ rührt von der kleineren Geschwindigkeits-Aussteuerung bei endlicher Steuerdicke her.

4. Die Frequenzstabilität.

Hierfür ist Gleichung (11) zuständig. In Resonanznähe ist $\beta l = \frac{\pi}{2}$, so dass $\cotg \beta l$ durch

$$\frac{\pi}{2} - \beta l = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega l}{w}$$

ersetzt werden kann (w = Lichtgeschwindigkeit); ist auch noch

$$\frac{R}{Z_0} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega l}{w} \right)$$

eine kleine Grösse gegen 1, was an einem späteren Beispiel verifiziert wird, so folgt aus (11)

$$\frac{\omega D}{v_0} - (4m+1) \frac{\pi}{2} = \frac{R}{Z_0} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega l}{w} \right) \quad (14)$$

und nach ω aufgelöst:

$$\omega = \frac{\left(\frac{R}{Z_0} + 4m+1 \right) \frac{\pi}{2} \frac{Z_0 w}{R l}}{1 + \frac{D Z_0 w}{v_0 R l}}$$

Nun folgt ebenfalls aus dem konkreten Beispiel, dass

$$\frac{D Z_0 w}{v_0 R l} \gg 1,$$

so dass für ω die Näherungsformel in Abhängigkeit von den charakteristischen Grössen gilt:

$$\omega = \frac{\pi w}{2l} \left[1 + (4m + 1) \frac{Z_0}{R} \right] \left(1 - \frac{D Z_0 w}{v_0 l R} \right) \quad (15)$$

Hieraus folgt in erster Linie, dass im verlustfreien Fall, $R = \infty$

$$\omega = \frac{\pi w}{2l} \quad \text{oder} \quad \frac{\omega l}{w} = \beta l = \frac{\pi}{2}$$

die Frequenz unabhängig von der Elektronengeschwindigkeit, d. h. von der Beschleunigungsspannung E_0 und gleich der Resonanzfrequenz ist; man hat vollkommene Frequenzstabilität.

5. Berechnung eines Beispiels.

Um die geometrischen Dimensionen und die Betriebsspannung für eine gegebene Wellenlänge bei optimaler Wirkungsweise zu bestimmen, geht man folgendermassen vor:

Aus Gleichung (12) wird zuerst für eine gewünschte Frequenz, sowie für einen gegebenen inneren Rohrdurchmesser D und eine ungefähr vorgegebene Spannung (E_0) m berechnet. Dann wird m auf den nächsten ganzzahligen Wert aufgerundet und damit die korrigierte Anodenspannung neu bestimmt. Für diese ist der Laufwinkel $\frac{\omega D}{v_0}$ im Kompressionsraum ein Vielfaches von π , so dass die Resonanzfrequenz erregt wird. Mit v_0 wird weiter der Durchmesser des äusseren Rohres $D + 2d$ für einen gewünschten Laufwinkel im Auskoppler berechnet. Dann sind die geometrischen Daten und die Beschleunigungsspannung bestimmt. Aus den geometrischen Abmessungen erhält man den Parallelwiderstand nach einer bekannten Formel für einseitig kurzgeschlossene, koaxiale Schwingsysteme⁴⁾

$$R = \frac{\sqrt{\lambda} (D + 2d)/2}{l} \cdot \frac{l n^{(D+2d)/D}}{\frac{1 + (D+2d)/D}{\ln(D+2d)/D} + \frac{D+2d}{l}} \cdot 10^6 \Omega \quad (16)$$

Die Grössen D, d, l sind die in der Fig. 1 eingezeichneten. Für die ganze Länge $2l$ sind die Verluste doppelt so gross, und es ist für R die Hälfte nach (16) zu nehmen.

Für $\lambda = 6 \text{ cm}$ ($\omega = 3,15 \cdot 10^{10}$), $D = 2 \text{ cm}$ und $v_0 = 1,7 \cdot 10^9 \frac{\text{cm}}{\text{sek}}$ (800 Volt) wird $m = 5,65$. Auf $m = 6$ aufgerundet, ergibt sich die korrigierte Spannung zu $E_0 = 720 \text{ Volt}$. Die Bedingung für den Auskoppler- resp. Steuerraum

$$d = (2n + 1) \lambda / 2 = (2n + 1) v_0 T / 2 = (2n + 1) v_0 \frac{\pi}{\omega}$$

gibt mit den errechneten Grössen v_0 und E_0 für $n = 1$, $d = 0,48$ cm.

Damit sind die Grössen für (16) bekannt:

$$\lambda = 6 \text{ cm}$$

$$D = 2 \text{ cm}$$

$$D + 2d = 3 \text{ cm}$$

$$l = 1,5 \text{ cm}$$

$$Z_0 = 20 \, \Omega \text{ (Wellenwiderstand für obiges Durch-
messerverhältnis)}$$

und man erhält für Kupferrohre

$$R = 5,8 \cdot 10^0 \, \Omega$$

Dies führt mit (13) zu einem Anschwingstrom ($2n + 1 = 3$)
von

$$J_e = 14 \text{ mA}$$

Bemerkung: Würde der Laufwinkel $\frac{\omega d}{v_0}$ im Steuer- bzw. Auskopplerraum von 3π auf π durch Einbuchtungen im äusseren Rohr herabgesetzt, so würde nur der Anschwingstrom dreimal kleiner ($n = 0$); die übrigen Daten bleiben gleich, wenn die Einbuchtung als Kapazitätsbelastung vernachlässigt wird.

Diese Anschwingströme sind natürlich unterste Grenzen. Durch Ankopplung eines äusseren Widerstandes, der für einen guten Wirkungsgrad 5–10mal kleiner sein muss als der Parallelwiderstand des Resonanzkreises, steigt der Anschwingstrom entsprechend.

Für die angeführten Daten wird nun ($v_0 \sim 0,1 w$, $D \sim l$)

$$\frac{DwZ_0}{v_0 l R} \sim 3,10^{-3} \ll 1$$

so dass die Darstellung (15) von ω erlaubt ist.

Bei einer 2-prozentigen Spannungsänderung (1% Geschwindigkeitsänderung) ergibt sich nach (15) eine Abweichung von der Resonanzfrequenz

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = 8,2 \cdot 10^{-5} \sim 0,1 \text{ ‰}$$

Das sind bei der betrachteten Frequenz ca. $5 \cdot 10^5$ Hertz. Mit diesem Wert wird

$$\cotg \beta l = 1,29 \cdot 10^{-4}$$

so dass $\frac{R}{Z_0} \cotg \beta l$ noch wesentlich kleiner als 1 und (14) ebenfalls legitimiert ist.

Man kann weiter fragen, wie gut die Anschwingbedingung (10a) bei dieser Frequenzabweichung noch erfüllt ist, d. h. um wieviel der Resonanznenner vom Wert $\left(\frac{Z_0}{R}\right)^2$ abweicht. Man bekommt

$$(\cotg \beta l)^2 \sim 0,1 \left(\frac{Z_0}{R}\right)^2$$

Der Anschwingstrom braucht also nicht wesentlich grösser zu sein als im Resonanzfall.

Es ist zu betonen, dass beim Klystron die charakteristischen Daten des Resonanzkreises eine viel grössere Rolle spielen als beim Magnetfeldgenerator, weil die Elektronen beim einmaligen Durchtritt durch das Wechselfeld die volle Wirkung von diesem erfahren müssen, was die Voraussetzung möglichst homogener Wechselfelder im Steuer- bzw. Auskopplerraum erfordert; darin liegt auch neben der Elektronenoptik eine gewisse Schwierigkeit.

Literaturverzeichnis.

¹⁾ F. LÜDI: Brown-Boveri Mitteilungen, Sonderheft der Hochfrequenztechnik, Dezember 1941.

²⁾ F. LÜDI: Helv. Physica Acta, Vol. XIII, Fasc. Sec. 1940, S. 122.

³⁾ F. LÜDI: Helv. Physica Acta, Vol. XIII, Fasc. Sextus 1940, S. 490.

⁴⁾ F. BORGNIS: E. T. Z. Bd. 61 1940, S. 461.

Errata.

Zur Theorie der geschlitzten Magnetfeldröhre von F. Lüdi, Bd. XVI, Fasc. 1 (1943):

Seite 63: Gleichung (11) soll heissen $\xi = \zeta + K$.

Seite 72: unten muss stehen 12 cm statt 20 cm Wellenlänge.

Etude sur l'emploi du pont de Wheatstone pour l'enregistrement continu des variations de résistance électrique

par E. Brasey.

(17. VIII. 1942.)

Résumé. Lorsque le pont de Wheatstone est utilisé pour l'enregistrement continu des variations d'une résistance au moyen des élongations du galvanomètre de pont, n'importe quelle sensibilité peut être obtenue au moyen d'une infinité de combinaisons des valeurs des bras du pont. Les diagrammes qui résument cette étude fournissent le moyen de choisir, parmi ces combinaisons, celle qui correspond le mieux aux conditions imposées par le phénomène physique enregistré par la variation de résistance.

1. Introduction et signification du problème.

Le pont de Wheatstone est un des montages classiques de la métrologie électrique. Il en existe de nombreuses variantes grâce auxquelles on exécute, dans de bonnes conditions de sensibilité, non seulement la mesure des résistances de grandeur moyenne mais encore celle des très petites résistances, des coefficients de self-induction et des capacités. Une des applications les plus courantes est celle qui consiste à enregistrer, par voie électrique, les variations d'une grandeur quelconque telle que la pression, l'état hygrométrique ou la température.

La recherche des conditions les plus favorables à la mesure d'une résistance se précise facilement lorsqu'on envisage l'emploi du pont en méthode de zéro. Par contre, si le pont, maintenu invariable, doit indiquer les variations d'une résistance au moyen des élongations du galvanomètre de pont, le problème se présente algébriquement sous une forme indéterminée. Il est cependant possible, en assignant un rôle convenable à chacun des paramètres, de délimiter le champ des valeurs acceptables de ces paramètres, d'en déterminer les valeurs optima et, enfin, d'établir des relations permettant de calculer quel est le montage le plus favorable, même dans le cas où l'un ou l'autre des paramètres est imposé par les conditions physiques du phénomène à enregistrer. Ces relations sont quelque peu compliquées, mais leur emploi est grandement facilité par les diagrammes d'orientation reproduits à la fin de cette étude (fig. 5 à fig. 9).

Désignons, dans le pont de Wheatstone (fig. 1), par x la résistance variable, par b , c , d , g et p les résistances des autres bras du pont et par E la force électromotrice de la source dont le pôle positif est relié aux bras x et d .

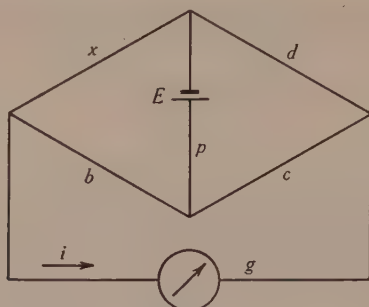


Fig. 1.

(Les bras x et d sont reliés au pôle positif de la source.)

Le courant i dans le galvanomètre est défini par la formule classique. :

$$i = E \cdot \frac{bd - cx}{M^3 + N^2x} \quad (4')$$

avec

$$M^3 = bcd + (c + d)bg + (b + c)dp + (b + c + d)gp$$

et

$$N^2 = bd + bc + cd + (c + d)g + (b + c)p + gp$$

On peut définir, comme sensibilité relative à l'enregistrement, σ , le rapport entre la variation relative du courant dans le galvanomètre, $-di/E$, et la variation relative de la résistance, dx/x , c'est-à-dire :

$$\sigma = - \frac{x}{E} \cdot \frac{di}{dx} = \frac{cM^3 + bdN^2}{(M^3 + N^2x)^2} \cdot x$$

La sensibilité relative passe par un maximum :

$$\sigma_M = \frac{1}{4} \left(\frac{bd}{M^3} + \frac{c}{N^2} \right), \text{ pour } x_0 = \frac{M^3}{N^2}, \quad (1')$$

et peut s'écrire :

$$\sigma = \sigma_M \frac{4}{2 + \frac{x_0}{x} + \frac{x}{x_0}}$$

Cette expression, représentée graphiquement dans la fig. 2, est indépendante des valeurs des bras du pont et reste valable même dans le cas limite pour lequel le circuit de mesure se réduit à une résistance constante en série avec la résistance à mesurer, le galvanomètre et la source.

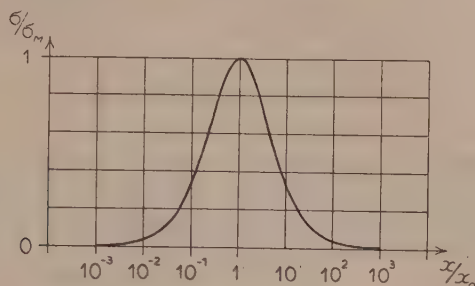


Fig. 2.

Courbe de sensibilité du pont de Wheatstone enregistreur.

La sensibilité relative dépend de cinq paramètres: b , c , d , g et p ; la discussion de cette expression n'est possible qu'à la condition de réduire le nombre des paramètres à quatre, au plus, en faisant coïncider le maximum de sensibilité avec l'équilibre du pont:

$$x_0 = \frac{M^2}{N^2} = \frac{bd}{c} \quad (1'')$$

Cette relation, qui présente l'avantage d'assigner, au maximum de sensibilité, une place précise dans le domaine d'enregistrement, est imposée par les conditions d'emploi rationnel du pont. En effet, la recherche d'une sensibilité élevée du montage implique que l'instrument enregistreur a une sensibilité adéquate et donne, de part et d'autre de sa position de zéro, des élongations, égales en général, qui ne dépassent pas le cadre de son échelle lorsque la résistance variable atteint ses valeurs extrêmes. L'allure de la courbe de sensibilité (fig. 2) montre que le montage le plus favorable à l'enregistrement de la variation d'une résistance, d'un minimum x' à un maximum x'' , est celui pour lequel on a $x_0 = \sqrt{x'x''}$. Or on vérifie justement (voir § 2) au moyen des formules (4') et (1'), que les élongations du galvanomètre sont égales et de sens contraires pour deux valeurs extrêmes x' et x'' satisfaisant à la relation $x_0 = \sqrt{x'x''}$, lorsque les bras du pont vérifient la relation $bd = cx_0$. La condition (1'') posée plus haut se trouve ainsi justifiée.

Vérifions encore que cette condition, la seule qui puisse s'exprimer par une relation précise, n'écarte aucun des solutions optima

du problème. On pourrait se demander, en effet, s'il n'existe pas, pour le produit bd une valeur particulière, telle que m^2 , pour laquelle la sensibilité maximum exprimée par

$$\sigma_M = \frac{1}{4} \left(\frac{m^2}{m^2(g+p+c) + bg(c+p) + dp(c+g) + cgp} + \frac{c}{m^2 + b(c+p) + d(c+g) + cg + cp + gp} \right),$$

serait plus grande que pour $bd = cx_0$. La valeur de $4\sigma_M$ représente la somme de deux fractions qui varient, en fonction de m^2 , en sens inverses l'une de l'autre, la première, de zéro asymptotiquement vers $\frac{1}{g+p+c}$, la seconde, de $\frac{1}{g+p+gp/c}$ asymptotiquement vers zéro. La sensibilité maximum varie très lentement en fonction des valeurs finies données à bd et le léger excédent que peut présenter la sensibilité optimum sur la sensibilité qui correspond à $bd = cx_0$ n'est pas comparable à l'avantage qui résulte de l'emploi rationnel de l'instrument enregistreur.

2. Equations fondamentales, paramètre d'orientation.

Le problème se trouve maintenant nettement délimité en même temps qu'il est résolu dans ses grandes lignes.

Le pont de Wheatstone présente la sensibilité relative optimum pour l'enregistrement de la variation d'une résistance, entre un minimum x' et un maximum x'' , lorsque la moyenne géométrique des valeurs extrêmes de la résistance variable, $x_0 = \sqrt{x'x''}$, et les bras fixes du pont, b, c, d, g et p , obéissent aux deux relations:

$$x_0 = \frac{bcd + (c+d)bg + (b+c)dp + (b+c+d)gp}{bd + bc + cd + (c+d)g + (b+c)p + gp} \text{ et } bd = cx_0 \quad (1'')$$

Ces deux relations, combinées l'une avec l'autre, fournissent les équations de résolution du pont:

$$(c+p)(x_0 - g) + (cx_0 + gp)(x_0 - c)b + cx_0(c+g)(x_0 - p) = 0 \quad (1)$$

et

$$d = \frac{cx_0}{b} \quad (2)$$

L'intensité du courant dans le galvanomètre et la sensibilité relative sont alors, l'une et l'autre, inversement proportionnelles à

$$\frac{N^2}{c} = R = x_0 + b + d + g + p + \frac{dg + bp + gp}{c} \quad (3)$$

et s'écrivent:

$$i = \frac{E}{R} \cdot \frac{x_0 - x}{x_0 + x} \quad (4)$$

et

$$\sigma = \frac{1}{2R} \cdot \frac{4}{2 + \frac{x}{x_0} + \frac{x_0}{x}} \quad (5)$$

Les élongations maxima du galvanomètre, de part et d'autre de son zéro, sont exprimées par:

$$i_x = -i_{x'} = \frac{E}{R} \cdot \frac{x_0 - x'}{x_0 + x'} = \frac{E}{R} \cdot \frac{x'' - x_0}{x'' + x_0} \quad (4_1)$$

En cas de court-circuit ou de rupture de la résistance variable, les élongations extrêmes du galvanomètre atteignent les valeurs

$$i_0 = -i_\infty = \frac{E}{R} \quad (4_2)$$

La sensibilité, variable au cours de l'enregistrement, passe par son maximum

$$\sigma_M = \frac{1}{2R} \quad (5_1)$$

pour $x = x_0 = \sqrt{x'x''}$, c'est-à-dire au moment où le courant dans le galvanomètre est nul. La sensibilité sur les bords de l'enregistrement s'écarte d'autant plus de son maximum que la variation totale de x est plus grande (v. fig. 2):

x''/x'	2	3	10	30	110	3000	1000	3000
σ/σ_M	0,971	0,928	0,730	0,522	0,330	0,206	0,119	0,070

Les équations (1) et (3) font ressortir la simultanéité des permutations de g et p , d'une part, de b et d , d'autre part, propriété bien connue du pont de Wheatstone. Cette propriété, qui sera utilisée tout au long de notre étude, assigne aux paramètres g et p un rôle de même nature: c'est donc à c que sera dévolu le rôle particulier de *paramètre d'orientation*. Les résistances g et p seront

considérées comme des variables indépendantes et serviront de coordonnées pour l'établissement des diagrammes d'orientation (fig. 5 à fig. 9) dans lesquels les valeurs de $b/x_0 = (b)$ et les valeurs de $R/x_0 = (R)$ seront représentées sous forme de faisceaux de courbes paramétriques ou de valeur constante pour différentes valeurs de $c/x_0 = (c)$. Remarquons, dès maintenant, que la permutation simultanée de g avec p et b avec d n'affecte pas la valeur de R , caractéristique de la sensibilité.

3. Délimitation du champ des valeurs acceptables pour g et p .

Seules les racines positives et réelles sont utilisables.

Le signe des racines b dépend des signes des coefficients de l'équation (1); une seule racine est positive si l'on a

$$\left. \begin{array}{l} g < x_0 < p \text{ ou } p < x_0 < g; \\ \text{si, par contre, les trois conditions} \\ g \leq x_0, p \leq x_0 \text{ et } c \leq x_0 \end{array} \right\} \quad (6)$$

sont vérifiées simultanément, l'équation a deux racines positives.

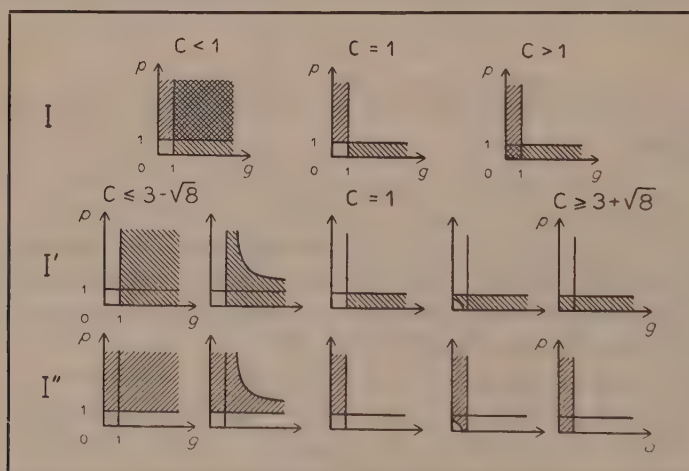


Fig. 3.

Représentation graphique des domaines de valeurs admissibles de g et de p pour $x_0 = 1$.

Ces conditions sont représentées graphiquement sous I dans la fig. 3; les hachures simples indiquent les domaines positifs de g et de p pour lesquels l'équation a une seule racine positive, les hachures croisées, ceux pour lesquels l'équation a deux racines positives.

Parmi les valeurs positives nous devons encore écarter les expressions imaginaires: la condition de réalité des racines est exprimée par l'inégalité:

$$(c^2 - 6cx_0 + x_0^2)[(g-h_1)(p-h_1) - A_1^2][(g-h_2)(p-h_2) - A_2^2] \geq 0$$

$$\left. \begin{aligned} \text{avec } h_1 &= \frac{2cx_0}{c-x_0-2\sqrt{cx_0}} & A_1 &= \frac{(c-x_0)\sqrt{cx_0}}{c-x_0-2\sqrt{cx_0}} \\ h_2 &= \frac{2cx_0}{c-x_0+2\sqrt{cx_0}} & A_2 &= \frac{(c-x_0)\sqrt{cx_0}}{c-x_0+2\sqrt{cx_0}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Le premier facteur de cette condition, $(c^2 - 6cx_0 + x_0^2)$, est négatif pour $3 - \sqrt{8} < c/x_0 < 3 + \sqrt{8}$; il est positif en dehors de ces limites. Les deux autres facteurs représentent, si on les égale à zéro, deux hyperboles équilatères:

$$\begin{aligned} H_1(g, p) &= (g - h_1)(p - h_1) - A_1^2 = 0 \\ \text{et } H_2(g, p) &= (g - h_2)(p - h_2) - A_2^2 = 0 \end{aligned} \quad (7_1)$$

Le produit de ces deux derniers facteurs est négatif si les coordonnées g et p représentent un point qui se trouve à la fois dans la région concave de l'une des hyperboles et dans la région convexe de l'autre, autrement dit, dans des régions de noms contraires des deux hyperboles; le produit est positif lorsque le point se trouve dans des régions de même nom. Les deux hyperboles ont leur axe réel sur la même droite $g = p = \varepsilon$ et les positions de leurs sommets sur cette droite y délimitent les régions convexes et concaves de chacune d'elles.

En représentant graphiquement, en fonction de c , les coordonnées égales des sommets:

$$\begin{aligned} s_1' &= h_1 + A_1, & s_1'' &= h_1 - A_1 = -\sqrt{cx_0}, \\ s_2' &= h_2 + A_2 = \sqrt{cx_0}, & s_2'' &= h_2 - A_2, \end{aligned} \quad (7_2)$$

on obtient un diagramme (fig. 4) sur lequel apparaît clairement le signe du premier membre de la condition (7). L'échelle arbitraire adoptée pour ce diagramme a pour but de rendre bien lisible le détail des courbes au voisinage de $c = 0$ malgré la grande étendue du domaine représenté. On sépare sans difficulté les régions de la droite $g = p = \varepsilon$ qui correspondent, d'après la condition (7), à des valeurs imaginaires de b (hachures serrées) et qui doivent être écartées; en faisant intervenir la condition (6), représentée sous I de la fig. 3, on précise, dans le domaine encore très étendu correspondant aux valeurs réelles, celui qui correspond à des valeurs positives de b (hachures espacées). On constate que, en dehors de l'intervalle central, $3 - \sqrt{8} < c/x_0 < 3 + \sqrt{8}$, les limites de ce der-

nier domaine sont fixes et indépendantes de c . Dans l'intervalle central, une seule des limites est mobile en fonction de c ; elle est formée par la branche d'hyperbole, H_2'' , de sommet $g = p = s_2'' = h_2 - A_2$ et de centre $g = p = h_2$, qui fait évoluer le domaine variable de l'une des formes fixes à l'autre.

Pour $3 - \sqrt{8} < c/x_0 < 1$, la branche d'hyperbole, H_2'' , tourne sa convexité vers l'origine et les coordonnées de son centre, $\varepsilon = h_2$ sont plus grandes que $\varepsilon = x_0$; il en résulte que les deux droites

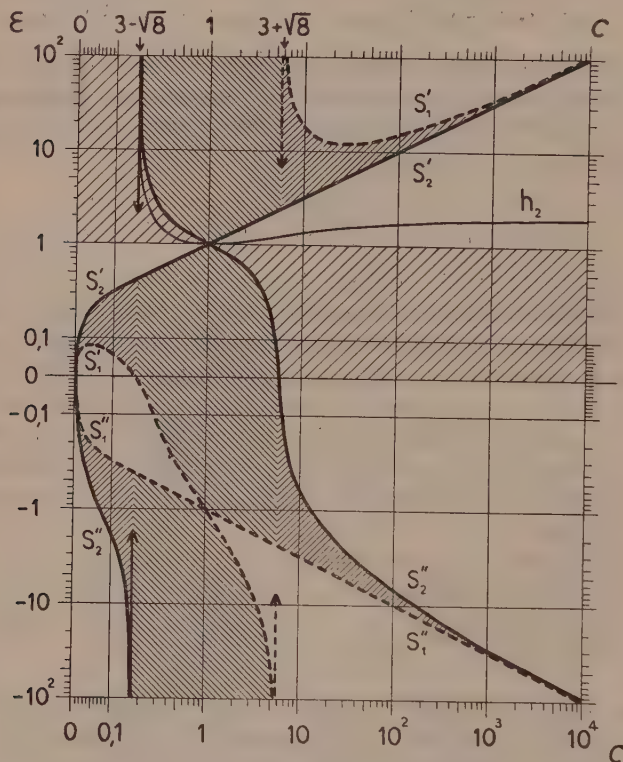


Fig. 4.

Diagramme auxiliaire pour la séparation des valeurs $g = p = \varepsilon$ qui correspondent, pour $x_0 = 1$ et en fonction de c ,

- 1) à b imaginaire: hachures serrées;
- 2) à b réel et négatif: régions non hachurées;
- 3) à b réel et positif: hachures espacées.

$g = x_0$ et $p = x_0$ sont comprises dans le domaine des valeurs admissibles.

Pour $c/x_0 = 1$, le diagramme indique que la branche d'hyperbole H_2'' se réduit à ses deux asymptotes.

Pour $1 < c/x_0 < 3 + \sqrt{8}$, la branche d'hyperbole H_2'' dont le sommet est compris entre l'origine et le point $g = p = x_0$, tourne sa concavité vers l'origine et coupe les axes de coordonnées aux points équidistants de l'origine :

$$[g_H]_0 = [p_H]_0 = h_2 - \frac{A_2^2}{h^2} = \sqrt{cx_0} - \frac{c - x_0}{2} \quad (7_3)$$

En se reportant à la ligne I de la fig. 3, on vérifie que la limite mobile entre le domaine des valeurs réelles de b et celui des valeurs imaginaires se trouve bien dans la région où l'équation a ses deux racines positives. Avant de tracer cette limite sur les diagrammes I de la fig. 3, remarquons que chacun de ceux-ci peut être considéré comme la superposition de deux domaines partiels I' et I'' qui se déduisent l'un de l'autre par permutation de g avec p . L'interdépendance de ces domaines partiels concerne non seulement leurs limites mais encore toutes les valeurs de b et de R de chaque domaine, en raison de la simultanéité des permutations de g et p d'une part, de b et d d'autre part. En effet, si l'on connaît, dans l'un des domaines partiels, un groupe de valeurs cohérentes telles que :

$(g, p, b, d, R)' = (\gamma, \pi, \beta, \delta, \varrho)$ dans le domaine partiel I', la permutation simultanée de g avec p et de b avec d fait apparaître le groupe cohérent conjugué :

$(g, p, b, d, R)'' = (\pi, \gamma, \delta, \beta, \varrho)$ dans l'autre domaine partiel I''. Nous savons (§ 2) que la valeur de R n'est pas modifiée par la permutation.

Lorsque l'équation (1) a ses deux racines réelles et positives, celles-ci correspondent, de toute évidence, l'une au domaine I', l'autre au domaine I'' ; soient

$(g, p, b, d, R)_1' = (\gamma, \pi, \beta_1, \delta_1, \varrho_1)$ dans le domaine partiel I' et

$(g, p, b, d, R)_2'' = (\gamma, \pi, \beta_2, \delta_2, \varrho_2)$ dans le domaine partiel I'', les deux groupes cohérents correspondant à chacune des deux racines b obtenues pour un couple donné de coordonnées, $(g, p) = (\gamma, \pi)$. A chacun de ces groupes correspond, dans l'autre domaine partiel, un groupe conjugué que l'on obtient par permutation :

$(g, p, b, d, R)_1'' = (\pi, \gamma, \delta_1, \beta_1, \varrho_1)$ dans le domaine partiel I'' et

$(g, p, b, d, R)_2' = (\pi, \gamma, \delta_2, \beta_2, \varrho_2)$ dans le domaine partiel I'.

On voit, qu'en définitive, les deux racines sont utilisées dans chacun des deux groupes, l'une sous forme directe, l'autre sous forme permutée. Il suffit, par conséquent, d'étudier un seul des domaines partiels, le second pouvant toujours en être déduit par permutation. Dans la suite, nous ne retiendrons que les valeurs qui se rapportent au domaine I' (v. fig. 3).

4. Courbes paramétriques ou d'égale valeur de b .

On calcule les faisceaux de courbes paramétriques de b au moyen de l'équation (1) ordonnée par rapport aux variables g et p :

$$\left[g - \frac{x_0(b^2 - c^2)}{b^2 + (c - x_0)b + cx_0} \right] \left[p - \frac{c(x_0^2 - b^2)}{b^2 + (c - x_0)b + cx_0} \right] = \left[\frac{2bcx_0}{b^2 + (c - x_0)b + cx_0} \right]^2 \quad (1_1)$$

Ce sont des hyperboles équilatères dont nous préciserons l'évolution par la suite. Notons que la courbe correspondant à $b = x_0$, définie par l'équation

$$\left[g - \frac{x_0^2 - c^2}{2c} \right] p = x_0^2$$

a, pour asymptote, la direction positive de l'axe des g ; elle traverse toujours le domaine des valeurs admissibles et peut servir de point de repère pour l'établissement des autres courbes paramétriques.

5. Courbes d'égale valeur de R ou d'égale sensibilité.

La sensibilité relative maximum, pour un montage donné du pont, est inversement proportionnelle à

$$R = x_0 + b + d + g + p + \frac{dg + bp + gp}{c} \quad (3)$$

valeur facile à établir si, s'étant donné un couple (g, p) de coordonnées et une valeur de c , on a calculé les valeurs correspondantes de b et de d au moyen des formules (1) et (2). Si, par contre, on se propose de déterminer les valeurs des bras du pont qui correspondent à une sensibilité déterminée, il y a avantage à éliminer de cette relation les paramètres b et d pour l'amener à la forme $R = R(g, p)$; on obtient:

$$R^2 - R \cdot \left[\frac{c + g}{x_0 - p} \cdot \frac{cx_0 - p^2}{c} + \frac{c + p}{x_0 - g} \cdot \frac{cx_0 - g^2}{c} \right] + \frac{c + g}{x_0 - p} \cdot \frac{c + p}{x_0 - g} \left[\frac{cx_0 - gp}{c} \right]^2 = 0 \quad (3_1)$$

ou

$$\left. \begin{aligned} & g^3 p^3 + c(g^3 p^2 + g^2 p^3) - c(2R + 2x_0 - c)g^2 p^2 \\ & + c(Rx_0 - Rc - 2cx_0)(g^2 p + gp^2) \\ & + c^2(R^2 + x_0^2 - 2cx_0)gp \\ & + 2c^2 x_0 R(g^2 + p^2) \\ & - c^2 x_0(R + x_0)(R - c)(g + p) + c^2 x_0^2(R - c)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3_2)$$

Les couples de valeurs (g, p) tirés de cette équation conduisent, au moyen des équations (1) et (2), aux valeurs de b et de d qui correspondent à la sensibilité imposée.

6. Etablissement des diagrammes d'orientation.

La résolution de l'équation (3₂), pour un cas donné, est facilitée par l'emploi des diagrammes d'orientation (fig. 5 à fig. 9); pour l'établissement de ceux-ci, on évite la résolution fastidieuse de l'équation du troisième degré en introduisant les variables auxiliaires, $S = g + p$ et $P^2 = gp$, par lesquelles on ramène l'équation à une forme du second degré en S :

$$2c^2x_0R \cdot S^2 - c[cx_0R^2 - (x_0 - c)(P^2 - cx_0)R - (P^2 - cx_0)^2] \cdot S \Big\} \quad (3_3) \\ + [c^2(P^2 - x_0^2)R^2 - 2c(P^2 + cx_0)^2 \cdot R + (P^2 - cx_0)^2(P^2 + c^2)] = 0$$

Cette équation définit S en fonction de P^2 pour une valeur donnée de R ; les valeurs correspondantes de g et de p sont alors données par les racines de l'équation $y^2 - Sy + P^2 = 0$.

En raison de la complexité des coefficients, les équations (3₁), (3₂) et (3₃) se prêtent mal à une discussion générale dont l'intérêt serait d'ailleurs minime, si l'on tient compte de la faible étendue des domaines des valeurs admissibles pour g et p . Il est plus utile d'analyser les cas pour lesquelles les équations se simplifient ou fournissent, dans le champ des valeurs acceptables, des points de repère qui faciliteront l'établissement des diagrammes d'orientation. Nous préciserons donc, pour le domaine I', les valeurs prises par b et par R lorsque les points qui représentent graphiquement g et p sont situés:

- 1° sur l'hyperbole limite H_2'' ,
- 2° sur les axes de coordonnées, $p = 0$, et $g = 0$
- 3° sur les droites parallèles aux axes, $p = x_0$ et $g = x_0$,
- 4° sur la droite à 45° par l'origine, $g = p = \varepsilon$.

Cette analyse ne présente pas de difficultés; nous n'en donnerons que les résultats essentiels en les accompagnant de tables numériques sommaires qui permettront de déduire l'allure générale des courbes de valeur constante de b et de R .

6a. Courbes de valeur constante de b et de R et hyperbole limite H_2'' .

La branche d'hyperbole H_2'' constitue la limite commune aux deux domaines partiels I' et I'' dans les régions à deux racines; elle représente, par définition, aussi bien l'enveloppe des courbes

de valeur constante de b que celle des courbes de valeur constante de R ; elle marque, par son point de tangence avec chacune de ces courbes, la séparation entre les deux tronçons qui appartiennent à chacun des domaines partiels. Les coordonnées du point de tangence s'obtiennent en résolvant le système formé, d'une part par l'équation de l'hyperbole H_2 , d'autre part par l'équation (1) ou par l'équation (3₁) réduites pour le cas de la racine double; ces coordonnées sont, pour les courbes de valeur constante de b ,

$$g_{\text{Hb}} = x_0 \frac{b - c \frac{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}}{b + x_0 \frac{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}} \quad \text{et} \quad p_{\text{Hb}} = c \frac{x_0 \frac{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}} - b}{c \frac{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}} + b} \quad (7_4)$$

Les coordonnées g_{HR} et p_{HR} du point de tangence des courbes d'égale valeur de R avec l'hyperbole H_2 sont les racines de l'équation $y^2 + S \cdot y + P^2 = 0$, dans laquelle on a :

$$P^2 = c x_0 \left[1 - \frac{R}{\sqrt{c} x_0} \cdot \frac{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}} \right] \quad (7_5)$$

et $S = 2 \sqrt{c} x_0 - \left[\frac{R}{\sqrt{c} x_0} \cdot \frac{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}} \right] \left[\frac{c - x_0}{2} + \sqrt{c} x_0 \right]$

Pour

$$R = 8 c x_0 \left[\frac{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}{c - x_0 + 2 \sqrt{c} x_0} \right]^2$$

on a $g_{\text{HR}} = p_{\text{HR}}$, c'est-à-dire que le point de tangence de la courbe R avec l'hyperbole limite H_2 coïncide avec le sommet de celle-ci.

6b. Cas limite: $p = 0$ ou $g = 0$.

Les équations (1) et (3₁) se réduisent, pour ce cas limite, à :

$$(x_0 - g) b^2 - x_0 (c - x_0) b + x_0^2 (c + g) = 0 \quad (1_2)$$

$$(x_0 - g) R^2 - [2 c x_0 - (c - x_0) g - 2 g^2] R + c x_0 (c + g) = 0 \quad (3_4)$$

ou

$$g = x_0 \left[\frac{b}{b - x_0} - \frac{c}{b + x_0} \right] \quad (1_3)$$

$$g = \frac{R - c}{4 R} [R + x_0 \pm \sqrt{R^2 - 6 x_0 R + x_0^2}] \quad (3_5)$$

Elles font apparaître, en tenant compte des conditions (6) et (7), les trois propriétés suivantes :

1° Seules les valeurs $b > x_0$ se présentent le long de l'axe $p = 0$.

2° Lorsque $0 \leq c/x_0 \leq 3 + \sqrt{8}$, R passe, le long de l'axe $p = 0$, par un minimum minimorum, $R_{\min} = (3 + \sqrt{8})x_0$, indépendant de c , pour une abscisse

$$g_m = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) x_0 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) c.$$

3°. Le long de l'axe $p = 0$, il existe, entre b et R , une relation remarquable indépendante de c ,

$$R_g = b \cdot \frac{b + x_0}{b - x_0} \quad (8)$$

Les valeurs principales de ce cas limite ainsi que la formule (7₃) sont rassemblées dans les tableaux qui suivent.

$$0 < c \leq x_0$$

Racine directe sur l'axe $p = 0$

g	R	b
x_0	∞	∞
g_m	$(3 + \sqrt{8})x_0$	$(1 + \sqrt{2})x_0$
∞	∞	x_0

Racine permutée sur l'axe $g = 0$

néant		
-------	--	--

$$x_0 \leq c \leq (3 + \sqrt{8})x_0$$

Racine directe sur l'axe $p = 0$

g	R	b
$[g_H]_0$	$\sqrt{c}x_0 \frac{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}}$	$x_0 \frac{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}}$
x_0	$x_0 \frac{c + x_0}{c - x_0}$	$c \frac{c + x_0}{c - x_0}$
g_m	$(3 + \sqrt{8})x_0$	$(1 + \sqrt{2})x_0$
∞	∞	x_0

Racine permutée sur l'axe $g = 0$

p	R	b
$[p_H]_0$	$\sqrt{c}x_0 \frac{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}}$	$c \frac{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}$
x_0	∞	0

$$(3 + \sqrt{8})x_0 \leq c < \infty$$

Racine directe sur l'axe $p = 0$

g	R	b
0	c	$\frac{c-x_0-\sqrt{c^2-6cx_0+x_0^2}}{2}$
x_0	$x_0 \frac{c+x_0}{c-x_0}$	$c \frac{c+x_0}{c-x_0}$
∞	∞	x_0

Racine permutée sur l'axe $g = 0$

p	R	b
0	c	$\frac{c-x_0-\sqrt{c^2-6cx_0+x_0^2}}{2}$
x_0	∞	0

I. Valeurs limites de $R/x_0 = \langle R \rangle$ en fonction de $c/x_0 = \langle c \rangle$, sur l'axe $p = 0$, et valeurs correspondantes de $g/x_0 = \langle g \rangle$ et de $b/x_0 = \langle b \rangle$.

$\langle c \rangle$	$\langle g \rangle$		$\langle b \rangle$		$\langle R \rangle$	
	var	à $\langle g_m \rangle$ à ∞	var.	à $\langle b_m \rangle$ à 1	var.	à $\langle R_{min} \rangle$ à ∞
0	1	à 1,7071 à ∞	∞	à 2,4142 à 1	∞	à 5,8284 à ∞
0,1	1	à 1,6778 à ∞	∞	à 2,4142 à 1	∞	à 5,8284 à ∞
0,3	1	à 1,6192 à ∞	∞	à 2,4142 à 1	∞	à 5,8284 à ∞
0,5	1	à 1,5607 à ∞	∞	à 2,4142 à 1	∞	à 5,8284 à ∞
1	1	à 1,4142 à ∞	∞	à 2,4142 à 1	∞	à 5,8284 à ∞
2	0,9142	à 1,1213 à ∞	5,8284	à 2,4142 à 1	8,2426	à 5,8284 à ∞
3	0,7321	à 0,8284 à ∞	3,7321	à 2,4142 à 1	6,4641	à 5,8284 à ∞
4	0,5	à 0,5355 à ∞	3	à 2,4142 à 1	6	à 5,8284 à ∞
5	0,2361	à 0,2426 à ∞	2,6180	à 2,4142 à 1	5,8541	à 5,8284 à ∞
5,8284	0	à ∞		2,4142 à 1		5,8284 à ∞
6	0	à ∞	2	à 1	6	à ∞
8	0	à ∞	1,4384	à 1	8	à ∞
10	0	à ∞	1,2984	à 1	10	à ∞
20	0	à ∞	1,1185	à 1	20	à ∞
∞	0	à ∞		1		∞

II. Valeurs limites de $R/x_0 = \langle R \rangle$ en fonction de $c/x_0 = \langle c \rangle$, sur l'axe $g = 0$, et valeurs correspondantes de $p/x_0 = \langle p \rangle$ et de $b/x_0 = \langle b \rangle$.

$\langle c \rangle$	$\langle p \rangle$	$\langle b \rangle$	$\langle R \rangle$
1	1	0	∞ à
2	1 à 0,9142	0 à 0,3431	∞ à 8,2426
3	1 à 0,7321	0 à 0,8038	∞ à 6,4641
4	1 à 0,5	0 à 1,3333	∞ à 6
5	1 à 0,2361	0 à 1,9098	∞ à 5,8641
5,8284	1 à 0	0 à 2,4142	∞ à 5,8284
6	1 à 0	0 à 2	∞ à 6
8	1 à 0	0 à 1,4384	∞ à 8
10	1 à 0	0 à 1,2984	∞ à 10
20	1 à 0	0 à 1,1185	∞ à 20

6c. *Cas particulier: $p = x_0$ ou $g = x_0$.*

Les équations (1) et (3₁) se réduisent ici à des expressions simples.

Sur la droite $p = x_0$, pour l'intervalle $0 < c \leq x_0$.

$$b = x_0 \frac{(c - x_0)(c + g)}{(c + x_0)(x_0 - g)} \quad (1_4)$$

et

$$\text{et } R = \frac{x_0}{c} \cdot \frac{(c + x_0)(c - g)^2}{(c - x_0)(x_0 - g)} \quad (3_6)$$

avec, pour R , un minimum relatif:

$$R_m = \frac{4 x_0 (c + x_0)}{c},$$

correspondant à

$$g_m = 2 x_0 - c \quad \text{et} \quad b_m = \frac{2 x_0^2}{c + x_0}$$

Sur la droite $p = x_0$, pour l'intervalle $x_0 \leq c < \infty$.

$$b = 0 \quad \text{et} \quad R = \infty$$

Sur la droite $g = x_0$, pour l'intervalle $0 < c \leq x_0$

$$b = \infty \quad \text{et} \quad R = \infty$$

Sur la droite $g = x_0$, pour l'intervalle $x_0 \leq c < \infty$

$$b = c \frac{(c + x_0)(x_0 - p)}{(c - x_0)(c + p)} \quad (1_5)$$

et

$$R = \frac{x_0}{c} \cdot \frac{(c + x_0)(c - p)^2}{(c - x_0)(x_0 - p)} \quad (3_7)$$

avec, pour R un minimum relatif,

$$R_m = \frac{4 x_0 (c + x_0)}{c}, \text{ correspondant à } g_m = 2 x_0 - c \text{ et } b_m = \frac{c(c + x_0)}{2 x_0}$$

6d. *Cas singulier: le point ($g = x_0, p = x_0$) lorsque $c = x_0$.*

Lorsque $g = p = c = x_0$, l'équation (1) est satisfaite par n'importe quelle valeur de b et l'équation (3₁) se réduit à

$$R = 2 x_0 \left(2 + \frac{b}{x_0} + \frac{x_0}{b} \right)$$

avec $R_{\min} = 8 x_0$ pour $b = x_0$, et $R = \infty$ pour $b = 0$ et pour $b = \infty$.

Le point $(g = x_0, p = x_0)$ est donc le point de convergence de toutes les courbes de valeur constante de b dont le paramètre est compris entre 0 et ∞ , en même temps que le point de convergence d'un double faisceau de toutes les courbes de valeur constante de R dont le paramètre est compris entre $8 x_0$ et ∞ .

L'inclinaison $\text{tg } \beta$ des courbes de valeur constante de b se déduit de l'équation (1), réduite pour le cas $c = x_0$. On a

$$\left[\frac{dp}{dg} \right]_{c=x_0} = \frac{(x_0 + p)b^2 - (x_0 - p)x_0^2}{(x_0 - g)b^2 - (x_0 + g)x_0^2}$$

et $\text{tg } \beta = \left[\frac{dp}{dg} \right]_{c=g=p=x_0}$ d'où $\text{tg } \beta = - \left[\frac{b}{x_0} \right]^2$

Les courbes correspondant à un couple de valeurs cohérentes de b et de R ont évidemment la même inclinaison; on aura donc, en désignant par $\text{tg } \varrho$ l'inclinaison d'une courbe de paramètre R ,

$$R = 2 x_0 \left(2 + \sqrt{-\text{tg } \varrho} + \sqrt{-\frac{1}{\text{tg } \varrho}} \right)$$

d'où

$$\text{tg}^2 \varrho + \frac{R^2 - 8 R x_0 + 8 x_0^2}{4 x_0^2} \text{tg } \varrho + 1 = 0$$

Cette équation confirme que le minimum de R est bien $8 x_0$ pour ce cas singulier; elle montre qu'à chaque valeur du paramètre correspondant, pour R , deux branches de courbe qui divergent à partir du point (x_0, x_0) en encadrant les branches de courbe dont le paramètre est moins élevé. L'écart angulaire, nul pour $R = 8 x_0$ ($\varrho' = \varrho'' = -45^\circ$), atteint 90° pour $R = \infty$, ($\varrho' = 0, \varrho'' = -90^\circ$).

III. Valeurs limites de $R/x_0 = (R)$ en fonction de $c/x_0 = (c)$, sur la droite $p = x_0$, et valeurs correspondantes de $g/x_0 = (g)$ et de $b/x_0 = (b)$.

(c)	(g)		(b)		(R)	
	1 à $(g_m) = 2 - c$ à ∞		∞ à $(b_m) = \frac{2}{c+1}$ à $\frac{1-c}{1+c}$		∞ à $(R_m) = \frac{4(c+1)}{c}$ à ∞	
0	1 à	2 à ∞	∞ à	2 à 1	∞ à	∞
0,1	1 à	1,9 à ∞	∞ à	1,8182 à 0,8182	∞ à	44 à ∞
0,3	1 à	1,7 à ∞	∞ à	1,5385 à 0,5385	∞ à	17,3333 à ∞
0,5	1 à	1,5 à ∞	∞ à	1,3333 à 0,3333	∞ à	12 à ∞
0,9	1 à	1,1 à ∞	∞ à	1,0526 à 0,0526	∞ à	8,4444 à ∞
1	1		∞ à	1 à 0	∞ à	8 à ∞
$1 \leq c < \infty$		1 à ∞		0		∞

IV. Valeurs limites de $R/x_0 = (R)$ en fonction de $c/x_0 = (c)$, sur la droite $g = x_0$, et valeurs correspondantes de $p/x_0 = (p)$ et de $b/x_0 = (b)$.

(c)	(p)		(b)			(R)		
	0 à $(p_m) = 2 - c$ à 1		$\frac{c+1}{c-1}$ à $(b_m) = \frac{c(c+1)}{2}$ à 0			$\frac{c(c+1)}{c-1}$ à $(R_m) = \frac{4(c+1)}{c}$ à ∞		
$0 < c < 1$	0	à 1	∞			∞		
1		1	∞	à 1	à 0	∞	à 8	à ∞
1,1	0 à 0,9	à 1	21	à 1,155	à 0	23,1	à 7,6363	à ∞
1,4	0 à 0,6	à 1	6	à 1,68	à 0	8,4	à 6,8571	à ∞
1,8	0 à 0,2	à 1	3,5	à 2,52	à 0	6,3	à 6,2222	à ∞
2	0	à 1		3	à 0		6	à ∞
$1 + \sqrt{2}$	0	à 1	2,4142		à 0	5,8284		à ∞
3	0	à 1	2		à 0	6		à ∞
4	0	à 1	1,6667		à 0	6,6667		à ∞
5	0	à 1	1,5		à 0	7,5		à ∞
6	0	à 1	1,4		à 0	8,4		à ∞
8	0	à 1	1,2857		à 0	10,2857		à ∞
10	0	à 1	1,2222		à 0	12,2222		à ∞
20	0	à 1	1,1053		à 0	22,1053		à ∞
50	0	à 1	1,0408		à 0	52,0408		à ∞
∞	0	à 1	1		à 0	∞		

6e. Cas particulier: la droite à 45° , $g = p$.

En posant $g = p = \varepsilon$, les équations (1) et (3) se réduisent à

$$b^2 + \frac{(\varepsilon^2 + c x_0)(c - x_0)}{(\varepsilon + c)(\varepsilon - x_0)} + c x_0 = 0 \text{ et} \quad (1_6)$$

$$R = \frac{(\varepsilon^2 - c x_0)(\varepsilon + c)}{c(\varepsilon - x_0)} \quad (3_8)$$

dont le domaine de validité apparaît sans ambiguïté sur la fig. 3, ligne I'.

A la limite des racines positives réelles, représentée, ici, par le sommet de l'hyperbole limite H_2'' , c'est-à-dire pour

$$\varepsilon = s_2'' = \sqrt{c x_0} \frac{2 \sqrt{c x_0} + x_0 - c}{2 \sqrt{c x_0} - x_0 + c}, \quad (7_2)$$

la première de ces équations a ses racines égales exprimées par $b_s = \sqrt{c x_0}$, (1₇) en même temps que (§ 6a),

$$R_s = 8 c x_0 \left[\frac{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}{c - x_0 + 2 \sqrt{c x_0}} \right]^2 \quad (3_9)$$

7. Allure générale des courbes d'égale valeur de R dans le domaine I' .

Bien qu'ils procèdent d'une évolution continue, les segments de courbe compris dans le domaine des valeurs admissibles présentent des types différents selon que les limites du domaine sont représentées par les axes de coordonnées, par les droites $p = x_0$ ou $g = x_0$ ou par la branche d'hyperbole H_2'' (§ 3 et fig. 3).

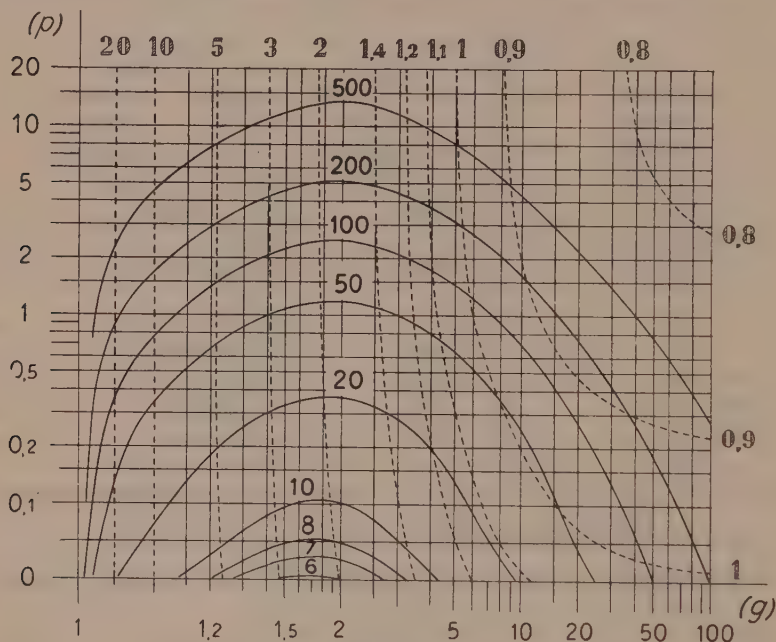


Fig. 5.

Diagramme pour $\frac{c}{x_0} = (c) = 0,1$.

Trait plein: $\frac{R}{x_0} = (R)$; pointillé: $\frac{b}{x_0} = (b)$.

L'existence d'un minimum minimorum de R sur l'axe $p = 0$ (§ 6b) et d'un minimum relatif sur la droite $p = x_0$ (§ 6c) ainsi que les propriétés du groupe $g = p = c = x_0$ (cas sing., § 6d), impliquent, pour chaque valeur du paramètre R , l'existence de deux branches de courbe qui s'infléchissent l'une vers l'autre.

$$0 < \frac{c}{x_0} \leq 3 - \sqrt{8} \quad (\text{fig. 5})$$

En l'absence d'hyperbole limite (§ 3), les deux branches de courbe correspondant à un même paramètre R se raccordent pour

ne former qu'une seule courbe qui tourne sa concavité vers l'axe $p = 0$ et dont l'ordonnée maximum croît en même temps que R .

$$3 - \sqrt{8} < \frac{c}{x_0} < 3 + \sqrt{8}$$

Pour R croissant, les deux branches cessent de se raccorder dès qu'elles ont chacune un point de tangence distinct avec l'hyperbole limite, c'est-à-dire (§ 6a) lorsque

$$R > 8 c x_0 \left(\frac{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}{c - x_0 + 2\sqrt{c}x_0} \right)^2.$$

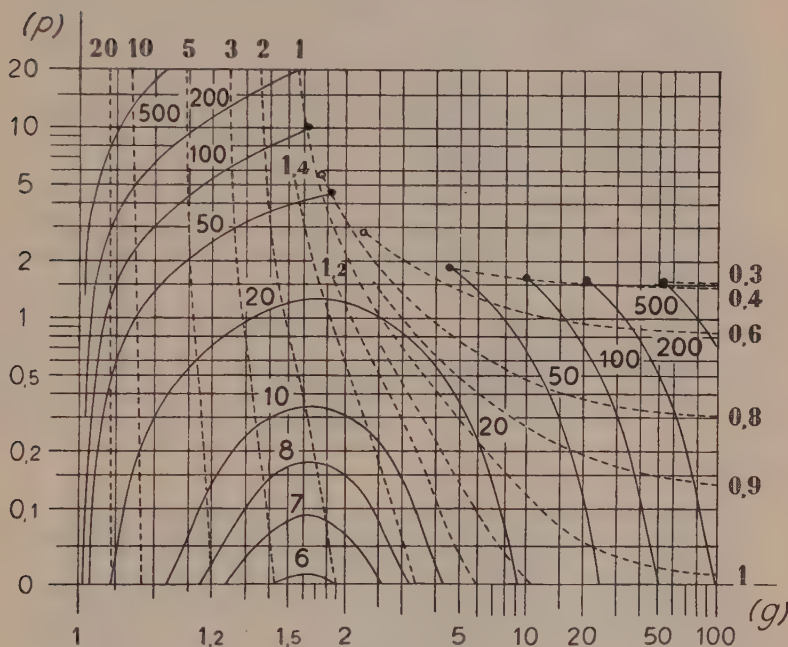


Fig. 6.

Diagramme pour $\frac{c}{x_0} = (c) = 0,3$.

Trait plein: $\frac{R}{x_0} = (R)$; pointillé: $\frac{b}{x_0} = (b)$.

Pour $3 - \sqrt{8} < \frac{c}{x_0} < 1$ (fig. 6) les diagrammes, dont l'hyperbole H_2'' est l'enveloppe, donnent plutôt l'impression de couper cette enveloppe parce que le raccordement de chaque branche, avec son prolongement algébrique du domaine I'' (c'est-à-dire avec la conjuguée de l'autre branche du domaine I') (§ 3), se fait par un

*

arc dont le rayon de courbure, très court, tourne d'à peu près 180° dans le voisinage du point de tangence avec la courbe enveloppée.

Pour $\frac{c}{x_0} = 1$ (fig. 7), l'hyperbole limite H_2'' se réduit à ses asymptotes $g = x_0$ et $p = x_0$; toutes les branches dont le paramètre est supérieur à $R=8 x_0$ convergent vers le centre de l'hyperbole $g = p = x_0$ (cas sing. § 6d).

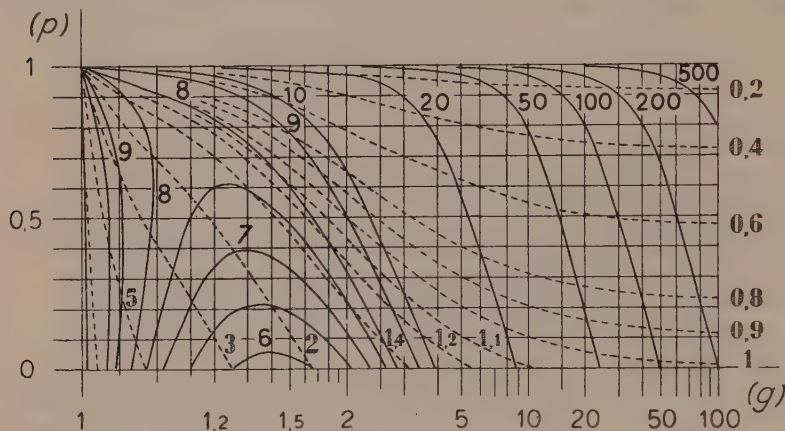


Fig. 7.

Diagramme pour $c/x_0 = (c) = 1$.

Trait plein: $\frac{R}{x_0} = (R)$; pointillé: $\frac{b}{x_2} = (b)$.

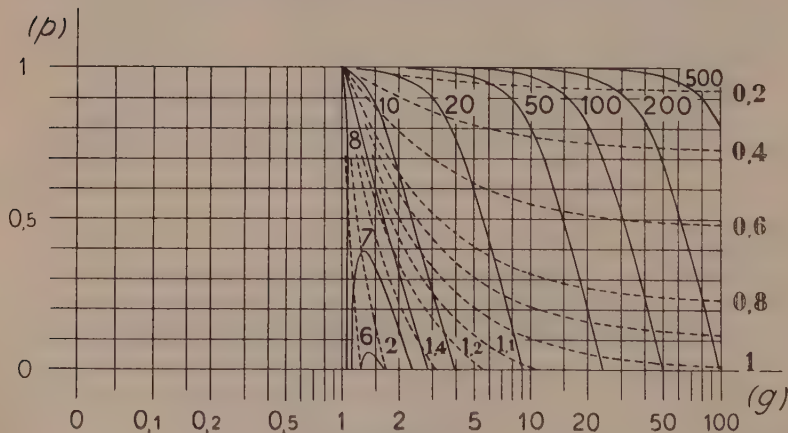


Fig. 7 bis.

Diagramme pour $c/x_0 = (c) = 1$.

Trait plein: $\frac{R}{x_0} = (R)$; pointillé: $\frac{b}{x_0} = (b)$.

Pour $1 < \frac{c}{x_0} < 3 + \sqrt{8}$ (fig. 8) et $R = R_s$, les deux branches R_s qui ont leur point de tangence avec l'hyperbole limite H_2'' sur le sommet de celle-ci, se raccordent en un point de rebroussement

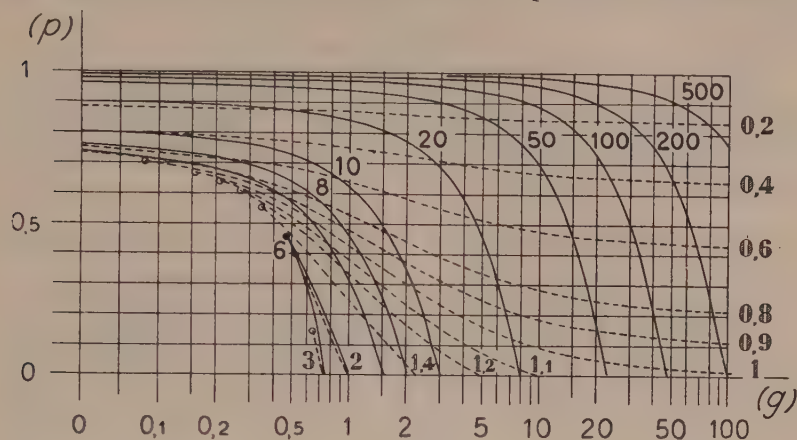


Fig. 8.

Diagramme pour $c/x_0 = (c) = 3$. Trait plein: $R/x_0 = (R)$; pointillé: $b/x_0 = (b)$.

parce qu'elles se dirigent vers le point de tangence dans le même sens; pour $R < R_s$, les deux branches se raccordent en une courbe continue; pour les valeurs de R immédiatement supérieures à R_s , les deux branches sont séparées et s'arrêtent sur deux points conjugués de l'hyperbole limite; pour

$$R > [R_H]_0 = \sqrt{cx_0} \frac{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}},$$

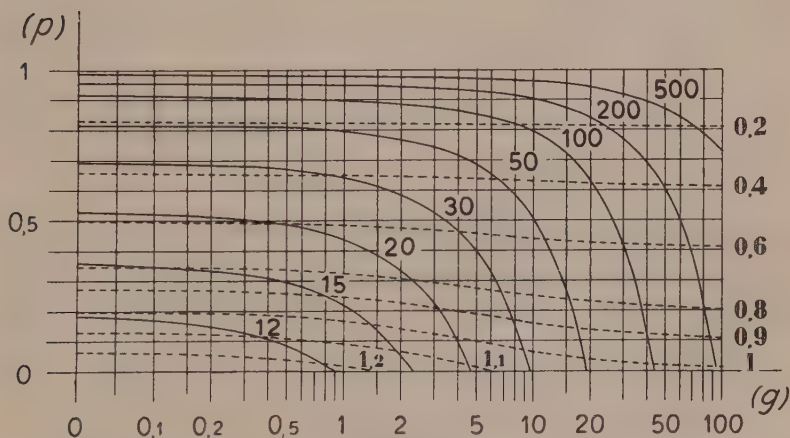


Fig. 9.

Diagramme pour $c/x_0 = (c) = 10$. Trait plein: $R/x_0 = (R)$; pointillé: $b/x_0 = (b)$.

(§ 6b) une seule branche subsiste, celle qui tourne sa concavité vers l'origine des coordonnées.

$$3 + \sqrt{8} \leq \frac{c}{x_0} < \infty \text{ (fig. 9).}$$

Seuls entrent en ligne de compte les diagrammes de R dont le paramètre est supérieur ou égal à c (§ 6b); ils comportent une seule branche, celle qui coupe les deux axes de coordonnées et qui tourne sa concavité vers l'origine.

V. Nature des diagrammes de R en fonction de (c) et de (R) .

Nature	un point	courbe continue à 2 branches	2 branches qui se coupent
(c)	(R)	(R)	(R)
0 à $3 - \sqrt{8}$	$3 + \sqrt{8}$	$3 + \sqrt{8} < (R) < \infty$	
$3 - \sqrt{8}$ à 1	$3 + \sqrt{8}$	$3 + \sqrt{8} < (R) \leq (R_g)$...
1	$3 + \sqrt{8}$	$3 + \sqrt{8} < (R) < 8$	$8 \leq (R) < \infty$
1 à $3 + \sqrt{8}$	$3 + \sqrt{8}$	$3 + \sqrt{8} < (R) < (R_g)$	$(R) = (R_g)$
$3 + \sqrt{8}$ à ∞	(c)
Nature	2 branches séparées		1 branche concave vers l'origine
(c)	(R)		(R)
0 à $3 - \sqrt{8}$	$(R_g) < (R) < \infty$		
$3 - \sqrt{8}$ à 1			
1			
1 à $3 + \sqrt{8}$	$(R_g) < (R) < [R_H]_0$		$[R_H]_0 < (R) < \infty$
$3 + \sqrt{8}$ à ∞	...		$(c) < (R) < \infty$

8. Allure générale des courbes d'égale valeur de b dans le domaine I' .

Les courbes d'égale valeur de b sont des hyperboles équilatères (équ. 1₁) qui évoluent

$$\begin{aligned}
 &\text{de } (g + c)(p - x_0) = 0 && \text{pour } b = 0 \\
 &\text{vers } \left(g - \frac{x_0^2 - c^2}{2c}\right)(p - 0) = 0 && \text{pour } b = x_0 \\
 &\text{puis vers } (g - x_0)(p + c) = 0 && \text{pour } b = \infty
 \end{aligned}$$

La plus typique d'entre elles est celle qui correspond à $b = x_0$; elle a pour asymptote horizontale l'axe $p = 0$; son asymptote verticale se déplace de $g = \infty$ à $g = -\infty$ dans l'intervalle $0 < c < \infty$ et l'ordonnée de la courbe est positive pour les abscisses supérieures à l'abscisse de l'asymptote verticale; il en résulte que le diagramme $b = x_0$ traverse toujours le domaine I' et tourne sa convexité vers l'origine des coordonnées.

Les diagrammes $b = 0$ et $b = \infty$ forment la limite du domaine des racines positives, le premier, représenté par la droite $p = x_0$ valable pour $1 \leq \frac{c}{x_0} < \infty$, le second, représenté par la droite $g = x_0$ valable pour $0 \leq \frac{c}{x_0} \leq 1$.

Les diagrammes qui correspondent aux valeurs finies de b ont un comportement analogue à celui qui correspond à $b = x_0$. Ils sont d'autant plus rapprochés de l'origine des coordonnées que le paramètre b est plus grand. Lorsque le paramètre d'orientation c augmente, tout le faisceau se déplace vers l'origine de sorte que les diagrammes correspondant aux valeurs les plus faibles de b pénètrent peu à peu dans le domaine partiel I' pendant que $\frac{c}{x_0}$ varie de 0 à 1, tandis que les diagrammes correspondant aux valeurs les plus élevées de b sortent l'une après l'autre de ce domaine lorsque $\frac{c}{x_0}$ varie de 1 à l'infini.

$$0 < \frac{c}{x_0} \leq 3 - \sqrt{8} \text{ (fig. 5).}$$

La plus petite valeur admissible pour b est celle dont le diagramme est à l'infini, c'est-à-dire, d'après l'équation (1₁):

$$b = \frac{x_0 - c + \sqrt{x_0^2 - 6cx_0 + c^2}}{2}$$

avec $g = \infty$ et $p = \infty$.

$$3 - \sqrt{8} \leq \frac{c}{x_0} < 1 \text{ (fig. 6).}$$

La plus petite valeur admissible pour b est celle dont le point de tangence avec l'hyperbole limite a une abscisse infinie, c'est-à-dire d'après la formule (7₄):

$$b = x_0 \frac{\sqrt{x_0} - \sqrt{c}}{\sqrt{x_0} + \sqrt{c}} \text{ avec } g_{Hb} = \infty \text{ et } [p_{Hb}]_{\infty} = \frac{2cx_0}{c - x_0 + 2\sqrt{cx_0}}$$

Pour les valeurs de b immédiatement supérieures à cette limite, les diagrammes, qui se déplacent de l'infini vers la droite $g = x_0$,

en se redressant peu à peu, aboutissent sur l'hyperbole limite H_2'' jusqu'au moment où le point de tangence, après avoir passé par le sommet s_2'' , pour $b_s = \sqrt{c x_0}$ (§ 6e), atteint une ordonnée infinie, c'est-à-dire :

$$b = c \frac{\sqrt{x_0} + \sqrt{c}}{\sqrt{x_0} - \sqrt{c}} \quad \text{avec} \quad [g_{Hb}]_{\infty} = \frac{2 c x_0}{c - x_0 + 2\sqrt{c x_0}} \quad \text{et} \quad p_{Hb} = \infty.$$

Les diagrammes suivants sont constitués par des branches d'hyperbole, de plus en plus verticales, qui tendent vers la droite $g = x_0$.

$$\frac{c}{x_0} = 1 \quad (\text{fig. 7}).$$

Tous les diagrammes compris entre la droite $p = x_0$ pour $b = 0$, la droite $g = x_0$ pour $b = \infty$, et l'axe $p = 0$, convergent vers le point $g = p = x_0$. Pour $b < x_0$, les diagrammes s'étendent du point commun dans la direction de $g = \infty$; pour $b > x_0$, ils sont limités par le point commun et par une abscisse finie sur l'axe $p = 0$.

$$1 < \frac{c}{x_0} \leq 3 + \sqrt{8} \quad (\text{fig. 8}).$$

La plus grande valeur admissible pour b est celle qui correspond au point d'intersection de l'hyperbole limite H_2'' avec l'axe $p = 0$, c'est-à-dire d'après les formules (7₃) et (1₂),

$$b = x_0 \frac{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}} \quad \text{avec} \quad [g_H]_0 = \sqrt{c x_0} - \frac{c - x_0}{2} \quad \text{et} \quad p = 0$$

Pour les valeurs de b immédiatement inférieures, les digrammes, qui se déplacent de l'axe $g = 0$ vers la droite $p = x_0$, aboutissent sur l'hyperbole limite jusqu'au moment où le point de tangence, après avoir passé par le sommet s_2'' , pour $b_s = \sqrt{c x_0}$, tombe sur l'axe $p = 0$, c'est-à-dire :

$$b = c \frac{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}} \quad \text{avec} \quad g = 0 \quad \text{et} \quad [p_H]_0 = \sqrt{c x_0} - \frac{c - x_0}{2}$$

$$3 + \sqrt{8} \leq \frac{c}{x_0} < \infty \quad (\text{fig. 9})$$

La plus grande valeur admissible pour b est celle qui correspond à $g = p = 0$, c'est-à-dire :

$$b = \frac{c - x_0 - \sqrt{c^2 - 6 c x_0 + x_0^2}}{2} \quad \text{avec} \quad g = p = 0$$

VI. Tableau d'ensemble des diagrammes de b.

c	b	coordonnées des extrémités des diagrammes			Nature des diagrammes
		g'	p'	(g'', p'') (v. note)	
$0 < \frac{c}{x_0} \leq 3 - \sqrt{8}$	$b_{\min} = \frac{x_0 - c + \sqrt{x_0^2 - 6cx_0 + c^2}}{2}$	∞	∞	A	point
	g	∞	A ou B	courbe
	$b_{\max} = \infty$	x_0	∞	A	droite $g = x_0$
$3 - \sqrt{8} \leq \frac{c}{x_0} < 0$	$b_{\min} = x_0 \frac{\sqrt{x_0} - \sqrt{c}}{\sqrt{x_0} + \sqrt{c}}$	∞	$[p_{Hb}]_{\infty}$	A	point
	g_{Hb}	p_{Hb}	A	courbe
	$b_s = \sqrt{cx_0}$	s_2''	s_2''	A	courbe
	g_{Hb}	p_{Hb}	A ou B	courbe
	$[b_H]_{\sup} = c \frac{\sqrt{x_0} + \sqrt{c}}{\sqrt{x_0} - \sqrt{c}}$	$[g_{Hb}]_{\infty}$	∞	A ou B	courbe
	g_b	∞	A ou B	courbe
$\frac{c}{x_0} = 1$	$b_{\min} = 0$	x_0	x_0	A	droite $p = x_0$
	x_0	x_0	A ou B	courbe
	$b_{\max} = \infty$	x_0	∞	B	droite $g = x_0$
$1 < \frac{c}{x_0} \leq 3 + \sqrt{8}$	$b_{\min} = 0$	0	x_0	A	droite $p = x_0$
	0	$[p_b]_0$	A ou B	courbe
	$[b_H]_{\inf} = c \frac{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}$	0	$[p_{Hb}]_0$	A ou B	courbe
	g_{Hb}	p_{Hb}	A ou B	courbe
	$b_s = \sqrt{cx_0}$	s_2''	s_2''	B	courbe
	g_{Hb}	p_{Hb}	B	courbe
$3 + \sqrt{8} \leq \frac{c}{x_0} < \infty$	$b_{\max} = x_0 \frac{\sqrt{c} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{c} - \sqrt{x_0}}$	$[g_{Hb}]_0$	0	B	point
	$b_{\min} = 0$	0	x_0	A	droite $p = x_0$
	0	$[p_b]_0$	A ou B	courbe
$3 + \sqrt{8} \leq \frac{c}{x_0} < \infty$	$b_{\max} = \frac{c - x_0 - \sqrt{c^2 - 6cx_0 + x_0^2}}{2}$	0	0	B	point

Note pour les coordonnées g'' et p''.

Pour $b < x_0$, type A: $g'' = \infty$, $p'' = [p_b]_{g=\infty}$

Pour $b + x_0$, type B: $g'' = [g_b]_{p=0}$, $p'' = 0$

9. Conclusions générales et résultats.

Cette étude établit la façon dont il faut choisir les bras du pont de Wheatstone pour obtenir, lors de l'enregistrement continu de la variation d'une résistance électrique x , le maximum de sensibilité pour une valeur donnée x_0 de cette résistance. Les conditions imposées par l'emploi rationnel du montage, c'est-à-dire la coïncidence du maximum de sensibilité avec l'équilibre du pont, font que les résultats obtenus sont applicables à la mesure des résistances par la méthode de zéro.

Le bras du pont c opposé à la résistance à mesurer (fig. 1) a été choisi comme paramètre d'orientation. Les résultats, condensés sous forme de diagrammes à double faisceau de courbes (fig. 5 à fig. 9), évoluent en fonction de ce paramètre et prennent cinq formes typiques différentes; les valeurs numériques de $\frac{c}{x_0}$ correspondant aux diagrammes reproduits plus haut ont été choisies de telle sorte que, tout en représentant chacune des formes typiques et tout en illustrant leur évolution, ils puissent servir à résoudre rapidement les cas les plus usuels avec une assez bonne approximation.

Chaque point des diagrammes indique:

1° la composition à donner au pont pour que le maximum de sensibilité coïncide avec l'équilibre du pont,

2° la grandeur de la sensibilité maximum, par une valeur R qui lui est inversement proportionnelle et qui a la dimension d'une résistance.

Toutes les grandeurs fournies par la lecture des diagrammes sont rapportées à la valeur moyenne x_0 de la résistance à mesurer, prise comme unité; un point quelconque, relevé sur un diagramme, définit un groupe de valeurs cohérentes comportant:

1° l'indice du diagramme $(c) = \frac{c}{x_0}$,

2° son abscisse $(g) = \frac{g}{x_0}$,

3° son ordonnée $(p) = \frac{p}{x_0}$,

4° le paramètre de la courbe pointillée correspondante $(b) = \frac{b}{x_0}$,

5° le paramètre de la courbe pleine correspondante $(R) = \frac{R}{x_0}$.

On en tire, x_0 étant donné, les résistances à donner aux bras du pont, c , b , $d = \frac{cx_0}{b}$, g , et p ainsi que la résistance R qui carac-

térise la sensibilité maximum. Le courant dans le galvanomètre est donné :

$$\text{pour l'enregistrement, par } i = \frac{E}{R} \cdot \frac{x_0 - x}{x_0 + x} \quad (4)$$

$$\text{avec } i_0 = -i_\infty = \frac{E}{R} ; \quad (4_2)$$

$$\text{pour la méthode de zéro, par } di = -\frac{E}{2R} \cdot \frac{dx}{x} . \quad (4_3)$$

Rappelons (§ 3) que le pont satisfait encore aux conditions imposées et garde la même sensibilité, si l'on permute simultanément g avec p et b avec d .

Deux cas peuvent se présenter pour le calcul d'un enregistrement, suivant que l'instrument de mesure est trop sensible pour la variation de résistance envisagée et pour la tension de la source ou, qu'au contraire, il est nécessaire de pousser au maximum la sensibilité du montage afin d'obtenir à l'instrument de mesure une déviation aussi grande que possible.

Dans le premier cas, on détermine R au moyen des formules fondamentales (4₁) ou (4₂) ; on cherche ensuite, sur les diagrammes, parmi les groupes de valeurs cohérentes $(g) = \frac{g}{x_0}$, $(p) = \frac{p}{x_0}$, $(b) = \frac{b}{x_0}$ qui correspondent à (R) ou parmi les groupes permutés $(g) = \frac{p}{x_0}$, $(p) = \frac{g}{x_0}$, $(b) = \frac{d}{x_0}$, celui qui répond le mieux aux moyens dont on dispose et aux intensités de courant admissibles. Les lois de Kirchhoff donnent, pour les intensités dans les bras :

$$\begin{aligned} i_g &= \frac{E}{R} \cdot \frac{x_0 - x}{x_0 + x} & i_x &= \frac{E}{R} \cdot \frac{d + g + \frac{gd}{c} + x_0}{x_0 + x} \\ i_c &= \frac{E}{R} \cdot \frac{\frac{bg}{c} + x_0 + \frac{b+g}{c} x}{x_0 + x} & (4_4) \\ i_p &= i_x + i_c - i_g & i_b &= i_x - i_g & i_d &= i_c - i_g \end{aligned}$$

Dans le second cas qui est en même temps celui de la méthode de zéro, la recherche de la sensibilité optimum est très simple si la résistance du bras d'alimentation est négligeable, c'est-à-dire si $p \rightarrow 0$ (§ 6b) ; quelle soit la valeur de (c) comprise dans l'intervalle $0 < (c) < 3 + \sqrt{8}$, on a le maximum de sensibilité, correspondant à $(R) = 3 + \sqrt{8}$, pour $(b) = (1 + \sqrt{2})$ et $(g) = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) (c)$;

pour $(c) > 3 + \sqrt{8}$, la sensibilité ne peut plus atteindre le maximum maximorum et elle s'en éloigne d'autant plus que (c) et (g) sont plus grands.

Lorsque la résistance du bras d'alimentation n'est pas négligeable, on détermine les résistances à donner aux bras du pont en cherchant, dans l'ensemble des diagrammes, celui qui, pour le point de coordonnées $(g) = \frac{g}{x_0}$, $(p) = \frac{p}{x_0}$ ou pour le point permuté $(g) = \frac{p}{x_0}$, $(p) = \frac{g}{x_0}$, correspond à la plus petite valeur de (R) ; le paramètre de la courbe pointillée fournit alors $b = (b) \cdot x_0$ et $\bar{d} = \frac{cx_0}{b}$, si les coordonnées sont directes, ou $\bar{d} = (b) \cdot x_0$ et $b = \frac{cx_0}{\bar{d}}$ si les coordonnées sont permutées.

Les valeurs fournies par les diagrammes sont approximatives en raison de la difficulté que présente l'interpolation sur un réseau large dont les paramètres ne sont pas en progression arithmétique et dont les échelles de coordonnées ne sont pas régulières. Malgré cela les diagrammes constituent un échelon nécessaire pour le calcul précis de chaque cas particulier: en indiquant l'ordre de grandeur des coordonnées g et p et du paramètre arbitraire c , ils permettent d'établir très rapidement, autour du point considéré, un réseau d'interpolation plus serré en se servant d'équations simples telles que les équations fondamentales (1), (2) et (3) qui définissent successivement b , \bar{d} et R en fonction de g , p et c .

La formule fondamentale (4) sert à passer de l'échelle en unités d'intensité du galvanomètre à l'échelle en ohms. Si la construction du galvanomètre permet de déplacer la position d'équilibre du cadre mobile, on a la faculté d'obtenir le maximum de sensibilité sur une région choisie du domaine de variation, ce qui présente un avantage dans certains cas spéciaux.

L'établissement d'un réseau d'orientation pour une valeur donnée de (c) se fait au moyen des équations (1₁) et (3₃) en s'aidant des remarques faites au cours de cette étude et des tableaux d'orientation numériques qui y sont intercalés.

Fribourg, Institut de physique de l'Université.

Un principe qui relie la théorie de relativité et la théorie des quanta

par E. C. G. Stueckelberg.

(15. I. 1943.)

*Résumé*¹⁾. D'un principe (plus général que celui de la covariance de LORENTZ) contenant la covariance spinorielle et la covariance de jauge, la théorie de relativité (constante c) et la théorie des quanta (constantes e et h) sont déduites. L'existence d'un champ de YUKAWA (mésons) montre que dès que des dimensions de l'ordre du rayon de l'électron interviennent, les lois de la théorie des quanta ne sont plus celles que nous connaissons.

Introduction.

Nous nous proposons de démontrer dans cet article que la théorie de relativité et la théorie des quanta peuvent être considérées comme étant la conséquence d'un seul principe de relativité.

Pour énoncer les lois gouvernant les observations, nous devons introduire certaines notions comme «système de référence \tilde{x}, t », «axes spinoriels u_A », «potentiels électromagnétiques \tilde{A}, Φ ». Nous poserons comme principe que ces notions ne peuvent pas être observées:

1^o Le principe de relativité d'Einstein, donne aux lois une forme telle (covariante) qu'aucune observation ne peut distinguer entre deux systèmes de référence \tilde{x}, t , (système de coordonnées vectoriel $x^{\mu*}$).

Nous proposons de compléter ce principe par les deux nouveaux principes suivants:

2^o Aucune observation n'est possible pour distinguer entre deux systèmes u_A des axes spinoriels.

3^o Aucune observation n'est possible qui puisse distinguer entre deux systèmes de potentiels électromagnétiques Φ, \tilde{A} (systèmes de jauge).

La conclusion à laquelle le 1er principe nous amène est connue (conclusion n^o 1).

L'analyse des principes 2^o et 3^o complète les résultats obtenus du 1er principe et nous amène aux conclusions n^o 2 à 6.

^{*}) $\mu = 1, 2, 3, 4$; $x^4 = ct$.

L'ensemble de ces conclusions peut être exprimé de la manière suivante:

1° Toute observation de la vitesse v avec laquelle un signal peut être transmis donne une valeur $v \leq c$. Il y a des *champs* particuliers (par ex. le champ de Maxwell) pour lesquels tout paquet d'ondes se propage avec cette vitesse limite c . c est ainsi une *première constante universelle*.

2° Toute observation de l'énergie totale H_U contenue dans une *onde spinorielle* u_A (de 1er ordre et de tout ordre impair) de fréquence $\omega_{\vec{k}}$ donne pour résultat un multiple entier $H_{\vec{k}} = N_{\vec{k}} h \omega_{\vec{k}}$ avec $N_{\vec{k}} = 0, 1$.

3° Toute observation de l'énergie H_F etc. dans une *onde scalaire ou tensorielle* φ_a (=spinorielle de tout ordre pair), influencée par l'onde spinorielle u_A , fournit le résultat $H_{\vec{k}} = N_{\vec{k}} h \omega_{\vec{k}}$ avec $N_{\vec{k}} = 0, 1, 2, \dots \infty$ avec la même valeur de h . h est ainsi une *seconde constante universelle*.

4° Dans le cas particulier, où tout paquet d'ondes de $\varphi_a^{(\max)}$ se propage avec la vitesse maximale c , une grandeur bilinéaire en u_A , la *charge électrique* e_U , existe, qui est conservée. La charge par onde vaut $e_{\vec{k}} = \pm N_{\vec{k}} e$, avec ($N_{\vec{k}} = 0, 1$).

5° Entre un *champ chargé* u_A , un *champ ordinaire* u_A et un *champ tensoriel* φ_a une interaction peut exister, telle que ce nouveau champ φ_a agit lui aussi sur le champ de MAXWELL $\varphi_a^{(\max)}$ et porte lui aussi de la charge électrique e_F .

La charge par onde périodique portée par ce champ tensoriel (ou scalaire) φ_a vaut alors $e_{\vec{k}} = \pm N_{\vec{k}} e$ avec $N_{\vec{k}} = 0, 1, 2, \dots \infty$ avec la même valeur de e . e est ainsi une *troisième constante universelle*²⁾.

6° L'existence d'un champ tensoriel φ_a apte à porter des charges interdit toute connaissance exacte des valeurs des composantes de tout champ $u(x)_A$ ou $\varphi(x)_a$ sauf celle des *valeurs moyennes*, prises sur des régions spatiotemporelles plus grandes qu'une *longueur fondamentale* μ^{-1} caractéristique de ce champ tensoriel. Le même est vrai pour les densités de charge électrique. Les contributions de la « self énergie » à des quanta u_A les plus faibles (électrons), sont alors qualitativement $e^2 \mu \lesssim H_0 = h \kappa c = m_{el} c^2$.

La « masse de repos » m_{el} de ces quanta légers (= des électrons au repos) doit être reliée à μ^{-1} par

$$m_{el} \cong \frac{e^2}{c^2} \mu = \frac{e^2}{h c} \cdot m_{mes}$$

$h \mu = m_{mes} c$ est la « masse de repos » des quanta de ce champ φ_a (*masse du méson*). On obtient ainsi la même relation que celle trouvée dans une *théorie classique de l'électron* (proposée par l'auteur⁷⁾). μ^{-1} est ainsi une *quatrième constante fondamentale* (*longueur fondamentale*⁸⁾).

Pour arriver à ces conclusions, nous considérons les *expériences* suivantes, qu'on peut faire sur les *composantes des champs*:

Les trois composantes E_i ($i = 1, 2, 3$) qui forment le vecteur \vec{E} du champ électrique sont des *grandeurs observables*. Si un dispositif pour les mesurer (*appareil*) nous mesure au même endroit une fois les trois composantes E_i et une autre fois les trois composantes différentes $E_{i'}$, et si nous savons, pour d'autres raisons, que l'état électrique \vec{E} était le même aux moments des deux observations, une différence entre les E_i et les $E_{i'}$ nous permet de constater que l'appareil a tourné autour d'un axe. Dans le cas particulier où cet axe est l'axe x_3 , les composantes E_i sont reliées aux $E_{i'}$ par la substitution:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{1'} \cos \vartheta + E_{2'} \sin \vartheta \\ E_2 &= -E_{1'} \sin \vartheta + E_{2'} \cos \vartheta \\ E_3 &= E_{3'} \end{aligned} \quad (0,1)$$

Cette observation combinée de E_i et $E_{i'}$ correspond à une réalité physique: la rotation de l'appareil autour d'une direction spatiale (axe x_3) d'un angle ϑ .

Une rotation de $\vartheta = 2\pi$ ramène l'appareil à sa position initiale. Elle ne peut donc pas être constatée ($E_i = E_{i'}$). La théorie du champ maxwellien s'occupe de telles *grandeurs vectorielles* $\vec{E}(\vec{x}, t)$ et $\vec{B}(\vec{x}, t)$, qui se transforment suivant (0,1).

Par contre, dans les *théories ondulatoires de la matière*, on rencontre des *grandeurs spinorielles*, parmi lesquelles se trouve le spineur de 1er ordre avec 4 composantes u_A ($A = 1, 3, 5, 7$). Les u_A se transforment en $u_{A'}$ suivant une loi semblable à (0,1).

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{1'} \cos \chi + u_{3'} \sin \chi \\ u_3 &= -u_{1'} \sin \chi + u_{3'} \cos \chi \end{aligned} \quad (0,2)$$

dans le plan spinoriel 1,3 (la même loi règne dans le plan 5,7), si l'appareil a été tourné dans l'espace physique autour de l'axe x_3 par un angle $\vartheta = 2\chi$. (0,2) représente une *rotation dans le plan spinoriel* 1,3 par l'angle $\chi = \vartheta/2$. L'existence d'un dispositif pour mesurer u_A (appareil) permet donc de constater une *rotation de cet appareil dans l'espace physique*. Même une rotation par l'angle $\vartheta = 2\pi$ peut ainsi être constatée. Mais, au résultat d'une observation pareille, ne correspond certainement aucune réalité physique, parce que la position de tout objet tourné de 2π est identique à sa position initiale.

A côté du spineur de 1er ordre, les théories ondulatoires de la matière (théorie de SCHRÖDINGER) font intervenir des *champs complexes* ($u = u_1 + i u_2$) à deux composantes pour décrire la charge électrique. On montre qu'à la *substitution de jauge* ($\chi = \chi(\vec{x}, t) =$ fonction arbitraire)

$$\vec{A} = \vec{A}' + \frac{h}{e} \text{grad } \chi; \quad \Phi = \Phi' - \frac{h}{e} \partial_t \chi \quad (0,3)$$

correspond une *transformation de jauge*

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1' \cos \chi + u_2' \sin \chi \\ u_2 &= -u_1' \sin \chi + u_2' \cos \chi \end{aligned} \quad (0,4)$$

entre les composantes du champ complexe. Elle représente une *rotation dans le plan complexe* 1,2. Les *grandeurs Maxwelliennes*

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \text{grad } \Phi; \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (0,5)$$

restent *invariantes*. Si, donc, un appareil nous mesure au même endroit une fois u_A et une fois $u_{A'}$ ($A = 1,2$), tandis que l'état matériel (décrit par des grandeurs $u^{+A} u_A$, etc.*) et l'état électromagnétique sont restés les mêmes, la différence entre u_A et $u_{A'}$ permettra de constater une différence entre les potentiels Φ, \vec{A} et Φ', \vec{A}' . *A cette observation ne correspond pas non plus une réalité physique.*

Pour rendre impossibles des constatations pareilles ((0,2) et (0,4)), nous demandons que la théorie contienne les deux restrictions suivantes:

1° L'angle $\chi(\vec{x}, t)$ dans « tout plan spinoriel A, B » (du 1er ordre) ne peut être observé qu'à

$$\Delta \chi(\vec{x}, t) \geq \pi \quad (0,6)$$

près.

2° Si l'angle $\chi(\vec{x}, t)$ dans « un plan complexe 1,2 » peut être mesuré exactement à un événement $\vec{x} t$ ($\Delta \chi(\vec{x}, t) = 0$), il faut que la restriction

$$\Delta \chi(\vec{x} + d\vec{x}, t + dt) \geq \pi \quad (0,7)$$

existe pour toute mesure de $\chi(\vec{x} + d\vec{x}, t + dt)$ à un événement voisin.

De 1°, il s'ensuit que $\Delta(\chi - \chi') = 2 \Delta \chi$ vaut toujours au moins 2π . Ceci rend impossible toute constatation d'une rotation (0,2) dans le plan spinoriel. La condition 2° donne aux dérivées de $\chi(\vec{x}, t)$ les incertitudes $\Delta \partial_t \chi = \Delta \partial_i \chi = \infty$ ($\partial_t = \partial/\partial t$; $\partial_i = \partial/\partial x_i$) et rend ainsi impossible d'observer $\vec{A} - \vec{A}'$ et $\Phi - \Phi'$ en (0,3).**)

*) Cf. page 182.

**) A la place de π dans l'inégalité (0,7) tout autre angle fini rendrait le même service.

Dans cet article, nous proposons des principes d'incertitude de la forme

$$\Delta u(v)_A \Delta u(v')_B \geq 2\pi |r(u(v)_A, u(v')_B)| \quad (0,8)$$

qui, limitant les précisions $\Delta u(v)_A$ des valeurs observables des composantes moyennes

$$u(v)_A = v^{-1} \int_v (\vec{dx})^3 u(\vec{x}, t)_A \quad (0,9)$$

(définies comme des *valeurs moyennes* des composantes u_A et u_B prises sur des (petits) volumes v (et v') de telle manière que (0,6) et (0,7) soient remplis.

Les conséquences de ces deux *principes* sont alors les 4 *conclusions* n° 2 à n° 5, mentionnées ci-dessus.

§ 1. Le principe d'incertitude pour l'angle δ dans le plan a, b .

Nous considérons un système décrit par deux variables (ayant la même dimension) a et b . L'état du système est alors représenté par un point dans le plan a, b . Un principe d'incertitude:

$$(\Delta a)^2 (\Delta b)^2 \geq (2\pi r(a, b))^2 \quad (1,1)$$

exprime que le point représentatif du système ne pourra jamais être localisé plus exactement qu'à l'intérieur d'un contour $C(a, b) = \text{const}$, tel que son aire (*aire d'incertitude*) vaut

$$\iint_C da db = \oint_C (adb - bda) = 2\pi r(a, b). \quad (1,2)$$

Nous définissons ce contour C de telle manière qu'il ne contient *aucune intersection avec lui-même*. L'aire d'incertitude (1,2) a alors un *signe défini*. La plus grande précision est atteinte si $C(a, b)$ est un rectangle avec la surface $2\pi |r(a, b)|$. C'est alors que (1,1) résulte avec le signe $=$.

(1,1) et (1,2) montrent que, *pour toute paire de grandeurs observables* a, b , il existe *une troisième observable*

$$r(a, b) = -r(b, a) \quad (1,4)$$

r est une *grandeur observable* parce que l'incertitude à laquelle la paire est soumise peut être constatée. Si le point représentatif est localisé dans un contour de surface $2\pi r$, l'état du système est déterminé d'une manière optimale. Un tel état est en général trouvé si l'on fait une observation $a = a'$ sur une variable a avec la précision maximale ($\Delta a = 0$). Le contour qui détermine l'état a maintenant dégénéré en un rectangle composé de deux droites de signes

opposés, parallèles à l'axe b , qui coïncident et qui coupent l'axe à l'endroit $a = a'$.

L'aire d'incertitude ΔF et ΔG qui limite la connaissance de deux fonctions $F(a, b)$ et $G(a, b)$ est représentée par l'aire $2\pi r(F, G)$ qui correspond à la surface (1,3). On peut considérer F et G comme des coordonnées obliques ou curvilignes dans le plan a, b . L'aire $2\pi r(F, G)$ s'exprime alors par la déterminante fonctionnelle

$$\{F, G\}_{a,b} = \frac{\partial F}{\partial a} \frac{\partial G}{\partial b} - \frac{\partial G}{\partial a} \frac{\partial F}{\partial b} \quad (1,5)$$

si F et G sont des fonctions linéaires, soit

$$r(F, G) = \{F, G\}_{a,b} r(a, b) \quad (1,6)$$

(1,6) est aussi valable pour des fonctions générales, si les valeurs de F et de G sont grandes par rapport à ΔF et ΔG . De même, les lois

$$\begin{aligned} r(r(F, G), H) + r(r(G, H), F) + r(r(H, F), G) &= 0 \\ r(FG, H) &= Fr(G, H) + Gr(F, H) \end{aligned} \quad (1,6a)$$

tiennent dans ces cas.

Un principe qui limite la *précision* $\Delta\delta$ de l'angle δ entre le rayon vecteur et l'axe a est obtenu de la manière suivante:

«Le point représentatif doit être situé à l'intérieur d'un contour fixe $C^f(a, b) = 0$.»

Tout contour d'incertitude $C(a, b)$ se trouve alors entièrement à l'intérieur de $C^f = 0$. Il remplit ainsi un domaine fini $\Delta\delta$ de l'angle polaire pour autant que $r \neq 0$.

Nous imposons à notre plan la condition d'être *isotrope*. Le contour C^f est alors un cercle de rayon R :

$$a^2 + b^2 \leq R^2; \quad C^f = a^2 + b^2 - R^2 = 0 \quad (1,7)$$

La condition $\Delta\delta = 2\pi$ est remplie si $2\pi|r| = \pi R^2$, parce que, alors, le point représentatif est toujours à l'intérieur du contour C , qui doit être *identique* au contour fixe C^f . La *valeur moyenne* \bar{a} de a est toujours nulle. Admettons que deux observations de a fournissent les deux valeurs a' et a'' . Si $a' \neq a''$, la différence $a' - a''$ permet de distinguer entre deux états différents du système. Or une constatation pareille serait contradictoire à la proposition que le système ne connaît qu'un seul état, celui qui est défini par la coïncidence des contours C^f et C . Donc toute observation de a fournit le résultat $a = a' = a'' = 0$.

Nous passons maintenant à la restriction moins forte: $\Delta\delta = \pi$. Elle demande que la surface $2\pi|r| = \frac{1}{2}\pi R^2$ ne remplisse que la

moitié du cercle (1,7). Un état qui contient un optimum de notre connaissance sur a est représenté par un contour C formé par l'axe b et le demi-cercle droit ou gauche de (1,7). Les moyennes sont dans ces deux états

$$\begin{aligned}\bar{a} &= a_+ = \sqrt{h} \\ \bar{a} &= a_- = -\sqrt{h}\end{aligned}\quad (1,8)$$

où \sqrt{h} est une constante. Une observation de a est définie par l'opération qui nous fournit un optimum de notre connaissance sur a . Elle détermine un état. Comme deux états (décrits par deux contours ayant la même surface $2\pi r$) qui représentent les deux une connaissance optimale avec un $a > 0$ ne peuvent ainsi pas exister, *il faut que toute observation de a donne, ou le résultat a_+ ou a_-* . Nous exprimons ce fait, qui est valable aussi pour b , par la loi :

$$a^2 = b^2 = h \quad (1,9)$$

h est ainsi une *constante physique du système* (déterminée par la restriction (1,7)).

C'est à ce moment que nous nous heurtons à une contradiction : L'état décrit, où a vaut a_+ implique $\Delta a = 0$. Mais, vu (1,7), l'incertitude en b vaut $\Delta b = 2R$ (où $= 2a_+$) = fini. Pour éviter cette contradiction, nous étudions *la nature de la troisième variable $c = r(a, b)$* . Dans notre problème, elle ne peut prendre que les valeurs ($c_+ > 0$ est une constante).

$$c = c_+ \text{ ou } c = c_- = -c_+; \quad 2\pi c_+ = \frac{1}{2}\pi R^2 \quad (1,10)$$

Nous introduisons maintenant trois variables normalisées.

$$\alpha = \frac{a}{a_+}, \quad \beta = \frac{b}{b_+}, \quad \gamma = \frac{c}{c_+} \quad (1,11)$$

qui, toutes les trois, ont la propriété que n'importe quelle observation fournit le résultat

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1 \quad (1,11a)$$

Elles sont reliées par

$$r(\alpha, \beta) = \varepsilon\gamma; \quad (\Delta\alpha)^2 (\Delta\beta)^2 = (2\pi\varepsilon)^2; \quad \varepsilon = \frac{c_+}{h} \quad (1,12)$$

La valeur moyenne $\bar{\gamma}$ de γ est nulle si ou $\alpha = \pm 1$ ou $\beta = \pm 1$ sont connues. De même, si γ est connu ($\gamma = \pm 1$), ni l'une ni l'autre des variables α et β ne peuvent être déterminées. Ceci implique une relation du genre

$$r(\beta, \gamma) = \varepsilon\alpha \quad (1,13)$$

Elle exprime que la connaissance de α implique une incertitude en β et en γ . Le facteur ε semble d'abord être arbitraire. Mais les valeurs observables de α , β et γ étant de *même nature* (1,11), aussi l'incertitude entre β et γ doit avoir la même grandeur

$$(\Delta\beta)^2 (\Delta\gamma)^2 \geq (2\pi\varepsilon)^2$$

Ceci nous permet de trouver une représentation non contradictoire du problème, si l'on introduit *à la place du plan un espace à trois dimensions* α , β , γ . Le point représentatif doit alors être situé :

1° sur un disque circulaire, de rayon $\varrho = \sqrt{2}$ (avec un contour ayant un sens de rotation fixe),

2° à l'intérieur d'une sphère de rayon $\varrho' = \sqrt{3}$.

3° le contour du disque touche toujours la surface de la sphère.

Ces trois conditions montrent que toute mesure de α est représentée par un état, ou le disque est normal à l'axe α . Il coupe alors cet axe à l'endroit $\alpha = \pm 1$. Le rayon (au carré) de la sphère étant alors $\varrho'^2 = \alpha^2 + \varrho^2 = 3$, q. é. d. Les moyennes de γ et β sont $\overline{\gamma^2} = \overline{\beta^2} = 1$. Donc (1,11a) est satisfait. L'aire d'incertitude $2\pi\varepsilon\gamma$ est observée, si le produit des incertitudes en α et β prend sa valeur maximale, c.-à-d. si le disque est dans la position normale à l'axe γ . La projection dans le plan α, β est alors égale à la surface du disque, soit $2\pi\varepsilon\gamma = \pi\varrho^2\gamma = 2\pi\gamma$. Le facteur ε est ainsi déterminé à $\varepsilon = 1$.

Le sens de rotation est arbitraire. S'il est choisi de telle manière que le disque situé à $\gamma = +1$ projette un contour parcouru dans le sens positif dans le plan α, β , on obtient les relations cycliques suivantes :

$$\begin{aligned} r(a, b) &= c; \quad r(b, c) = ha; \quad r(c, a) = hb \\ a^2 &= b^2 = h; \quad c^2 = c^2_+ = h^2 \end{aligned} \quad (1,14)$$

L'isotropie de notre système permet d'introduire d'autres axes a^0 et b^0 reliés aux axes a, b par :

$$\begin{aligned} a &= a^0 \cos \chi - b^0 \sin \chi \\ b &= a^0 \sin \chi + b^0 \cos \chi \end{aligned} \quad (1,14a)$$

L'analyse de ces nouvelles grandeurs physiques a^0 et b^0 doit fournir le même résultat que celle faite pour a et b , indépendants de la valeur de χ . La loi (1,9) ne résulte, pour a^0 et b^0 , que si

$$ab = 0 \quad (1,14b)$$

c.-à-d. si toute observation du produit ab fournit le résultat nul. Ce résultat (1,14b) est d'ailleurs obtenu directement si l'on fait l'analyse géométrique dans l'espace $\alpha\beta\gamma$.

Un système plus compliqué est décrit par les variables $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ qu'on peut représenter dans un espace à $2n$ dimensions. L'analyse faite ci-dessus est d'abord valable individuellement dans tous les plans de projection $a_i b_i$ (resp. espaces $a_i b_i c_i$) de l'espace multidimensionnel. Si l'espace multidimensionnel est isotrope vis-à-vis d'une rotation simultanée dans les plans $a_1 a_2$ et $b_1 b_2$, les conditions

$$a_1^2 = b_1^2 = a_2^2 = \dots = h; \quad a_1 a_2 = b_1 b_2 = a_1 b_2 = \dots = 0; \quad (1,15)$$

$$r(a_1, b_1) = r(a_1, a_2) = \dots = h$$

doivent être ajoutées à (1,9) et (1,14b).

La surface d'incertitude limitant $\Delta F \cdot \Delta G$ sera maintenant la projection d'un élément de surface (à composantes $r(a_i, b_k)$, $r(a_i, a_k)$ et $r(b_i, b_k)$) dans les plans F, G , si l'on a introduit $F = F(a_1, \dots)$, $G = , H = , \dots$ comme des coordonnées curvilignes dans l'espace du système. Cette projection est donnée par

$$r(F, G) = \frac{1}{4} \sum_a \sum_b \sum_i \sum_k \{F, G\}_{a_i b_k} r(a_i, b_k) \quad (1,16)$$

La sommation doit être effectuée sur toute paire de variables décrite par les indices i, k, a, b ($i, k = 1, 2 \dots n$; a et b chacun = a, b). Finalement, on peut se demander ce qu'est le produit des incertitudes $\Delta r(a_i, b_i) \Delta a_k$. Un état est concevable où $r(a_i, b_i)$ est déterminé dans le plan $a_i b_i$ laissant a_i et b_i eux-mêmes complètement indéterminés. Alors a_k peut être déterminé en même temps dans les deux plans $a_i a_k$ et $b_i a_k$ pour autant que l'indice k n'est pas identique à i . Si ceci est le cas, le problème dégénère en (1,13). En général, on a donc la relation de PAULI (nous substituons a_k pour b_i , et a_i pour a_k)

$$r(r(a_i, a_k), a_i) = h (\delta_{il} a_k - \delta_{kl} a_i) \quad (1,17)$$

La normale du disque a le même signe dans les deux espaces de projection $a_i, a_k, r(a_i, a_k)$ et $a_i, a_i, r(a_i, a_i)$.

Nous appelons ces relations les relations de PAULI, parce que les trois matrices $\sigma_1 = k \times 1$, $\sigma_2 = l \times 1$, $\sigma_3 = i \times i$ et $j = 1 \times i$ satisfont à la relation cyclique*)

$$j(\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1) = -\sigma_3; \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = -j^2 = 1 \quad (1,18)$$

et parce qu'il existe un calcul opératoire qui se base sur (1,18) et qui exprime le principe ($\sigma_1 = \alpha$, $\sigma_2 = \beta$, $\sigma_3 = \gamma$ cf. (1,11))

$$(\Delta \alpha)^2 (\Delta \beta)^2 \geq (2\pi\gamma)^2 \quad (1,19)$$

si $+\sqrt{(\Delta \alpha)^2}$ est la fluctuation de α .

*) Pour les définitions des matrices i, k et l voir éq. (2,4b).

§ 2. Le champ de Majorana.**)

Certaines observations faites sur les *rayons cathodiques* (observations dont l'analyse est assez complexe) montrent qu'une onde cathodique de longueur d'onde $\lambda = 2\pi |\vec{k}|^{-1}$ est capable de *deux polarisations* ($\sigma = 1, 2$). Elles se distinguent l'une de l'autre par une *propriété vectorielle*, le *spin*. Pour des paquets d'ondes ayant une vitesse $\vec{v} = c \vec{k} (\kappa^2 + |\vec{k}|^2)^{-\frac{1}{2}} < c$ (κ^{-1} est une *longueur fondamentale* caractéristique de ces ondes cathodiques), une *théorie à amplitude vectorielle* fournit toujours *trois polarisations*. Pour expliquer ces deux polarisations, on a dû concevoir des *ondes à amplitude spinorielle* (de 1er ordre).

Des spineurs qui se transforment suivant (0,2) sont des grandeurs à quatre composantes ($A = 1, 3, 5, 7$), qui se transforment suivant*) :

$$u_A = (\delta_A^{B'} \cos \chi + (j\sigma_{ik})_A^{B'} \sin \chi) u_{B'} \equiv (e^{j\sigma_{ik}\chi})_A^{B'} u_{B'} \quad (2,1)$$

si l'« *appareil* » effectue une *rotation* autour de l'angle $\vartheta = 2\chi$ dans le *plan* $x_i x_k$, et qui changent leurs valeurs d'après

$$u_A = (\delta_A^{B'} \cosh \chi' + (\gamma_i)_A^{B'} \sinh \chi') u_{B'} \equiv (e^{\gamma_i \chi'})_A^{B'} u_{B'} \quad (2,2)$$

si l'« *appareil* » a été *mis en mouvement* avec une vitesse $v = c \tanh 2\chi'$ dans la direction de l'axe x_i . $(j\sigma_{ik})_A^{B'}$ et $(\gamma_i)_A^{B'}$ et d'autres grandeurs sont des *coefficients constants* à plusieurs indices ($i, k = 1 \text{ à } 3$, $A, B' = 1, 3, 5, 7$), qu'on exprime sous forme de *matrices de quatres lignes* en A, B' . D'un *spineur de 2ème ordre* U_{AB} , qui se transforme comme un produit $u_A^+ u_B$ de deux spineurs, on peut former un *scalaire*, un *vecteur*, etc. d'espace temps $x = (x^\mu)$ ($\mu = 1 \dots 4$; $i = 1, 2, 3$; $x^i = x_i$; $x^4 = -x_4 = ct^*$) à l'aide de ces coefficients constants. En particulier, il existe des coefficients $j\beta$, $\tilde{\alpha}$ et 1 tels que

$$J = (j\beta)^{AB} U_{AB}; \quad J^i = \alpha^{iAB} U_{AB}; \quad Q = J^4 = \delta^{AB} U_{AB} \quad (2,3)$$

Pour que (2,1) et (2,2) forment une représentation (bivoque) du groupe de LORENTZ, il faut que 1° ces matrices $\alpha_i = \alpha^i = (\alpha^i_A{}^{B'})$ existent, 2° que leurs produits $\alpha_i \alpha_k = ((\alpha_i \alpha_k)_A{}^{B'}) = (\alpha_{iA}{}^C \alpha_{kC}{}^{B'})$ satisfassent à

$$\begin{aligned} \alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i &= 2 \delta_{ik} 1; & \alpha_4 &= -\alpha^4 = -1 \\ \alpha_i (j\beta) + (j\beta) \alpha_i &= 0; & -(j\beta) (j\beta) &= -(j\beta)^2 = 1 \end{aligned} \quad (2,4)$$

*) Dans les considérations suivantes, nous poserons la vitesse $c = 1$ et $t = x^4$. En plus, on pose $u^A = u_A$; $\alpha^{\mu AB} = \alpha^\mu_A{}^B$. Un indice μ, i, A, B , paraissent deux fois de suite sous forme co- et contravariante (p. ex. $u_A^+ u^A$) implique la sommation sur toutes les valeurs de cet indice (p. ex. $A = 1, 3, 5, 7$). δ^{AB} est la *matrice d'unité*. δ_{ik} le *tenseur fondamental* ou *tenseur d'unité*.

) Le champ spinoriel à quatre composantes réelles a été envisagé pour la première fois par E. MAJORANA, Nuov. Cim. **14, 4 (1937).

et β^0 qu'elles soient reliées aux matrices $j\sigma_{ik}$ et γ_i en (2,1) et (2,2) par $(j\sigma)_{ik} = \alpha_i \alpha_k$; $\gamma_i = (j\beta) \alpha_i$; $(j\sigma_{ik})^2 = -\gamma_i^2 = -1$ (2,4a).

Les matrices $j\sigma_{ik}^{AB} = -j\sigma_{ik}^{BA}$ et $j\beta^{AB} = -j\beta^{BA}$ sont *antisymétriques* en A et B , tandis que $\alpha_i^{AB} = \alpha_i^{BA}$ et γ_i^{AB} des matrices *symétriques*¹). $1 = (\delta^{AB})$ est la matrice unité. Une représentation particulière de ces matrices à quatre lignes peut être obtenue sous forme de produits directs entre les quatre matrices à deux lignes

$$\begin{aligned} 1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad l = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ kl &= -lk = -i; \quad li = -il = +k; \quad ik = -ki = l \\ \alpha_1 &= k \times 1; \quad \alpha_2 = l \times 1; \quad \alpha_3 = i \times i; \quad j\beta = i \times l \quad (2,4b) \\ 1 \times k &= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}; \quad i \times l = \begin{pmatrix} 0 & -l \\ l & 0 \end{pmatrix}; \quad -i \times 1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette représentation fournit en (2,1) la transformation (0,2) si $\chi = \vartheta/2$ et si $j\sigma_{ik} = j\sigma_{12} = -(i \times 1)$ (cf. (2,4b)).

Suivant l'exposé du § 1, l'impossibilité d'observer une rotation $\vartheta = 2\chi = 2\pi$ de l'appareil suit de la théorie, si les observations du champ $u(v)_A$ sont soumises dans chaque plan AB à la condition (1,15), soit à

$$u(v)_A u(v)_B = \delta_{AB} h v^{-1} \quad (2,5)$$

$h v^{-1}$ est une grandeur scalaire par rapport aux rotations spatiales. Elle ne peut dépendre que du volume v , dans lequel les moyennes sont formées, si l'espace est homogène. Pour que la loi (2,5) soit covariante, une fonction spinorielle symétrique de 2ème ordre $D^{(+)}(\tilde{x} - \tilde{y}, t - \tau)_{AB}$ doit exister dépendant des deux événements $x = (\tilde{x}, x^4 = t)$ et $y = (\tilde{y}, y^4 = \tau)$ telle que (2,5) soit une conséquence de:

$$u(\tilde{x}, t)_A u(\tilde{y}, \tau)_B = h D^{(+)}(\tilde{x} - \tilde{y}, t - \tau)_{AB} = -h D^{(+)}(\tilde{y} - \tilde{x}, \tau - t)_{BA} \quad (2,7)$$

Dans le cas d'un espace-temps homogène et isotrope, elle ne peut dépendre que de la distance invariante $R^2 = |\tilde{x} - \tilde{y}|^2 - (t - \tau)^2$. Elle peut être représentée par des fonctions différentes dans les différentes régions de l'univers (le présent ($R^2 > 0$), le futur ($R^2 < 0$, $\tau > t$) et le passé ($R^2 < 0$, $\tau < t$) de l'évènement x).

Après ce bref exposé du calcul spinoriel, nous continuons l'analyse des ondes cathodiques. La vitesse de groupe d'un paquet d'ondes a le rapport voulu avec la longueur d'onde, si la relation covariante ($\omega = k^4 = -k_4$)

$$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{\kappa^2 + |\vec{k}|^2} > 0; \quad k_\mu k^\mu = -\kappa^2 \quad (2,8)$$

existe entre la fréquence $\omega_{\vec{k}}$ et le vecteur d'onde \vec{k} . Ceci est le cas si u_A est une somme de termes $u_{\vec{k}\sigma}(\vec{x}, t)_A$ du type des *ondes planes*:

$$\begin{aligned} u_{\vec{k}\sigma}(\vec{x}, t)_A &= V^{-\frac{1}{2}} \{ p_{\vec{k}\sigma}^0 (\sigma_A \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega_{\vec{k}}t) + \tau_A \sin(\vec{k}\vec{x} - \omega_{\vec{k}}t)) \\ &\quad + q_{\vec{k}\sigma}^0 (-\tau_A \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega_{\vec{k}}t) + \sigma_A \sin(\vec{k}\vec{x} - \omega_{\vec{k}}t)) \} \quad (2,9a) \\ &\equiv p_{\vec{k}\sigma}^0 S(\vec{k}, \sigma, p/x)_A + q_{\vec{k}\sigma}^0 S(\vec{k}, \sigma, q/x)_A \end{aligned}$$

La forme alternative avec des coefficients, fonctions de t , $p(t)$ et $q(t)$ est quelquefois plus appropriée:

$$u_{\vec{k}\sigma}(\vec{x}, t) = p_{\vec{k}\sigma}(t) S(\vec{k}, \sigma, p/\vec{x})_A + q_{\vec{k}\sigma}(t) S(\vec{k}, \sigma, q/\vec{x})_A \quad (2,9b)$$

Ces coefficients sont reliés aux p^0 et q^0 par la rotation dans le plan pq :

$$\begin{aligned} p(t) &= p^0 \cos \omega t - q^0 \sin \omega t \\ q(t) &= p^0 \sin \omega t + q^0 \cos \omega t \end{aligned} \quad (2,10)$$

Chaque composante u_A de la fonction spinorielle est, en vertu de (2,8), solution de l'équation covariante de DE BROGLIE

$$(\Delta - \kappa^2) u = -\partial_t^2 u \quad (2,11)^*$$

Les α_{AB}^μ ($\alpha_{AB}^4 = \delta_{AB}$) se transforment comme un *quadrivecteur* a^μ et un *spineur* de 2ème ordre U_{AB} (leurs valeurs numériques restent ainsi invariants $\alpha^{111} = \alpha^{1'1'1'}$, $\alpha^{112} = \dots$). L'équation de MAJORANA

$$Q_A{}^B u_B \equiv ((-\vec{\alpha}, \text{grad}) - j\beta)_A{}^B u_B = \partial_t u_A \quad (2,12)$$

est, pour cette raison, *covariante* (la relation algébrique (2,4) fait de (2,11) une conséquence de (2,12)). La *double fonction* $D^{(+)}(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau)_{AB}$ doit être une solution symétrique de (2,11). On peut démontrer que

$$D^{(+)}(\vec{x}, t)_{AB} = ((\vec{\alpha}, \text{grad}) + 1 \partial_t + j\beta)_{AB} D^{(0-)}(\vec{x}, t) \quad (2,13)$$

est (à une constante numérique près) la *seule solution spinorielle symétrique* de (2,12) si $D^{(0-)}(\vec{x}, t)$ est la *seule solution scalaire anti-symétrique* de (2,11). Elle a été introduite par HEISENBERG et PAULI (au cas $\kappa = 0$) et a été discutée par l'auteur d'autre part⁴). Elle répond, pour $t = 0$, aux propriétés suivantes:

$$D^{(0-)}(\vec{x}, 0) = 0; \text{grad } D^{(0-)}(\vec{x}, 0) = 0; \partial_t D^{(0-)}(\vec{x}, 0) = \delta(\vec{x}) \quad (2,14)$$

Son analyse de FOURIER est la somme

$$D^{(-0)}(\vec{x}, t) = -V^{-1} \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}^{-1} \sin(\vec{k}\vec{x} - \omega_{\vec{k}}t) \quad (2,15)$$

*) Le symbole Δ en (2,11) etc. étant l'opérateur laplacien dans l'espace \vec{x} n'est pas à confondre avec le symbole de l'incertitude.

La sommation est à effectuer sur tout \vec{k} périodique en V . La fonction

$$u_A = \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma} u_{\vec{k}\sigma A} \quad (2,16)$$

avec (2,9a) est l'expression générale de la solution de (2,12) que nous appellerons le *champ de MAJORANA*. De (2,7), la fonction (2,15) résulte, si l'on considère les $p_{\vec{k}}$ et $q_{\vec{k}}$ comme un *système de variables physiques* a_i et b_i ayant les propriétés (1,14). Les amplitudes spinorielles σ_A et τ_A sont normalisées

$$\sigma_A \tau^A = 0; \quad \sigma_A \sigma^A = \tau_A \tau^A = 1 \quad (2,17)^*$$

On remarque qu'en effet il n'existe que *deux solutions linéairement indépendantes du type* (2,9a). Elles représentent *deux ondes* qui se propagent *en direction* de $+\vec{k}$. On ne cherche que les solutions de (2,10) avec $\omega_{\vec{k}} > 0^{**}$) et on se rappelle que les solutions $u_{\vec{k}\sigma A}$ et $\partial_i u_{\vec{k}\sigma A}$ ne doivent pas être considérées comme linéairement indépendantes vu le fait que (2,9a) contient les deux constantes p^0 et q^0 .

Il importe peu, si l'on impose les conditions (1,14) aux fonctions $p_{\vec{k}}(t) \dots$ ou aux constantes $p_{\vec{k}\sigma}$, vu l'invariance de la condition (1,9) et (1,11) par rapport aux rotations (1,11a) qui relient ici, sous forme de (2,10), $p(t)$ aux p^0 .

De (2,7) et de (2,14), suit (2,5) dans la forme:

$$u(v')_A u(v'')_B = \delta_{AB} \frac{v' v''}{v' v''} h \quad (2,20)$$

pour les *valeurs moyennes* de u_A dans le *volume* v' et de u_B dans le *volume* v'' . $v' v''$ est le *volume commun* à v' et v'' . Toute observation de $u(v)_A$ fournit donc une des deux valeurs $\pm \sqrt{v^{-1} h}$. Elle interdit la connaissance de toute *autre composante* $u(v)_B$ ($B \neq A$) au *même endroit* et de tout $u(v)_B$ ($B =$, ou $\neq A$) à d'autres endroits $v' \neq v$. L'analyse faite dans le plan a, b au § 1 s'applique à tout plan A, B et rend *impossible l'observation de l'angle* χ (*restriction 1^o de l'introduction*).

*) Pour la démonstration, on utilise la relation ($\omega_{\vec{k}} > 0$)

$$\sum_{\sigma=1,2} \sigma_A \sigma_B = \sum_{\sigma} \tau_A \tau_B = (\vec{k} \vec{\alpha}_{AB} + \omega_{\vec{k}} \delta_{AB}) \omega_{\vec{k}}^{-1} \quad (2,18)$$

qui résulte de la sommation Σ sur $\sigma = 1, 2$ des deux solutions linéairement indépendantes (et orthonormales) de

$$(\vec{k} \vec{\alpha})_A^B \begin{pmatrix} +\sigma_B \\ -\tau_B \end{pmatrix} + \kappa(j\beta)_A^B \begin{pmatrix} \tau_B \\ \sigma_B \end{pmatrix} = \omega_{\vec{k}} \begin{pmatrix} \sigma_A \\ -\tau_A \end{pmatrix} \quad (2,19)$$

**) La condition $\omega_{\vec{k}} > 0$ pour la racine de (2,8) est nécessaire pour que l'onde se propage en direction $+\vec{k}$.

Pour que la théorie ait un sens physique, il faut que des grandeurs scalaires et vectorielles W , ϱ et \vec{T} , \vec{J} (se transformant comme les composantes $W = T^{44}$, $T^i = T^{4i}$ d'un tenseur $T^{\mu\nu}$ resp. d'un vecteur $\varrho = J^4$, $J^i = J_i$) existent, qui satisfont à la loi covariante:

$$\partial_t W + \operatorname{div} \vec{T} = 0; \quad \partial_t \varrho + \operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad (2,21)$$

et qui peuvent être interprétées comme la *densité d'énergie* et la *densité de charge électrique* transportée par le *rayonnement cathodique*. Si $U(x, y)_{AB}$ en (2,3) satisfait à l'équation d'onde (2,12) par rapport à (xA) et à (yB) , les $\varrho(\vec{x}, t)$ et $\vec{J}(\vec{x}, t)$ formés en (2,3) avec $U(x, x)_{AB} = U(\vec{x}, t; \vec{x}, t)_{AB}$ ont la propriété (2,21). Il en est de même pour les

$$T^{44} = W = \lim_{t=\tau} \partial_\tau U(\vec{x}, t; \vec{x}, \tau)_A{}^A; \quad \vec{T} = \lim_{t=\tau} \vec{\alpha}^{AB} \partial_\tau U(\vec{x}, t; \vec{x}, \tau)_{AB} \quad (2,22)$$

Ne sont admissibles que des *théories* ou il n'existe aucun effet qui ne soit en rapport avec la cause primordiale. Or, toute double fonction U_{AB} symétrique en xA et yB admet des effets sous forme des observables ϱ , \vec{J} et $\vec{T} \neq 0$, tandis que, par intégration partielle, on constate que l'énergie totale H^*) (que nous devons considérer comme cette cause primordiale) est identiquement nulle.

Nous devons donc considérer la double fonction antisymétrique la plus générale. Elle peut être mise dans la forme

$$\begin{aligned} U(x, y)_{AB} &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma a} \sum_{\vec{k}' \sigma' a'} g_{\vec{k} \sigma a, \vec{k}' \sigma' a'}^0 S(\vec{k}, \sigma, a/x)_A S(\vec{k}', \sigma', a'/y)_B \\ &= \sum \sum g_{\vec{k} \dots \vec{k}' \dots}^0(t, \tau) S(\vec{k}, \sigma, a/\vec{x})_A S(\vec{k}', \sigma', a'/\vec{y})_B \\ &= U(\vec{x}, t; \vec{y}, \tau)_{AB} \end{aligned} \quad (2,23)$$

où l'indice \vec{k} dénombre tous les vecteurs d'ondes \vec{k} , l'indice σ les deux polarisations ($\sigma = 1, 2$) possibles d'une onde \vec{k} et où a parcourt les deux symboles $a = p, q$, qui distinguent les deux solutions (2,9a) associées à tout $\vec{k} \sigma$. $g_{\dots p \dots}(t, \tau)$ et $g_{\dots q \dots}(t, \tau)$ sont des doubles fonctions antisymétriques en t et τ , qui satisfont aux mêmes équations différentielles ($\dot{f} = \partial_t f$) par rapport à t (à $\tau = \text{const.}$), comme les paires de fonctions

$$\dot{p}_{\vec{k} \sigma} = -\omega_{\vec{k}} q_{\vec{k} \sigma}; \quad \dot{q}_{\vec{k} \sigma} = \omega_{\vec{k}} p_{\vec{k} \sigma} \quad (2,24)$$

$g^0 \dots$ sont les valeurs initiales ($t = \tau = 0$) de $g \dots(t \dots, \tau)$

La troisième variable $r(a(t), b(\tau))$ associée à la paire $a(t), b(\tau)^{**})$

*) $H(t) = \int_V (dx^3) W(\vec{x}, t)$.

**) a et b parcourent $a = p, q$.

satisfait aux mêmes équations $\partial_t r = \dots$; $\partial_\tau r = \dots$ que les variables $a(t)$ et $b(\tau)$ elles-mêmes. Posant ainsi pour g_{\dots}^0, \dots les constantes

$$g_{\vec{k}\sigma a, \vec{k}'\sigma' b}^0 = \frac{1}{2} r (a_{\vec{k}\sigma}^0, b_{\vec{k}'\sigma'}^0) + \frac{1}{2} |r_+| \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\sigma\sigma'} i_{ab} \quad (2,25)$$

et pour $g_{\dots}, \dots (t, \tau)$ les doubles fonctions en t et τ (résultant de (2,24), si l'on prend la valeur initiale (2,25)), l'énergie totale H et la quantité de mouvement totale \vec{P} prennent les formes

$$H = \int (dx)^3 W = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma} \omega_{\vec{k}} (r(p_{\vec{k}\sigma}, q_{\vec{k}\sigma}) + |r_+|) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma} h \omega_{\vec{k}} N_{\vec{k}\sigma}$$

$$\vec{P} = \int (dx)^3 \vec{T} = \dots = \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma} h \vec{k} N_{\vec{k}\sigma}; \quad N_{\vec{k}\sigma} = 0, 1 \quad (2,26)$$

Résumant cet exposé, on arrive à la conclusion suivante: L'observation que certains rayons (à vitesse $< c$) ont une polarisation vectorielle qui ne peut prendre que deux valeurs, nous a amené à introduire un champ spinoriel de 1er ordre. Pour qu'une rotation autour de 2π d'un appareil destiné à observer ce champ ne puisse pas être constatée, l'énergie par onde plane et périodique doit être un multiple entier (0 ou 1) de $h\omega_{\vec{k}}$; h est une constante caractéristique de ce champ. La quantité de mouvement est le même multiple de $h\vec{k}$. Le rayonnement a ainsi une nature corpusculaire et peut être considéré comme formé de particules ou de quanta dont l'énergie H est reliée à la quantité de mouvement \vec{P} par la relation de la mécanique du point de masse $h\kappa$.

$$H = + \sqrt{(h\kappa)^2 + |\vec{P}|^2} = h\kappa + \frac{1}{2} (h\kappa)^{-1} |\vec{P}|^2 + \dots \quad (2,27)$$

Ces particules satisfont au principe d'exclusion de PAULI, c.-à-d. qu'elles suivent la statistique de FERMI-DIRAC (FD).

Remarquons qu'on peut écrire (2,25) sous la forme

$$U(x, y)_{AB} = \frac{1}{2} r(u(x)_A, u(y)_B) + \frac{1}{2} r(u^{(BE)}(x)_A, u^{(BE)}(y)_B) \quad (2,28)$$

où r est la troisième observable formée des grandeurs $u(x)_A$ et $u(y)_B$ suivant le procédé de § 1. Le 2ème terme est défini par

$$r(u^{(BE)}(x)_A, u^{(BE)}(y)_B) \equiv h D^{(1-)}(x, y)_{AB}$$

$$= h ((\vec{\alpha}, \text{grad}) + 1 \partial_t + j \beta)_{AB} D^{(1+)}(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau) \quad (2,29)$$

Il est une deuxième solution fondamentale spinorielle mais antisymétrique. Elle a été introduite par DIRAC. La fonction scalaire symétrique $D^{(1+)}$, solution de l'éq. de DE BROGLIE, est l'analogue de $D^{(0-)}$ (2,15):

$$D^{(1+)}(\vec{x}, t) = V^{-1} \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}^{-1} \cos(\vec{k} \vec{x} - \omega_{\vec{k}} t) \quad (2,30)^4$$

Elle a les propriétés suivantes:

$$\lim_{|\tilde{x}|^2 - t^2 = 0} D^{(1+)}(\tilde{x}, t) = (|\tilde{x}|^2 - t^2)^{-1} \quad (2,31)$$

$$\partial_t D^{(1+)}(\tilde{x}, 0) = \partial_t D^{(1+)}(\tilde{x}, 0) = 0$$

$$\int_v (dx)^3 \partial_\mu \partial_\nu D^{(1+)}(\tilde{x}, 0) = \infty \quad \int_{v \gg \kappa^{-3}} (dx)^3 \kappa D^{(1+)}(\tilde{x}, 0) \simeq 1 \quad (2,32)$$

La fonction $D^{(1+)}$ décroît fortement (prop. à $e^{-\kappa R}$) pour $R^2 \gg \kappa^{-2}$. En vertu de (2,32), on a donc le droit d'écrire

$$\lim_{\kappa^{-1}=0} \kappa D^{(1+)}(\tilde{x}, 0) = \delta(\tilde{x}) \quad (2,33)$$

Sa singularité sur le cône de lumière est déterminée par (2,31) (1ère eq.). L'application de (1,17) est intéressante entre les observables $U_{AB} = r(u_A, u_B) + \dots$ et u_C . Le développement de FOURIER (2,28) et (2,25) pour U_{AB} et (2,9) pour u_C , donne le résultat

$$r(U(x, y)_{AB}, u(z)_C) = \frac{\hbar}{2} D^{(0+)}(z - x)_{CA} u(y)_B - D^{(0+)}(y - z)_{BC} u(x)_A \quad (2,34)$$

Ainsi, au temps $t = \tau$, la valeur de $u(\tilde{x})_A$ peut être connue simultanément avec toute valeur $u(\tilde{y})$ sauf pour $\tilde{x} = \tilde{y}$. Or, a fortiori, $u(\tilde{x})$ peut, à un temps t donné, être connu simultanément dans tout l'espace.

§ 3. Le champ de de Broglie.

La double fonction $U(x, y)_{AB}$ en (2,28), dont dérivent W et \tilde{T} , étant *antisymétrique* en x_A et y_B , l'application (2,3) montre que $\varrho = \tilde{J} = 0$ parce que $\alpha^{\mu AB}$ est *symétrique*. Par contre, la *matrice antisymétrique* $(j\beta)^{AB}$ permet de définir une *densité scalaire* J (2,3). Notre champ de MAJORANA u_A ($A = 1, 3, 5, 7$) se montre donc insuffisant pour décrire une réaction sur un *champ Maxwellien* (\vec{E}, \vec{B}) , mais apte à influencer un *champ scalaire* φ . Cette réaction est contenue dans l'équation inhomogène de DE BROGLIE (= équation de YUKAWA neutre)

$$(\Delta - \mu^2 - \partial_t^2) \varphi(\tilde{x}, t) = -\varepsilon' J(\tilde{x}, t) \quad (3,1)$$

Nous lui donnons une *forme causale* (analogue à celle de l'équation de MAJORANA) en introduisant deux composantes φ_a ($a = 1, 3$) $\varphi_1 = \varphi^1 \equiv \varphi$; $\varphi_3 = \varphi^3 \equiv \mu^{-1} \partial_t \varphi$. μ^{-1} est une *nouvelle longueur fondamentale caractéristique du champ de DE BROGLIE*. L'évolution

temporelle de $\varphi_a(\tilde{x}, t)$ est alors donnée en termes de $\varphi_a(\tilde{x}, 0)$ et de $J_a(\tilde{x}, 0)$ ($J_1 = J$; $J_3 = 0$) par

$$\begin{aligned}\partial_t \varphi_a &= R_a^b \varphi_b + \mu^{-1} \varepsilon' i_a^b J_b \\ R_a^b &= -i_a^b \mu + \frac{1}{2\mu} (i + l)_a^b \Delta^*\end{aligned}\quad (3,2)$$

La densité d'énergie ($W = T^{44}$; $\tilde{T} = (T_i)$; $T_i = T^i = T^{4i}$) est (en termes de φ)

$$T_{\mu\nu} = -(\partial_\mu \varphi)(\partial_\nu \varphi) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} ((\partial_\alpha \varphi)(\partial^\alpha \varphi) + \mu^2 \varphi \varphi) \quad (3,3)$$

En vertu de (3,1), sa divergence vaut

$$\partial_\nu T_{(\nu)}^{\mu\nu} = \varepsilon' J \partial^\mu \varphi \quad (3,4)$$

L'influence qu'exerce ce champ φ sur le mouvement des paquets d'ondes de MAJORANA U_{AB} doit s'exprimer dans l'équation de l'évolution en t de cette double fonction (cf. (2,12) pour l'opération Q_A^B):

$$\partial_t u_A = Q_A^B u_B + \varepsilon' (j\beta)_A^B \varphi u_B \quad (3,5)$$

Il en résulte

$$\partial_\nu T_{(U)}^{\mu\nu} = -\varepsilon' J \partial^\mu \varphi \quad (3,6)$$

(3,4) et (3,6) montrent que la théorie satisfait au principe de conservation d'énergie. On s'intéresse surtout à l'évolution des aires d'incertitudes $r(\varphi_a(\tilde{x}, t), u_A(\tilde{x}', t)) \equiv r(\varphi_a, u'_A)$, $r(u_A, u'_B)$ et $r(\varphi_a, \varphi_b)$. La première de celles-ci est donnée par (3,1) et (3,5), soit par

$$\begin{aligned}\partial_t r(\varphi_a, u'_A) &= R_a^b r(\varphi_b, u'_A) + Q_A^B r(\varphi_a, u'_B) \\ &+ \varepsilon' \eta_A^{cB} \varphi_c' r(\varphi_a, u'_B) + \varepsilon' \eta_A^{cB} u'_B r(\varphi_a, \varphi_c') \\ &+ \varepsilon' i_a^b \varepsilon' \mu^{-1} r(J_b, u'_A)\end{aligned}\quad (3,7)$$

Ici, on a remplacé $(j\beta)_A^B \varphi'$ par le symbole $\eta_A^{cB} \varphi_B'$ avec $\eta_A^{1B} = (j\beta)_A^B$ et $\eta_A^{3B} = 0$.

Nous essayons l'hypothèse suivante: Les valeurs d'une composante $\varphi(\tilde{x}, t)_a = \varphi_a$ et d'une composante $u(\tilde{x}', t)_A = u'_A$ au même temps t peuvent être connues simultanément:

$$r(\varphi_a, u'_A) = 0 \quad (3,8)$$

Cette hypothèse réduit à zéro le 1er membre et les trois premiers termes du 2ème membre en (3,7). Les deux termes qui restent sont alors liés par

$$r(\varphi_a, \varphi_c') \eta_A^{cB} u_B' = -\hbar \mu^{-1} \delta(\tilde{x} - \tilde{x}') i_a^c \eta_{cA}^B u_B \quad (3,9)**$$

*) i, k et l sont les matrices à deux lignes $i_a^b = i_{ab}$ de (2,4b) avec $a, b = 1, 3$.

**) Le dernier membre a été transformé suivant (2,28) et (1,17) soit:

$$\eta^{bCD} r(\frac{1}{2} r(u_C, u_D), u'_A) = \hbar \eta^{bAC} u_C \delta(\tilde{x} - \tilde{x}').$$

Le deuxième membre de cette relation a déjà été transformé par l'application de (2,3) et (2,34). Le résultat (3,9) est une identité en u_A , si l'aire $r(\varphi_a, \varphi_b')$ vaut

$$r(\varphi_a, \varphi_b') = -h \mu^{-1} i_{ab} \delta(\tilde{x} - \tilde{x}') \quad (3,10)$$

Ecrit en termes de φ et de $\partial_t \varphi$ ces aires sont

$$\begin{aligned} r(\varphi(\tilde{x}, t), \varphi(\tilde{y}, t)) &= 0 \\ r(\varphi(\tilde{x}, t), \partial_t \varphi(\tilde{y}, t)) &= h \delta(\tilde{x} - \tilde{y}) \end{aligned} \quad (3,10a)$$

Les relations (3,10a) sont indépendantes de la constante de couplage ε' . Elles doivent ainsi être valides, même pour un champ de DE BROGLIE, qui satisfait à l'équation homogène (2,11), (3,10a) et (2,14), déterminant l'évolution temporelle sous forme covariante:

$$r(\varphi(\tilde{x}, t), \varphi(\tilde{y}, \tau)) = h D^{(0-)}(\tilde{x} - \tilde{y}, t - \tau) \quad (3,11)$$

où $D^{(0-)}$ est la fonction fondamentale antisymétrique (2,15). L'analyse de FOURIER du champ φ peut être exprimée par

$$\begin{aligned} \varphi(\tilde{x}, t)_{\tilde{k}} &= (V \omega_{\tilde{k}})^{-\frac{1}{2}} (p_{\tilde{k}}^0 \cos(\tilde{k} \tilde{x} - \omega_{\tilde{k}} t) + q_{\tilde{k}}^0 \sin(\tilde{k} \tilde{x} - \omega_{\tilde{k}} t)) \\ &= (2 \omega_{\tilde{k}})^{-\frac{1}{2}} (p_{\tilde{k}}^0 S(\tilde{k}, p | x) + q_{\tilde{k}}^0 S(\tilde{k}, q | x)) \\ \varphi(\tilde{x}, t) &= \sum_{\tilde{k}} \varphi_{\tilde{k}} \end{aligned} \quad (3,12)$$

Elle amène au résultat désiré (3,11) si

$$\begin{aligned} r(p_{\tilde{k}}, q_{\tilde{k}}) &= \delta_{\tilde{k} \tilde{k}'}, h \\ r(p_{\tilde{k}}, p_{\tilde{k}}) &= r(q_{\tilde{k}}, q_{\tilde{k}}) = 0 \end{aligned} \quad (3,13)$$

On démontre (3,11) en appliquant (1,6). Le point représentatif dans l'espace multidimensionnel $p_{\tilde{k}}, q_{\tilde{k}}$ ne peut jamais être localisé dans un plan $p_{\tilde{k}} q_{\tilde{k}}$ que à l'intérieur d'une surface d'incertitude

$$2 \pi r(p_{\tilde{k}}, q_{\tilde{k}}) = 2 \pi h \quad (3,14)$$

Les aires ont ainsi la surface $2 \pi h$ et leur contour C est parcouru dans le sens positif. Introduisant le rayon $R_{\tilde{k}}^2 = p_{\tilde{k}}^2 + q_{\tilde{k}}^2$ et l'angle $\delta_{\tilde{k}}$ entre le rayon vecteur et l'axe $p_{\tilde{k}}$, l'aire (3,14) d'incertitude vaut:

$$2 \pi r(\frac{1}{2} R_{\tilde{k}}^2, \delta_{\tilde{k}}) = 2 \pi h \quad (3,15)$$

Elle équivaut à une relation d'incertitude

$$\frac{1}{2} \Delta \delta_{\tilde{k}} \Delta R_{\tilde{k}}^2 \geq 2 \pi h \quad (3,16)$$

On arrive à la détermination optimale de $R_{\tilde{k}}^2$, si l'on renonce à toute connaissance de l'angle $\delta_{\tilde{k}}$. $\Delta \delta_{\tilde{k}}$ prend alors sa valeur maximale 2π .

*) $\delta_{\tilde{k} \tilde{k}'} = 0$ ou $=1$ suivant que $\tilde{k} \neq \tilde{k}'$ ou $\tilde{k} = \tilde{k}'$.

Le point représentatif d'un tel état est situé à l'intérieur d'un anneau, construit de deux cercles concentriques, dont la différence du (carré du) rayon vaut

$$\Delta R_{\bar{k}}^2 = 2h \quad (3,17)$$

L'état à rayon minimal est celui où la valeur moyenne vaut

$$R_{\bar{k}}^2 = h \quad (3,18)$$

Sa surface représentative est le cercle de rayon $\sqrt{2h}$. Les états consécutifs sont des anneaux, dans lesquels la valeur moyenne vaut:

$$R_{\bar{k} N_{\bar{k}}}^2 = 2h (N_{\bar{k}} + \frac{1}{2}); \quad N_{\bar{k}} = 0, 1, 2, \dots \infty \quad (3,19)$$

Nous nous heurtons ici à la même contradiction qu'en § 1. Il faut que toute observation de R^2 donne une des valeurs de (3,19). Ainsi, toute observation de R^2 nous fournit la certitude que $R_{\bar{k}}^2$ vaut $R_{N_{\bar{k}}}^2$ ($\Delta R_{\bar{k}}^2 = 0$), tandis que $\Delta \delta_{\bar{k}} = 2\pi$ reste fini. Ceci est en contradiction avec (3,16). Nous ne voulons pas trancher ici la manière par laquelle le calcul vectoriel crée une représentation géométrique analogue à celle donnée au § 1, et qui évite cette difficulté*).

Pour définir la densité d'énergie nous remarquons que toute double fonction symétrique $\Psi(x, y) = \Psi(\tilde{x}, t; \tilde{y}, \tau)$ permet de définir un tenseur $T_{\mu\nu}(\Psi)$ apte à décrire la densité d'énergie par la dérivation

$$T_{\mu\nu}(\Psi) = \lim_{x=x'} (-\partial_\mu \partial_\nu + g_{\mu\nu} (\partial_\alpha \partial^\alpha + \mu^2)) \Psi(x, x') \quad (3,20)$$

si analoguement à $U(\tilde{x}, t; \tilde{y}, \tau)$ on définit une double fonction:

$$\Psi(\tilde{x}, t; \tilde{y}, \tau) = \varphi(\tilde{x}, t) \varphi(y, \tau) - \varphi^{(FD)}(\tilde{x}, t) \varphi^{(FD)}(\tilde{y}, \tau) \quad (3,21)$$

Le 1er terme de (3,21) satisfait évidemment à (3,1). Si le second terme est une double fonction $\varphi^{(FD)}(x) \varphi^{(FD)}(y)$, solution symétrique de l'équation homogène ((3,1) avec $\varepsilon' = 0$), la loi de conservation (3,6) résulte quand même. Le développement de (3,21) est

$$\begin{aligned} & \Psi(\tilde{x}, t; \tilde{y}, \tau) \\ &= \sum_{\bar{k}a} \sum_{\bar{k}'a'} (\omega_{\bar{k}} \omega_{\bar{k}'})^{-\frac{1}{2}} g(t, \tau)_{\bar{k}a, \bar{k}'a'} S(\bar{k}a/\tilde{x}) S(\bar{k}'a'/\tilde{x}') \quad (3,22)^{**)} \end{aligned}$$

Il est analogue à (2,23) si l'on exprime g par:

$$g_{\bar{k}a, \bar{k}'a'} = \frac{1}{2} a(t)_{\bar{k}} a'(\tau)_{\bar{k}'} - \frac{1}{4} h \delta_{\bar{k} \bar{k}'} \delta_{a a'} \quad (3,23)$$

*) La démonstration la plus simple est fourni par le calcul opératoirel.

**) La sommation sur a et a' implique que les deux symboles parcourent chacun les valeurs p et q .

L'énergie totale vaut (si $\varepsilon' = 0$) (cf. (3,19))

$$H_{(\Psi)} = \sum_{\vec{k}} H_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{2} \omega_{\vec{k}} (p_{\vec{k}}^2 + q_{\vec{k}}^2) - \frac{1}{2} h \omega_{\vec{k}} \right) = \sum_{\vec{k}} h \omega_{\vec{k}} N_{\vec{k}} \quad (3,24)$$

Nous sommes ainsi arrivés à la conclusion suivante:

Un *champ scalaire* φ de DE BROGLIE, qui exerce une influence sur le *champ spinoriel* u_A , doit satisfaire à un principe d'incertitude (3,11), qui a pour conséquence que son énergie totale $H_{(\Psi)}$ est composée par l'énergie des ondes périodiques sous forme de *quanta d'énergie* $h \omega_{\vec{k}}$. h est la constante introduite pour le *champ* de MAJORANA. *S'il existe plusieurs champs φ qui agissent tous sur plusieurs champs u_A , la constante h a toujours la même valeur. h est ainsi une constante universelle, la constante de PLANCK.* h entre ainsi en parallèle avec la *vitesse constante* c (de la lumière). La différence entre φ et u_A se manifeste en ce que les quanta de φ doivent être considérés comme des particules suivant la statistique de BOSE-EINSTEIN (BE). Celle-ci résulte du *principe de HEISENBERG* (3,13) de la même manière que la statistique de FD était la conséquence du *principe de PAULI* (1,14).

Nous ajoutons ici une remarque utile pour toute application:

Le deuxième terme de $\Psi(x, y)$ en (3,21), (3,23) et dans le troisième membre de (3,24) provient de

$$\varphi^{(FD)}(\vec{x}, t) \varphi^{(FD)}(\vec{y}, \tau) = \frac{1}{2} h D^{(1+)}(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau) \quad (3,25)$$

On peut, formellement, le considérer comme formé par un *deuxième champ scalaire* $\varphi^{(FD)}(\vec{x}, t)$, solution de l'équation homogène, mais avec des coefficients $p_{\vec{k}}^0$ et $q_{\vec{k}}^0$, qui remplissent les *relations de PAULI* (1,14) de la statistique FD.

De même, le deuxième terme de la double fonction U_{AB} en (2,28) du *champ* de MAJORANA peut, formellement, être interprétée comme l'aire d'incertitude d'un deuxième champ $u_A^{(BE)}$ solution de la même équation comme u_A , mais avec des coefficients $p_{\vec{k}\sigma}^0$ et $q_{\vec{k}\sigma}^0$ qui remplissent les *relations de HEISENBERG* (3,14) de la statistique BE.

§ 4. Le champ de Dirac.

Pour décrire une influence du champ u_A sur \vec{E} et \vec{B} , il faut pouvoir définir des *matrices antisymétriques* aptes à former ϱ et \vec{J} . On peut considérer

$$(j\vec{\alpha}) \equiv i \times \vec{\alpha}; \quad j \equiv i \times 1 \quad (4,1)$$

comme de telles matrices, formées par *produits directs* entre la matrice i (à deux lignes) et les $\vec{\alpha}, 1$ (à quatre lignes) (2,4b). (4,1)

sont ainsi des *matrices à huit lignes*. j a les coefficients nuls, sauf $j_{12} = -j_{21} = j_{34} = -j_{43} = \text{etc.} = -1$. De même, $j\tilde{\alpha}_{AB}$ vaut $(j\tilde{\alpha})_{12} = -(j\tilde{\alpha})_{21} = \tilde{\alpha}_{11} = \tilde{\alpha}_{22}$, etc.

A la place de $1 \partial_t$ et $(\tilde{\alpha}, \text{grad})$, on introduit les matrices D_t et $(\tilde{\alpha}, D)$ définies par

$$\begin{aligned} D_{tA}{}^B &= \delta_A{}^B \partial_t + j_A{}^B \varepsilon \Phi(\tilde{x}, t) \\ D_A{}^B &= \delta_A{}^B \text{grad} - j_A{}^B \varepsilon A(\tilde{x}, t) \end{aligned} \quad (4,2)^*$$

dans l'équation de MAJORANA, qui devient alors *l'équation de DIRAC* ($\partial_t u_A \rightarrow D_t u_A$; $\text{grad } u_A \rightarrow \tilde{D} u_A$) (2,12). u_A a maintenant 8 composantes $A = 1, 2, 3 \dots 8$ au lieu de $A = 1, 3, 5, 7$. Le quadrivecteur

$$\varrho = J^4 = j^{AB} U_{AB}; \quad \tilde{J} = (j \tilde{\alpha})^{AB} U_{AB} \quad (4,3)$$

satisfait à l'équation de continuité, tandis que le tenseur $T^{\mu\nu} \equiv T_{(U)}^{\mu\nu}$ (défini par (2,22) avec D_τ^{AB} à la place de $\partial_\tau \delta^{AB}$) possède la divergence

$$\partial_t W_{(U)} + \text{div } \tilde{T}_{(U)} = \varepsilon \tilde{E} \tilde{J} \neq 0 \quad (4,4)$$

\tilde{E} est relié aux Φ et \tilde{A} par (0,5). La définition habituelle de l'énergie électromagnétique satisfait au théorème de POYNTING

$$\partial_t W_{(\text{max})} + \text{div } \tilde{T}_{(\text{max})} = -\varepsilon \tilde{E} \tilde{J}, \quad (4,5)^{**}$$

si le champ de MAXWELL $\tilde{B} = (B_{ik})$ et $\tilde{E} = (B_{i4})$ forment un *tenseur antisymétrique* $B_{\mu\nu}$ d'espace temps solution de

$$\text{div } \tilde{E} = \varepsilon \varrho; \quad \text{rot } \tilde{B} - \partial_t \tilde{E} = -\varepsilon J \quad (4,5a)$$

Une analyse (analogue à celle faite pour le *champ de DE BROGLIE*) montre que l'énergie et l'impulsion portées par toute onde plane et périodique du champ de MAXWELL doit être quantifiée suivant la statistique BE. $H_{(\text{max})}$ et $\tilde{P}_{(\text{max})}$ ont ainsi la forme (2,26) avec $N_{k\sigma} = 0, 1, 2 \dots \infty$.

Nous remarquons qu'à une substitution (0,3) correspond la transformation

$$u(x)_A = (e^{-j\kappa(x)})_A{}^{B'} u(x)_{B'} \quad (4,7)$$

Elle représente une rotation dans chacun des plans 12, 34, 56 et 78, qui sont les plans complexes de (0,4).

*) La constante ε , qui dépend du choix du système d'unités du champ électromagnétique, n'est pas à confondre avec le $\varepsilon (= 1)$ introduit dans la discussion qui suit (1,12) au § 1.

**) W_{max} est à corriger par un terme analogue à (3,21) et suiv. enlevant la zéropoint énergie.

En l'absence d'un champ électromagnétique, la solution $u_{\vec{k}}$ de DIRAC peut être écrite comme la combinaison de *deux champs de MAJORANA* (2,9a), A tout \vec{k} appartiennent maintenant *quatre polarisations indépendantes*. Soient $\sigma_A^{(1)}$ et $\tau_A^{(1)}$ des spineurs, c.-à-d. *deux solutions* de l'équation (2,9a) pour un *premier champ de MAJORANA* (avec des *composantes nulles* pour $A = 2, 4, 6$ et 8), soient $\sigma_A^{(2)}$ et $\tau_A^{(2)}$ les spineurs d'une *solution d'un second champ de MAJORANA* avec les composantes $\sigma_A^{(2)} = j_A^B \tau_B^{(1)}$ et $\tau_A^{(2)} = -j_A^B \sigma_B^{(1)}$ pour $A = 2, 4, 6$ et 8 (et avec des *composantes nulles* pour $A = 1, 3, 5$ et 7). Alors on peut considérer, à la place de la solution de (2,9a) avec les deux constantes $p_{\vec{k}\sigma 1}^0$ et $q_{\vec{k}\sigma 1}^0$ une *solution de DIRAC* où $-\tau_A^{(1)}$ et $\sigma_A^{(1)}$ au *deuxième terme* de (2,9a) sont remplacés par $\tau_A^{(2)} = j\sigma_A^{(1)}$ et $\sigma_A^{(2)} = j\tau_A^{(1)}$. Nous appelons les coefficients de cette onde $p_{\vec{k}\sigma+}^0$ et $q_{\vec{k}\sigma+}^0$. *Linéairement indépendante de cette solution* est celle où l'on pose au *premier terme* $-\tau_A^{(1)}$ et $\sigma_A^{(1)}$ (pour σ_A et τ_A (en 2,9a)) tandis que le *second* s'écrit par $\sigma_A^{(2)} = -j\tau_A^{(1)}$ et $\tau_A^{(2)} = -j\sigma_A^{(1)}$. On a ainsi transformé

$$\begin{aligned} p_{\vec{k}\sigma 1}^0 &= q_{\vec{k}\sigma+}^0 ; & q_{\vec{k}\sigma 2}^0 &= q_{\vec{k}\sigma-}^0 \\ q_{\vec{k}\sigma 1}^0 &= p_{\vec{k}\sigma-}^0 ; & p_{\vec{k}\sigma 2}^0 &= q_{\vec{k}\sigma-}^0 \end{aligned} \quad (4,8)$$

Cette *substitution* laisse *invariantes les considérations* du §1. Ce *champ de DIRAC* satisfait ainsi à (2,7) comme le faisait le *champ de MAJORANA* avec $A, B = 1$ à 8 . Elle permet d'écrire les *solutions particulières* dans la forme

$$u_{\vec{k}\sigma\pm} = V^{-\frac{1}{2}} \left((p_{\vec{k}\sigma\pm}^0 \pm q_{\vec{k}\sigma\pm}^0 j) e^{j(\vec{k}\vec{x} \pm \omega_{\vec{k}}t)} \right)_A^B \sigma_B \quad (4,9)^*$$

La *charge électrique totale* vaut ($\lambda = +, -$)

$$e_{(V)} = \varepsilon \int (dx)^3 \varrho_{(V)} = \sum_{\vec{k}\sigma\lambda} e_{\vec{k}\sigma\lambda} = \sum_{\vec{k}\sigma} \varepsilon h (N_{\vec{k}\sigma+} - N_{\vec{k}\sigma-}) \quad (4,10)$$

Une onde $u_{\vec{k}\sigma\lambda}$ à «polarisation» $\lambda = +, -$ porte $N_{\vec{k}\sigma\lambda}$ ($= 0$ ou 1) quanta qui contribuent à la charge $\pm N_{\vec{k}\sigma\pm} e$ avec

$$e = \varepsilon h \quad (4,11)$$

La charge électrique est ainsi quantifiée en ce que l'on n'observera, par onde, que des *multiples entiers* (0 et 1) de $\pm e$. La charge *positive* ou *négative* est contribué par les ondes particulières (4,9) à *fréquence positive* ($+\omega_{\vec{k}} > 0$) ou *négative* ($-\omega_{\vec{k}} < 0$) dans l'exposant complexe de (4,9).

*) $(e^f)_A^B = \frac{1}{0!} \delta_A^B + \frac{1}{1!} f_A^B + \frac{1}{2!} f_A^C f_C^B + \dots (e^j \varphi)_A^B = \delta_A^B \cos \varphi + j_A^B \sin \varphi.$

§ 5. Le champ de Schroedinger-Yukawa.

On peut faire agir sur le *champ de DIRAC* le *champ de DE BROGLIE* de la même manière qu'en § 3. Mais il existe encore une autre possibilité: Celle-ci est représentée en introduisant *en plus du champ de DIRAC*, qui représente des quanta chargés à spin $1/2$, un deuxième champ portant des quanta neutres (non chargés) de spin $1/2$ soit un *champ de MAJORANA*. Ceci demande une augmentation du nombre des composantes de 8 à 12. Elle permet d'introduire des matrices antisymétriques à 12 lignes $\lambda \alpha^\mu$. Soient

$$\lambda \tilde{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\alpha} & 0 \\ \tilde{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda \alpha^4 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda \quad (5,1)^*$$

les matrices qui définissent le *courant électrique* ($A, B = 1, 2, \dots, 11, 12$):

$$\tilde{J}_{(V)} = (\lambda \tilde{\alpha})^{AB} U_{AB}; \quad \varrho = J^4 = (\lambda \alpha^4)^{AB} U_{AB} \quad (5,2)$$

qui est ainsi porté par les 8 premières composantes du champ u_A . En D_t et \tilde{D} la matrice λ est substitué à j . Les deux matrices η^a

$$\eta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & j\beta \\ 0 & 0 & j\beta \\ j\beta & j\beta & 0 \end{pmatrix}; \quad \eta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -j\beta \\ 0 & 0 & j\beta \\ -j\beta & j\beta & 0 \end{pmatrix} \quad (5,3)$$

sont aussi *antisymétriques* et permettent de définir deux *densités scalaires* ($a = 1, 2$) ($j\beta$ est la matrice à 4 lignes du § 1).

$$J^a = \eta^{aAB} U_{AB}; \quad \lambda \eta^a - \eta^a \lambda = i^{ab} \eta_b \quad (5,4)$$

A leur tour, ils peuvent être utilisés pour influencer *deux champs de DE BROGLIE* φ^1 et φ^2 par l'action décrite en (3,1) (*éq. de Yukawa avec des charges*). Les lois de la commutation entre les matrices λ et η^a (5,4) montrent que

$$\partial_t \varrho_{(V)} + \text{div } \tilde{J}_{(V)} = \varepsilon' (\varphi^1 (-J^2) + \varphi^2 J^1) = \varepsilon' i^{ab} \varphi_a J_b \quad (5,5)^{**}$$

D'autre part, les grandeurs

$$J_{(V)} = \varphi^1 (\text{grad } \varphi^2) - \varphi^2 (\text{grad } \varphi^1) = -\lim_{\tilde{x}=\tilde{y}} \text{grad}_{\tilde{y}} i^{ab} \Psi(\tilde{x}, \tilde{y})_{ab} \quad (5,6)$$

$$\varrho_{(V)} = -\varphi^1 \partial_t \varphi^2 + \varphi^2 \partial_t \varphi^1 = \lim_{t=\tau} \partial_\tau i^{ab} \Psi(\tilde{x}, t; \tilde{y} \tau)_{ab}$$

satisfont à

$$\partial_t \varrho_{(V)} + \text{div } \tilde{J}_{(V)} = \varepsilon' (\varphi^1 J^2 - \varphi^2 J^1) = -\varepsilon' i^{ab} \varphi_a J_b \quad (5,7)$$

*) $\tilde{\alpha}$ et $j\beta$ sont, à partir de maintenant, des matrices à 12 lignes, soit

$$\tilde{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\alpha} \end{pmatrix}; \quad j\beta \equiv \begin{pmatrix} j\beta & 0 & 0 \\ 0 & j\beta & 0 \\ 0 & 0 & j\beta \end{pmatrix}; \quad \alpha^4 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**) Dans les considérations qui suivent on a posé $\tilde{A} = \Phi = 0$.

si les φ_a satisfont à (3,1) muni d'un indice $a = 1, 2$. La densité $\varrho = \varrho_{(U)} + \varrho_{(\Psi)}$ est ainsi conservée. De même, l'énergie $W = W_{(U)} + W_{(\Psi)}$ satisfait à (2,21).

La transformation de jauge du champ u_A garde sa forme (4,7) avec λ à la place de j .

Substituée en (5,4), elle produira une rotation dans le plan $a, b = 1, 2$.

$$J_a = (e^{-i\lambda})_a^b J_b \quad (5,9)$$

Ceci est en parfait accord avec l'action du champ de MAXWELL \vec{E} , \vec{B} , sur φ_a , si celle-ci est représentée par la substitution des opérations $D_{ta}^b \varphi_b$ et $\vec{D}_a^b \varphi_b$ à la place de $\partial_t \varphi_a$ et $\text{grad } \varphi_a$ en (3,1) et (5,6)*). Le champ φ_a subit ainsi la même rotation (5,9) que J_a).

Le terme $T_{(\Psi)}^{\mu\nu} = T_{(\Psi_1)}^{\mu\nu} + T_{(\Psi_2)}^{\mu\nu}$ définissant $W_{(\Psi)}$, peut être formé par contraction d'une double fonction $\Psi(x, y)_{ab}$, qui est la fonction (3,21), les φ étant munis d'un indice a (φ_a et φ_b). La densité de charge (5,6) doit être formée de la même manière (cf. deuxième identité en (5,6)).

Nous passons maintenant à l'aire d'incertitude $r(\varphi(\tilde{x}, t)_a, \varphi(\tilde{x}', t)_b)$. Pour ceci, nous transcrivons l'équation pour φ_a en (3,2) où l'indice a parcourt dès maintenant les valeurs $a = 1$ à 4 :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_1; \varphi_2 = \varphi_2; \varphi_3 = \mu^{-1} \partial_t \varphi_1; \varphi_4 = \mu^{-1} \partial_t \varphi_2; \\ J_1 &= J_1; J_2 = J_2; J_3 = J_4 = 0 \end{aligned}$$

Une équation analogue à (3,7) est ainsi obtenue pour l'évolution des aires, la seule différence étant que l'indice a, b, \dots parcourt les valeurs de 1 à 4 avec $\eta^3 = \eta^4 = 0$. i et j sont les deux matrices à 4 lignes

$$i = 1 \times i; j = i \times 1 \quad (5,10)**)$$

qui relie φ_1 à φ_3 , φ_2 à φ_4 (i) et φ_1 à φ_2 , φ_3 à φ_4 (j).

Avant de discuter (3,8) et (3,9), nous calculons l'aire d'incertitude entre $\Psi_{ab} = \varphi_a \varphi_b - \dots$ et φ_c' qui résultent de (3,8) et (3,9). Des grandeurs ainsi obtenues, nous formons, en utilisant (1,6a):

$$r(\Psi_{ab}, \varphi_c') J'^c = -\hbar \mu^{-1} (\varphi_a' i_{bc} + \varphi_b' i_{ac}) \delta(\tilde{x} - \tilde{x}') \eta^{cAB} U(\tilde{x}, \tilde{x}')_{AB} \quad (5,11)$$

On peut s'en servir pour déterminer la fonction $\tau(\tilde{x} - \tilde{x}')_{ab}$ intervenant en

$$r(\varphi_a, \varphi_b') = -\tau(\tilde{x} - \tilde{x}')_{ab}. \quad (5,12)$$

La définition de Ψ_{ab} a pour conséquence

$$r(\Psi_{ab}, \varphi_c') = -\varphi_a \tau(\tilde{x} - \tilde{x}')_{bc} + \varphi_b \tau(\tilde{x} - \tilde{x}')_{ac} \quad (5,13)$$

*) $D_{ta}^b = \delta_t \delta_a^b + i_a^b \varepsilon \Phi(\tilde{x}, t)$; $\vec{D}_a^b = \text{grad } \delta_a^b - i_a^b \varepsilon \vec{A}(\tilde{x}, t)$.

**) en D_{ta}^b et \vec{D}_a^b de la note *) i est à et remplacer par j .

La définition $J^c = \eta^{cAB} U(\tilde{x}, \tilde{x})_{AB}$ montre que la seule manière de satisfaire (5,11) identiquement en J^c est de poser

$$\tau(\tilde{x} - \tilde{x}')_{ab} = h \mu^{-1} i_{ab} \delta(\tilde{x} - \tilde{x}') \quad (5,14)$$

Ceci réduit (5,12) à (3,10). Les deux champs φ_1 et φ_2 satisfont ainsi, chacun séparément, à (3,10a) ou (3,11), que nous exprimons dans la forme analogue à (2,7)

$$r(\varphi(\tilde{x}, t)_a, \varphi(\tilde{y}, \tau)_b) = D^{(-)}(\tilde{x} - \tilde{y}, t - \tau)_{ab} \quad (5,14a)$$

en termes de (2,15) avec l'indice $a, b = 1, 2$:

$$D^{(-)}(\tilde{x}, t)_{ab} = -D^{(-)}(-\tilde{x}, -t)_{ba} = \delta_{ab} D^{(0-)}(\tilde{x}, t) \quad (5,14b)$$

Cette théorie quantifiée du champ de SCHROEDINGER a été proposée par PAULI et WEISSKOPF⁵). Remarquons, que les composantes u_9 à u_{12} du champ de DIRAC-MAJORANA u_A impliquent la *théorie du neutrino*, c.-à-d. leurs quanta (à quantité de mouvement $h\tilde{k}$) ont les propriétés du § 2: Il n'est donc pas nécessaire de concevoir un « antineutrino ». Par conséquent, l'angle $\chi(t)$ entre le rayon vecteur φ_1 , φ_2 et l'axe φ_1 dans le plan 1,2 peut être déterminé aussi exactement que désiré, aucune limite n'étant imposée à $\varphi_1^2 + \varphi_2^2$. Le même est vrai pour le rayon vecteur $\partial_i \varphi_1$, $\partial_i \varphi_2$. Ceci permet de déterminer simultanément $\chi(t+dt)$. Ce résultat est en contradiction avec la 2ème restriction (équ. (0,7)) de l'introduction.

Pour y remédier, nous proposons de renoncer à l'hypothèse (3,8) et de la remplacer par l'hypothèse moins forte.

$$\lim_{v', v'' \gg \mu^{-3}} r(m^{ab} \Psi(v')_{ab}, \lambda^{AB} U(v'')_{AB}) = 0 \quad (5,14^*)$$

m_{ab} étant une matrice quelconque à 4 lignes ($a, b = 1, 2, 3, 4$). En multipliant (3,7) avec φ_b et u^A et en le symétrisant on trouve la conséquence qu'à la place de (3,9), on doit demander que, (pour les expressions moyennes) l'aire $r(\dots)$ satisfasse à

$$\lim_{v', v'' \gg \mu^{-3}} r(\Psi(v')_{ab}, \varphi(v'')_c J(v'')^c) = -h \mu^{-1} (\varphi(v')_a i_b^c + \varphi(v')_b i_a^c) \frac{v''}{v' v''} J(v'')_c \quad (5,15^*)$$

D'autre part, il résulte de (5,12)

$$\lim_{v', v'' \gg \mu^{-3}} r(\Psi(v')_{ab}, \varphi(v'')_c) = -(\varphi(v')_a m_{bc} + \varphi(v')_b m_{ac}) \frac{v''}{v' v''} \quad (5,16^*)$$

si la fonction τ a la propriété

$$\lim_{v \gg \mu^{-1}} \int_v (dx)^3 \tau(\tilde{x})_{ab} = m_{ab} \int_v (dx)^3 \delta(\tilde{x}) = m_{ab} \dots \quad (5,17^*)$$

*) $f(v)$ est la moyenne d'une fonction $f(x)$ définie par (0,9). v'' est défini en (2,20) comme étant le volume commun à v' et v'' .

Le champ $\varphi(v)_a$ ne contient que les basses fréquences $|\tilde{k}| \ll \mu$. En vertu de (3,2) dans l'approximation $\varepsilon' = 0$, cette partie de φ_a est solution de

$$\partial_t \varphi(v)_a \cong -\mu i_a^b \varphi(v)_b = \mu \varphi(v)^b i_b^a \quad (5,18)$$

On peut le décomposer en deux groupes $\varphi(v)_{a\pm}$ qui satisfont respectivement à

$$\partial_t \varphi(v)_{a\pm} \cong \mp \mu j_a^b \varphi(v)_{a\pm}; \quad \varphi(v)_a = \varphi(v)_{a+} + \varphi(v)_{a-} \quad (5,19)$$

Si $\varepsilon' \neq 0$ le groupe $\varphi(v)_{a+}$ ne sera, essentiellement, influencé que par la partie $J(v)_{a+}$ de $J(v)_a$, qui ne contient que la fréquence $+\omega_k \cong \mu$. (5,19) est alors satisfait. Nous imposons encore une autre restriction à (5,14) et (5,15) en demandant que ces relations ne soient valables que dans la forme

$$r(M)(v'), N(v'') = P(v') \frac{v''}{v' v''} \quad (5,20)$$

où M, N et P sont des grandeurs invariante par rapport à des substitutions de jauge. $N = \varphi_c J^c$ est une telle variable. Ψ_{ab} ne possède cette propriété que si on le multiplie avec une matrice m^{ab} commutant avec j^{ab} et si l'on contracte les indices ($M = m^{ab} \Psi_{ab}$). Le deuxième membre prend alors automatiquement cette forme invariante.

En plus de cette restriction ($v', v'' \gg \mu^{-3}$; $(mj)_a^b = (jm)_a^b$) il convient de redéfinir les moyennes $f(v)$ par

$$f(v) = v^{-1} T^{-1} \int_v (dx)^3 \int_{t-\frac{1}{2}T}^{t+\frac{1}{2}T} dt' f(\tilde{x}, t') \quad (5,21)$$

Cette définition permet la transformation suivante du deuxième membre de (5,15) dès que $T \gg \mu^{-1}$:

$$\begin{aligned} m^{ab} \varphi_{b\pm} i_a^c J_c(v') &\cong \varphi_{\pm}^a i_a^b m_{cb} J^c(v') \\ &\cong + \mu^{-1} (\partial_t \varphi_{\pm}^a) m_{ca} J^c(v') \\ &\cong - \mu^{-1} \varphi_{\pm}^a m_{ca} \partial_t J^c(v') \\ &\cong \pm m^{ab} \varphi_{b\pm} j_a^c J_c(v') \\ &\cong \pm m^{ab} \varphi_{b\pm} j_a^c J_c(v') \end{aligned} \quad (5,22)^*)$$

On a d'abord utilisé (1^o identité) le fait que la matrice m^{ab} commute avec i_a^b . Ceci est le cas pour j_a^b, i_a^b et δ_a^b qui suffisent à former les moyennes de $\varrho(\psi), \tilde{J}(\psi), W(\psi)$ et $\tilde{T}(\psi)$. Ensuite (2^{ème} identité), on a substitué (5,18) et (3^{ème} identité) on a intégré par parties sur t'

*) L'argument (v') signifie, que la moyenne de toute l'expression est prise suivant (5,21).

*) m^{ab} doit être symétrique vu la définition de M .

en (5,21). Comme T est grand par rapport à la période μ^{-1} , ce n'est que la partie J_{c+} qui contribue à la moyenne (5,21) si l'on s'occupe de la partie φ_{b+} . On peut donc substituer (4ème identité) l'équation (5,19) à laquelle satisfait cette partie J_{c+} . Finalement (5ème identité), on écrit formellement encore une fois J_c pour J_{c+} afin d'arriver à une *expression très semblable au 1er membre*, $\pm j_a^c$ étant substitué pour i_a^c . Ainsi (5,15) prend la forme

$$\lim_{v', v'', T^3 \gg \mu^{-3}} r(\Psi(v')_{ab}, \varphi_c J^c(v'')) = -h \mu^{-1} ((\varphi_{a+} - \varphi_{a-}) j_b^c + (\varphi_{b+} - \varphi_{b-}) j_a^c) J_c(v') \quad (5,23)^*$$

La comparaison avec (5,16) montre que l'identification (5,17) et

$$\tau(\tilde{x} - \tilde{x}')_{ab} = \mp h \mu^{-1} j_{ab} \bar{\delta}(\tilde{x} - \tilde{x}') \text{ si } \varphi_{a+} \geq \varphi_{a-} \quad (5,24)$$

(ou $\bar{\delta}(\tilde{x})$ est une « fonction $\delta(\tilde{x})$ » qui peut s'étendre sur un volume $v \sim \mu^{-3}$) présente une deuxième alternative, différente de (5,14) par la substitution de $\pm j_{ab}$ pour i_{ba} . Il est à remarquer que (5,23) et (5,16) avec la condition $\varphi_{a+} \gg \varphi_{a-}$ ne déterminent $\tau(\tilde{x} - \tilde{x}')_{ab}$ que pour les composantes $a, b = 1, 2$, parce que $J_3 = J_4 = 0$.

(5,24) peut être mis sous forme covariante, si l'on identifie $\bar{\delta}(\tilde{x})$ avec la fonction $\mu D^{(1+)}(\tilde{x}, 0)$ ((2,32) et (2,33)). Ceci implique que, dans (5,14a), on doit substituer

$$D^{(-)}(\tilde{x}, t)_{ab} = -D^{(-)}(-\tilde{x}, -t)_{ab} = \mp j_{ba} D^{(1+)}(\tilde{x}, t) \quad (5,25)^*$$

avec la fonction (2,30). Il exprime dans sa forme ($a, b = 1, 2$)

$$r(\varphi(v)_a, \varphi(v)_b) = \mp j_{ab} h v^{-1} \mu^{-1} \quad (5,26)$$

que l'angle $\chi(t)$ entre l'axe φ_1 et le rayon vecteur φ_1, φ_2 peut être mesuré avec toute la précision voulue ($\Delta\chi(t) \rightarrow 0$) pourvu qu'on prenne un champ $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 \gg h(v\mu)^{-1}$. Mais la singularité (2,31) de $D^{(1+)}$ implique (pour $a, b = 1, 2$):

$$r(\partial_t \varphi(v)_a, \partial_t \varphi(v)_b) = \mp j_{ab} \infty \quad (5,27)$$

Ceci signifie que le point représentatif du rayon vecteur $\partial_t \varphi_1, \partial_t \varphi_2$ ne peut être localisé que dans une bande $\Delta \partial_t \varphi_1 = \text{fini}$, $\Delta \partial_t \varphi_2 = \text{infini}$. L'angle $\chi(t + dt)$ ne peut ainsi être connu qu'à $\Delta\chi(t + dt) = \pi$ près.

C'est cette deuxième alternative qui correspond à notre deuxième restriction exprimée en (0,7).

Il faut maintenant discuter le sens physique de la restriction $\varphi_{a+} \gg \varphi_{a-}$: Elle signifie que, au temps t et dans une partie de l'es-

*) Posant partout μ pour κ .

pace (celle où $\varphi_{a+} \gg \varphi_{a-}$), on peut connaître séparément pour les deux champs φ_a et u_A , les grandeurs invariantes par rapport aux transformations de jauge (p. ex. $\varrho(\Psi)$ et $\varrho(v)$), pourvu qu'on les comprenne comme des moyennes sur des régions d'espace temps à dimensions linéaires $l_i = l^i$ et $l^4 \gg \mu^{-1}$. Si nous choisissons en (5,25) p. ex. le signe $-$, il existe, en général, des *autres régions*, avec $\varphi_{a+} \lesssim \varphi_{a-}$ dans lesquelles une *connaissance simultanée* de $\varphi(\Psi)$ et de $\varrho(v)$ n'est pas possible. Dans ces régions (5,14a) avec (5,25) (signe $-$) est satisfait mais pas (5,23) et son corollaire (5,14). Les valeurs de (5,14) doivent, en ce cas, être calculées en solvant explicitement (3,7) et les équations correspondantes pour $\partial_t r(u_A, u_B')$ et $\partial_t r(\varphi_a, \varphi_a')$.

La moyenne (5,21) de la densité de charge $\varepsilon \varrho(v)$ peut être transformée comme (5,22)

$$\begin{aligned} \varepsilon \varrho(v) \Psi &\cong \varepsilon \mu i^a{}_b j^{bc} \Psi_a{}^c(v) \\ &\cong \varepsilon \mu i^a{}_b j^{bc} (\varphi_{a+} \varphi_{c+} + \varphi_{a-} \varphi_{c-} - (\text{FD-termes})) \\ &\cong \varepsilon \mu (\varphi_{a+} \varphi_{a+} - \varphi_{a-} \varphi_{a-} - (\text{FD-termes})) \end{aligned} \quad (5,28)$$

On voit alors que l'amplitude (au carré) de $\varphi_{a+} = \varphi_{a+}$ représente la *contribution positive* et celle de $\varphi_{a-} = \varphi_{a-}$ la *contribution négative* à la densité de charge $\varepsilon \varrho(\Psi)$ portée par le champ φ_a . La restriction (5,24) signifie donc: *Il est toujours possible de connaître simultanément la distribution de charge et d'énergie séparément pour les contributions des champs u_A et φ_a dans une région où la contribution de φ_a à la charge $\varepsilon \varrho(v)$ est essentiellement limitée à un seul signe.*

Pour compléter la théorie, on doit encore étudier la loi d'incertitude qui résulte de (5,25) (avec un signe choisi) pour un *champ du type $\bar{\varphi}$ de DE BROGLIE* du § 3, qui agit sur le *champ de SCHROEDINGER*. Le champ considéré φ_1, φ_2 de ce paragraphe (champ de SCHROEDINGER) exerce une action du type (3,1) sur le champ de DE BROGLIE, qu'on étudie en posant $\varepsilon' J = \varepsilon' \Psi_a{}^a$ comme inhomogénéité ($a, b = 1, 2$) en (3,1)*) et en ajoutant un terme $\mu \varepsilon' \bar{\varphi}$ à μ^2 dans l'équation homogène de SCHROEDINGER pour φ_1, φ_2 . L'analyse analogue à (3,7) et suivantes (avec $\bar{\varphi}_{\bar{a}}$ ($\bar{a} = 1, 3$) à la place de φ_a et φ_a à la place de u_A) montre alors que le champ de DE BROGLIE $\bar{\varphi}$ satisfait à (3,11) avec un signe déterminé par le signe choisi en (5,25) si, dans une partie d'espace, le champ de SCHROEDINGER satisfait à $\varphi_{a+} \gg \varphi_{a-}$. Dans cette région, le champ $\bar{\varphi}$ de DE BROGLIE et les grandeurs covariantes $\varrho(\Psi)$ du champ φ_1, φ_2 de SCHROEDINGER peuvent être connues simultanément. Dans les régions où la charge

*) Pour $\bar{\varphi}(\hat{x}, t)$.

négative devient importante ($\varphi_{a+} \gtrsim \varphi_{a-}$), une connaissance simultanée n'est plus possible.

Il en est de même pour l'interaction entre le champ de MAXWELL \vec{E}, \vec{B} et celui de SCHROEDINGER $\varrho\psi, \vec{J}\psi$. La signification physique de ce phénomène a été illustrée dans une note précédente⁶⁾. Nous rappelons que l'analyse de FOURIER de φ_a ($a = 1, 2$) peut se faire de façon analogue à la transition des u_A de (2,9a) à u_A en (4,9), si l'on passe de (3,12) à

$$\varphi_a = \varphi_{a+} + \varphi_{a-} = (2V\omega_k)^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{\vec{k}} (1 p_{\vec{k}+}^0 - j q_{\vec{k}+}^0) e^{j(\vec{k}x - \omega_{\vec{k}}t)} + (1 p_{\vec{k}-}^0 + j q_{\vec{k}-}^0) e^{j(\vec{k}x + \omega_{\vec{k}}t)} \right) a^b \sigma_b \quad (5,29)^*$$

La loi (5,25) demande que

$$\begin{aligned} r(p_{\vec{k}+}^0, q_{\vec{k}+}^0) &= -r(p_{\vec{k}-}^0, q_{\vec{k}-}^0) = \pm \hbar \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \\ r(p_{\vec{k}+}^0, p_{\vec{k}'}^0) &= r(q_{\vec{k}+}^0, q_{\vec{k}'}^0) = 0 \end{aligned} \quad (5,30)$$

La loi (5,14b), qui contredisait notre 2ème restriction, se distingue en (5,30) par le signe + dans le second membre de la 1ère équation (5,30). Nous voulons (sans preuve) montrer la *différence physique entre notre théorie et la théorie écartée* (théorie de PAULI-WEISSKOPF):

Le passage de $p_{\vec{k}\pm}^0$ aux $p_{\vec{k}\pm}^0(t)$ se fait encore une fois à l'aide de (2,10) (avec $\omega_{\vec{k}} > 0$). La théorie (5,14b) que nous avons écartée avait donc l'avantage de relier les variables canoniques $p_{\vec{k}+}$ et $q_{\vec{k}+}$ par le même signe pour $p_{\vec{k}+}$ et $p_{\vec{k}-}$. Les relations canoniques ((5,30) (avec le signe +!)) étant remplies à un moment $t = 0$, elles le restaient pour tout temps $t \neq 0$, même si le champ a été influencé soit par U_{AB} , soit par $\vec{\varphi}$, soit par \vec{E}, \vec{B} . Il en est de même pour le terme FD, qu'on soustrait. L'effet de cette différence se montre très important:

L'énergie totale à la forme (3,24) tandis que, pour la charge, on a analogiquement au champ de DIRAC (4,10) ($\lambda = +, -$)

$$e_{(\psi)} = \varepsilon \int (dx)^3 \varrho(\psi) = \sum_{\vec{k}\lambda} e_{\vec{k}\lambda} = \sum_{\vec{k}} \varepsilon \hbar (N_{\vec{k}+} - N_{\vec{k}-}) \quad (5,31)$$

les valeurs observables de

$$\hbar N_{\vec{k}\lambda}(t) = \frac{1}{2} (p_{\vec{k}\lambda}^2 + q_{\vec{k}\lambda}^2) - \frac{1}{2} |r(p_{\vec{k}\lambda}, q_{\vec{k}\lambda})| \quad (5,32)$$

étant des multiples de \hbar . En général, c'est-à-dire si une influence \vec{E}, \vec{B} est exercée sur φ_a , $\frac{1}{2} (p_{\vec{k}\lambda}^2 + q_{\vec{k}\lambda}^2)(t)$ est fonction de t . Dans la

*) Les σ_b sont normalisés comme les σ_A en (2,17).

théorie canonique écartée, on avait, comme dans la théorie du champ u_A de DIRAC, pour le terme $\frac{1}{2} |r|$ une constante, même si la dépendance $p_{\vec{k}_A}(t)$ était influencée par \vec{E}, \vec{B} .

Dans la nouvelle théorie (5,25) avec les relations non canoniques (5,30), $\frac{1}{2} |r|$ en (5,32) est une fonction de t dès qu'une influence se manifeste. La création spontanée (qui apparaît dans la théorie de PAULI-WEISSKOPF comme parallèle à l'annihilation spontanée des quanta d'un champ u_A) de paires de quanta du champ φ_a (de charge opposée) est une caractéristique de la forme canonique ((5,30) avec +) parce qu'elle résulte du fait que $\frac{1}{2} |r|$ est constant. La dépendance $\frac{1}{2} |r| (t)$ de t dans la nouvelle théorie enlève rigoureusement cette contribution spontanée et ne laisse que la création induite de paires (soit la création proportionnelle au nombre des quanta (de φ_a) déjà présent) par le champ \vec{E}, \vec{B} . Ce résultat est identique à la nouvelle mécanique du point de masse⁶⁾.

Genève, Institut de Physique de l'Université.

Littérature.

¹⁾ Cf. résumé Soc. Suisse de Physique, Helv. Phys. Acta **15**, 513 (1942).

²⁾ La quantification doit se faire suivant la nouvelle méthode qui a été exposée en détail en Arch. de Genève, **24**, 193 et 261 (1942); **25**, 5 (1943); cf. aussi le résumé Helv. Phys. Acta **15**, 327 (1942). p. 328 lire Z^2 et Z à la place de Z^4 et Z^2 .

³⁾ Cette forme particulière de l'équation de DIRAC a été proposée pour la première fois par MAJORANA, R. C. Academia de Lincei, **14**, 1 (1937).

⁴⁾ STUECKELBERG, C. R. Soc. Phys. Hist. Nat. Genève **59**, 49 et 53 (1942).

⁵⁾ PAULI et WEISSKOPF, Helv. Phys. Acta **7**, 709 (1934).

⁶⁾ Cf. STUECKELBERG. La démonstration est faite en utilisant l'équivalence entre cette théorie et la nouvelle mécanique proposée par l'auteur, Helv. Phys. Acta **14**, 321, 588 (1941) et **15**, 23 (1942).

⁷⁾ Cf. STUECKELBERG, Helv. Phys. Acta **11**, 225 et 299 (1938).

⁸⁾ L'existence d'une grandeur pareille (la longueur fondamentale) a été considérée depuis l'antiquité. En mathématique (géométrie) moderne elle a été introduite par CAVALIERI (1635) et LEIBNIZ (1684). Un exposé historique de ces idées a été donné par F. KLEIN, Elementarmathematik vom höhern Standpunkte aus (Springer), Bd. I (4. Aufl.), p. 231 et suiv. (1933), Bd. II (3. Aufl.), p. 203 et suiv. (1925). En physique moderne elle a été proposée par HEISENBERG, Zs.f. Phys. **101**, 533 (1936).

**Bericht über die Tagung
der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft**

in Biel, am 8. Mai 1943

Präsident: Prof. Dr. J. WEIGLE (Genf).

Vizepräsident: Prof. Dr. H. KÖNIG (Bern).

Sekretär: Prof. Dr. E. MIESCHER (Basel).

Geschäftlicher Teil.

Herr Prof. Dr. P. GRUNER, Redaktor der Helv. Phys. Acta, berichtet über die erfreuliche Entwicklung der Zeitschrift, welche von der grossen Aktivität der Schweizerischen Physiker zeugt. Im Hinblick auf die gespannte finanzielle Lage, die nur dank Subventionen im Gleichgewicht gehalten werden kann, mahnt er die Autoren zur Kürze und fordert die Mitglieder auf, die Zeitschrift in vermehrtem Masse zu abonnieren.

Der Vorstand wird neu gewählt wie folgt:

Präsident: Prof. Dr. H. KÖNIG (Bern).

Vizepräsident: Prof. Dr. G. WENTZEL (Zürich).

Sekretär: Prof. Dr. A. MERCIER (Bern).

Beisitzer: Prof. Dr. M. WEHRLI (Basel).

Vertreter der Redaktionskommission der Helv. Phys. Acta:
Prof. Dr. P. GRUNER (Bern).

Rechnungsrevisoren: Prof. Dr. K. ZUBER (Zürich).

Dr. H. SCHILT (Biel).

In die S. P. G. werden aufgenommen:

A. VON ARX (Olten); P. BANDERET (Basel); H. BRINER (Fribourg); G. FEJÉR (Bern); A. GIBERT (Zürich); G. GUANELLA (Zürich); J. HALTER (Solothurn); H. LABHART (Zürich); B. MATTHIAS (Zürich); H. MEDICUS (Zürich); Dr. F. METZGER (Basel); M. DE QUERVAIN (Zürich); F. ROGGEN (Baden); H. W. ROTH (Luzern); W. SIGRIST (Rafz); TH. HEIM (Bienne); K. TSCHUDIN (Basel); B. ZWICKER (Zürich).

Die S.P.G. hat durch den Tod verloren:

Prof. J. LANDRY (Lausanne).

Nachstehende Mitglieder werden gestrichen:

Dr. J. AUSLÄNDER; H. HAUSMANN; Dr. H. KLUMB; A. LEE-MANN; Dr. J. PRIEBSCHE.

Die S.P.G. zählt zur Zeit 258 Mitglieder.

Die nächste Sitzung soll anlässlich der Jahresversammlung der S.N.G. am 28.—30. August 1943 in Schaffhausen stattfinden.

Wissenschaftlicher Teil.

Détermination expérimentale des dimensions des ions légers dans l'air, par l'écoulement ionisé unipolaire

par G. JOYET (Lausanne).

(Paraitra peut-être en extraits dans les H.P.A. et in extenso dans le Bull. Soc. Vaudoise Sc. Nat.).

Bindungsenergie einzelner Bindungen und Dissoziationsenergie mehratomiger Moleküle

von M. WEHRLI (Basel).

Ausgehend vom Valenzkraftmodell wird der Unterschied zwischen den Bindungsenergien δ der einzelnen Bindungen und den beobachteten Dissoziationsenergien D besonders bei dreiatomigen Molekülen näher untersucht. Die beträchtlichen Differenzen werden durch Elektronenumlagerungen während oder nach der Dissoziation erklärt. Dabei wandern die Elektronen aus den getrennten Bindungen in die verbleibenden benachbarten Bindungen hinein, die dadurch gelockert oder verfestigt werden. Umgekehrte Wanderungen, die meistens von Energieverschiebungen begleitet sind, finden bei der Entstehung von Bindungen statt. Bei der Bildung der Wasserstoffbrücke wandert ein Elektron ganz oder teilweise in die entstehende $H\cdots O$ -Brücke hinein. Der spektroskopische Befund beweist, dass dieses Elektron aus der Bindung der benachbarten OH-Gruppe stammt.

Es werden die Bedingungen, bei denen die elastischen Konstanten und die zugehörige Bindungsenergie δ einer Bindung auf andere Bindungen übertragen werden dürfen, diskutiert und bei einer Reihe dreiatomiger Moleküle erfüllt gefunden. Dieses Referat berichtet über einen Teil einer Arbeit, die noch gemeinsam mit G. MILAZZO ausgeführte Messungen der Dissoziationsenergien D der Moleküle $HgClBr$ und $HgBrI$ enthält. Die ausführliche Publikation wird in den *Helvetica Chimica Acta* 1943 erscheinen.

Sur la dynamique générale des corps déformables; élasticité et viscosité

par ANDRÉ MERCIER (Berne)

(Un ouvrage sur ce sujet paraîtra ultérieurement.)

Molekularzustände bei der freien Verdampfung

von F. METZGER und E. MIESCHER (Basel).

Unter *freier* Verdampfung verstehen wir den Vorgang, bei dem sich Moleküle zufolge ihrer thermischen Energie von der Oberfläche eines Kondensates ablösen, ohne dass dabei eine Rückwirkung der sich in der Dampfphase abspielenden Prozesse auf die Vorgänge an der Oberfläche besteht. Sie kann praktisch nur in der Weise realisiert werden, dass die weg dampfenden Moleküle an einer tiefgekühlten Fläche abgefangen werden, bevor sie im Dampf zum Stoss kommen. Die Geschwindigkeit, mit der die Verdampfung unter solchen Umständen bei einer vorgegebenen Temperatur der Oberfläche erfolgt, ist der Messung leicht zugänglich, theoretisch jedoch nur auf Grund von Modellvorstellungen über die an der Oberfläche wirkenden Kräfte berechenbar¹⁾; weitere Fragen nach dem Zustande der abgehenden Moleküle, wie etwa nach ihrem Molekulargewicht, ihrer Molekulargeschwindigkeit und nach dem Grade der inneren Anregung — Fragen, die auch das Problem der Temperatur im Molekularstrahl umfassen — haben bisher überraschend wenig Bearbeitung gefunden. Es ist dabei zu beachten, dass alle Ergebnisse der Untersuchungen an gesättigten Dämpfen, also am Gleichgewichtsfall, grundsätzlich nicht auf das Nichtgleichgewicht übertragen werden dürfen.

Die Translationstemperatur in Atomstrahlen, welche von einer frei verdampfenden Oberfläche, und nicht aus einem dampf-erfüllten Hohlraum, herrühren, haben STERN²⁾ aus der direkten Bestimmung der Translationsgeschwindigkeit und später JACKSON und KUHN³⁾ nach einem optischen Verfahren aus der Linienbreite erhalten. Die optische Methode ist einer erheblichen Erweiterung fähig dadurch, dass etwa ein Molekülspektrum in Absorption in Molekularstrahlen über frei verdampfenden Stoffen aufgenommen würde, ein Verfahren, das unseres Wissens bisher nie versucht worden ist. Wenn es gelingt, in dieser Weise ein Bandenspektrogramm aufzunehmen, so wäre es prinzipiell möglich, zu Aussagen über die Anregung von Schwingung und Rotation im Verdampfungs-

¹⁾ K. F. HERZFELD, J. Chem. Phys. **3**, 319, 1935.

²⁾ O. STERN, Zeitschr. f. Phys. **2**, 55, 1920; **3**, 417, 1920.

³⁾ D. A. JACKSON and H. KUHN, Proc. Roy. Soc. A, **148**, 347, 1935.

prozess zu gelangen, auch liessen sich Rückschlüsse auf die Art der Träger der Spektren ziehen. Die experimentelle Schwierigkeit liegt in der, im Vergleich zu den Atomstrahlen viel geringeren Absorptionsstärke in den Bandenspektren, weshalb zwecks Innehaltens der Bedingung freier Verdampfung eine vielfach grössere optische Schichtdicke benötigt wird, und somit eine auf langer Strecke gleichmässige Verdampfung erzielt werden muss.

Versuche, die wir in einer Hochvakuumapparatur mit einer mehrere Dezimeter langen, elektrisch geheizten Unterlage und einer tiefgekühlten Auffangfläche angestellt haben, ergaben an Thalliumchlorid, Tellur, Lithium, wenn auch in allen Fällen schwach, bekannte Bandensysteme zweiatomiger Träger, während solche im Falle von Schwefel und Selen ausblieben. Zur Ausdeutung der Spektren im angegebenen Sinne werden noch beträchtlich grössere Schichtlängen nötig sein, hingegen steht der spektroskopische Befund in Übereinstimmung mit Resultaten von direkten Molekulargewichtsbestimmungen, welche wir nach dem früher mitgeteilten Wägungsverfahren¹⁾ vorgenommen haben. Die elektrische Vakuumwaage ist zu diesem Zwecke zu einer Doppelwaage ausgebaut worden, welche die gleichzeitige Messung zweier aufeinander senkrecht wirkender Kräfte gestattet, wovon die eine den Gewichtsverlust, die andere den Verdampfungsdruck an einer vertikal gestellten verdampfenden Schicht darstellt.

Eine in kurzem in den *Helvetica Physica Acta* erscheinende ausführliche Arbeit wird Einzelheiten der Methodik und der Ergebnisse mitteilen und auch über Untersuchungen nach dem Wägungsverfahren zur Verdampfung von Kalomel und Ammoniumchlorid berichten.

Über die Gangschwankungen einer Pendeluhr

von H. SCHILT (Biel).

Bekanntlich nimmt die Schwingungsdauer eines freien Pendels mit zunehmender Amplitude zu. Ein Uhrpendel ist nun nicht völlig frei, sondern ist den Impulsen unterworfen, die ihm von der Hemmung erteilt werden. Diese Impulse bewirken bei der Grahamhemmung ebenfalls eine Verlängerung der Schwingungsdauer, jedoch ist der Einfluss der Hemmung umso kleiner, je grösser die Amplitude ist. Daraus kann man schliessen, dass es eine Amplitude geben muss, für die die Schwingungsdauer unempfindlich ist auf Amplitudenschwankungen. Diese Amplitude wird für eine ge-

¹⁾ E. MIESCHER, *Helv. Phys. Acta* **15**, 507, 1941.

gebene Hemmung bestimmt; damit ist auch das günstigste Antriebsmoment einer Pendeluhr festgelegt.

Ein ausführlicher Bericht erscheint demnächst im „Journal Suisse d'Horlogerie et de Bijouterie“.

Gezüchteter KH_2PO_4 -Kristall als Frequenzstabilisator

von W. BANTLE (E.T.H., Zürich).

In der Technik werden hauptsächlich zwei piezoelektrische Kristalle verwendet, nämlich Quarz und Seignettesalz. Beide Substanzen haben wesentliche Vor- und Nachteile. Quarz zeichnet sich besonders aus durch seine grosse mechanische Festigkeit und Seignettesalz durch seine sehr starke piezoelektrische Erregbarkeit (d_{14} bis $30\,000 \cdot 10^{-8}$ cgs) und die Möglichkeit sehr leicht grosse Einkristalle zu züchten. Andererseits haben diese Stoffe folgende Nachteile: Quarz hat einen ziemlich bescheidenen Piezomodul ($d_{11} = 7 \cdot 10^{-8}$ cgs) und man ist auf die in der Natur gefundenen Kristalle angewiesen, die oft durch Zwillingbildung von Rechts- und Linksquarz unbrauchbar sind. Seignettesalzkristalle verlieren ohne besondere Vorsichtsmassnahmen ihr Kristallwasser und damit ihren hohen Piezomodul und überdies sind der Piezomodul d_{14} und gewisse Elastizitätskoeffizienten bei Zimmertemperatur keine Konstanten, sondern stark druck-, feldstärke- und temperaturabhängig (Hysteresis).

Dieser Nachteil der Quarz- und Seignettesalzkristalle wegen erschien es uns wünschenswert, den piezoelektrischen Kristall KH_2PO_4 in bezug auf seine Verwendbarkeit in der Technik zu untersuchen. Diese Substanz hat nämlich gegenüber Quarz die Vorteile, dass sie sich züchten lässt und bei Zimmertemperatur einen rund 10 mal grösseren Piezomodul hat. Von Seignettesalz unterscheidet sie sich angenehm durch Beständigkeit, die Unabhängigkeit des Piezomoduls von Feldstärke und Belastung und durch grosse mechanische Festigkeit.

Eine der wichtigsten Anwendungen der Piezokristalle ist die Frequenzstabilisierung von Hochfrequenzgeneratoren. Bisher wurde dafür fast ausschliesslich Quarz verwendet, da man aus dieser Substanz bekanntlich speziell orientierte Stäbe und Platten schneiden kann, deren Eigenfrequenzen ν für eine bestimmte Temperatur T fast temperaturunabhängig sind. Die Funktion $\nu(T)$ hat dann für diese bestimmte Temperatur eine horizontale Tangente, oder mit anderen Worten: Der Temperaturkoeffizient $\frac{1}{\nu} \frac{\partial \nu}{\partial T}$ wird Null. Um zu entscheiden, ob KH_2PO_4 -Kristalle den Quarz in seiner Eigen-

schaft als Frequenzstabilisator ersetzen könnten, hat man somit nach Orientierungen zu suchen, die einen Null-Temperaturkoeffizienten aufweisen.

Diese gewünschte Eigenschaft besitzen KH_2PO_4 -Platten und -Stäbe, deren Normale parallel der c -Achse verlaufen. Leider wird der Temperaturkoeffizient aber erst Null bei -120°C . (Fig. 1.) Da dieser Effekt bedingt ist durch den Verlauf der elastischen Konstanten in der Nähe der Curietemperatur (analog dem ΔE -Effekt bei den Ferromagnetika), kann man ihn durch Änderung der Orientierung und der Dimensionen der Platten nicht wesentlich auf der Temperaturskala verschieben. Der tiefen Temperatur wegen wird deshalb dieser Null-Temperaturkoeffizient-Schnitt nur theoretisch interessant, nicht aber praktisch verwendbar, bleiben.

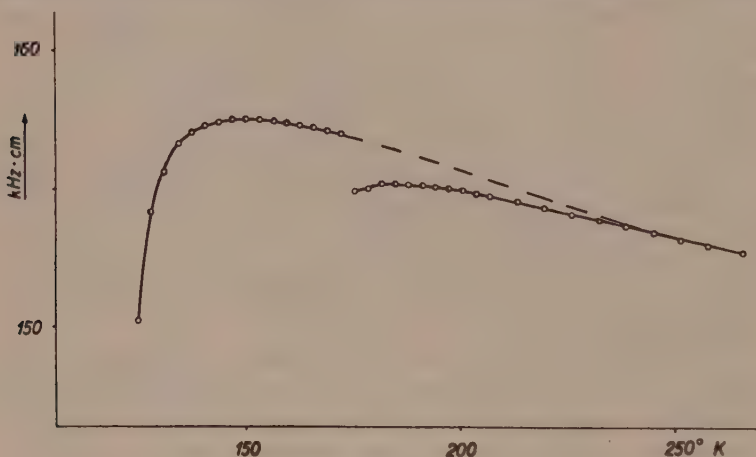


Fig. 1.

Eine andere Möglichkeit, temperaturunabhängige Eigenfrequenzen zu erhalten, ergibt sich aus der Tatsache, dass der Temperaturverlauf von Eigenfrequenzen, die durch den grossen Piezomodul d_{36} angeregt werden, Unstetigkeiten aufweist (z. B. bei $T = 175^\circ \text{K}$ in Fig. 1). In der Nähe solcher Unstetigkeiten, die bedingt sind durch die Kopplung zweier Eigenfrequenzen, tritt meistens ein Temperaturverlauf mit horizontaler Tangente auf. Ausgeprägte solche Kopplungseffekte treten jedoch auch hauptsächlich bei tiefen Temperaturen auf (da d_{36} bei Annäherung an die Curietemperatur $\Theta = 123^\circ \text{K}$ rapid anwächst). Dieser tiefen Temperatur wegen und auch wegen der Labilität der Schwingung in der Nähe solcher Kopplungsstellen hat auch ein solcher Nulltemperaturkoeffizient kaum praktische Bedeutung.

Damit sind aber die Möglichkeiten nicht erschöpft, denn die technisch so wertvollen Null-Temperaturkoeffizienten von Quarz kommen auf eine andere Art und Weise zustande, welche auch für KH_2PO_4 noch offen bleibt. Wenn alle Elastizitätskoeffizienten s_{ik} und deren Temperaturkoeffizienten $\frac{1}{s_{ik}} \frac{\partial s_{ik}}{\partial T}$ sowie die thermischen Ausdehnungskoeffizienten bekannt wären, könnte man rechnerisch bestimmen, für welche Orientierungen der Temperaturkoeffizient bei Zimmertemperatur verschwindet. Vorläufig sind aber von diesen Grössen erst 4 von 14 bekannt. Wir sind deshalb im Begriffe, die restlichen Grössen zu messen.

Bisher untersuchten wir hauptsächlich Platten, deren Normale parallel der c -Achse läuft, weil der Piezomodul für diese Orientierung am grössten ist. Wir fanden für quadratische Platten, deren Kanten parallel der a -Achse oder unter 45° dazu lagen bei 25°C einen Temperaturkoeffizienten $\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial T}$ von $-290 \cdot 10^{-6}$. Für einen Stab, dessen Verhältnis Breite zu Länge $= 0,2$ war, und dessen Normale parallel der a -Achse lag mit einer Neigung der Kante gegen die c -Achse von 45° fanden wir $-205 \cdot 10^{-6}$. Diese Temperaturkoeffizienten sind von derselben Grössenordnung, wie man sie auch bei Quarz für eine beliebige Orientierung findet, und es besteht deshalb die berechtigte Hoffnung, ausser den oben angegebenen Möglichkeiten noch weitere Orientierungen mit verschwindendem Temperaturkoeffizienten zu finden.

Feldstärkeabhängigkeit piezoelektrischer Resonanzfrequenzen bei Seignetteelektrika

VON W. BANTLE, B. MATTHIAS UND P. SCHERRER (E.T.H. Zürich)

Bei der Erregung piezoelektrischer Kristalle in ihren Resonanzfrequenzen unterscheidet man grundsätzlich zwei verschiedene Fälle. Entweder wird die den Kristall zur Resonanz erregende Wechselspannung durch Elektroden zugeführt, die sich *direkt* auf der Kristalloberfläche befinden (beklebter Kristall) oder man erregt ihn *im Luftspalt* eines Kondensators (isolierter Kristall).

Untersucht man die Resonanzfrequenzen für die beiden erwähnten Fälle, so findet man, dass die Resonanzfrequenz des beklebten Kristalles einen kleineren Wert hat. Für Quarz ist diese Abweichung in der Grössenordnung von 1%. Für die Seignettelektrika ist jedoch der Unterschied zwischen isoliertem und beklebtem Kristall, vor allem im Curiegebiet, viel grösser ($\sim 50\%$).

Ausserdem ist der Temperaturkoeffizient der Eigenfrequenzen im letzteren Fall stark anomal. Diese starke Temperaturabhängigkeit der Eigenfrequenzen können hier nicht von Veränderungen der Dimensionen des Kristalls oder dessen Dichte herrühren. Sie sind hauptsächlich durch einen entsprechenden Verlauf des Elastizitäts-Koeffizienten mit der Temperatur bedingt. Thermodynamische Überlegungen¹⁾, bei welchen der Zusammenhang zwischen elektrischer Polarisation und elastischem Verhalten untersucht wird, ergeben eine Formel für die Differenz der Elastizitätskoeffizienten für konstante elektrische Spannung und konstante Polarisation. Diese Differenz berechnet sich nämlich zu:

$$\Delta s = s_E - s_P = \left(\frac{\delta x}{\delta P} \right)_X^2 \cdot \left(\frac{\delta P}{\delta E} \right)_X$$

s = Elastizitäts-Koeffizient
 x = spezifische Dehnung
 P = elektrische Polarisation
 E = elektrische Feldstärke
 X = mechanische Spannung

Weil der Koeffizient $\left(\frac{\delta x}{\delta P} \right)_X$ keinen sehr starken Temperaturgang besitzt, wird die Abweichung der beiden Elastizitäts-Koeffizienten hauptsächlich durch den Faktor $\left(\frac{\delta P}{\delta E} \right)_X$ bestimmt. $\frac{\delta P}{\delta E} = \kappa$ ist die reversible Suszeptibilität bei konstanter mechanischer Spannung. κ_{Rev} ist, wie z. B. auch die Suszeptibilität eines Ferromagnetikums stark feldstärkeabhängig. Nimmt die elektrische Feldstärke sehr kleine oder sehr grosse Werte an, so wird die reversible Suszeptibilität κ_{rev} klein.

Der Unterschied der beiden Eigenfrequenzen für den isolierten und für den beklebten Kristall ist in dieser Feldstärkeabhängigkeit zu suchen. Es besteht daher die Möglichkeit, diesen Unterschied in der Eigenfrequenz durch passende Wahl der Feldstärke am Kristall zu beeinflussen. Erregt man den Kristall durch ein ausserordentlich kleines Wechselfeld, so muss die Resonanzfrequenz des beklebten Kristalls steigen und sich derjenigen des isolierten Kristalles nähern. Ausserdem kann man aber auch der erregenden Wechselfeldspannung ein grosses Gleichfeld überlagern, so dass man ebenfalls im Gebiete kleiner reversibler Suszeptibilität arbeitet. Dann wird der erwähnte Unterschied zwischen den beiden Eigenfrequenzen wieder klein werden. Am günstigsten ist eine Kombination dieser beiden Fälle.

¹⁾ B. MATTHIAS, Helv. Phys. Acta **16**, 99, 1943.

Fig. 1 zeigt die experimentelle Bestätigung dieser Aussagen. Die Resonanzfrequenz des beklebten Kristalles steigt sowohl bei Verkleinern der Wechselfeldspannung als auch speziell bei Überlagerung eines Gleichfeldes und nähert sich dem im Luftspalt gemessenen Werte asymptotisch.

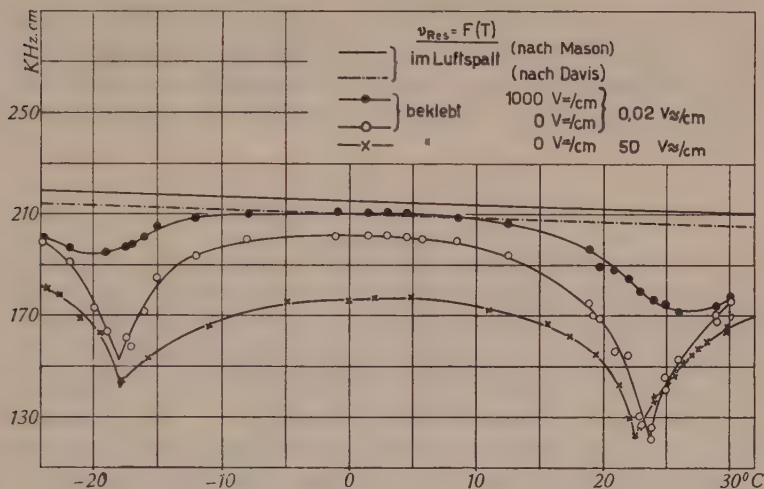


Fig. 1.

Die anschauliche Deutung dieser Erscheinungen ist darin zu suchen, dass im einen Fall die Polarisation bei den Eigenschwingungen des Kristalles mitschwingt und umklappt, während sie im andern Falle, z. B. bei Anlegen eines grossen Feldes, festgehalten wird.

Polarisation und spezifische Wärme von KH_2PO_4

von A. VON ARX und W. BANTLE (Zürich E.T.H.).

Die Seignette-Elektrika sind charakterisiert durch die Existenz spontan polarisierter Elementarbezirke im Temperaturbereich zwischen den Curiepunkten. Damit verknüpft treten Hysteresis-erscheinungen zwischen angelegtem äusserem Feld und der elektrischen Polarisation auf. Nehmen wir, in Analogie zur Theorie des Ferromagnetismus an, dass die Polarisation P des Kristalls eine Funktion von F/T allein sei, also $P = \Phi(F/T)$. F ist das innere Feld, definiert durch $F = E + fP$. Die Konstante f ist der Lorentz-faktor. Thermodynamische Überlegungen zeigen, dass die spezifische Wärme neben dem Anteil der Gitterschwingungen einen

Summanden enthält, der mit der spontanen Polarisation verknüpft ist. Dieser magnetokalorische Effekt wird durch

$$\Delta C = -\frac{1}{2} \cdot f \cdot \frac{d P_s^2}{dT} \quad (1)$$

wiedergegeben. Der Lorentzfaktor f , der durch die Kristallstruktur bestimmt ist, kann für einfache Gitter berechnet werden. Bei den Seignette-Elektrika sind wir aber auf die experimentelle Bestimmung angewiesen. Durch Integration von (1) folgt nämlich

$$f = \frac{Q_0}{P_{s, \max}^2} \quad (2)$$

Q_0 ist die gesamte Wärmemenge, die dem Kristall zum Aufbrechen der spontanen Polarisation zugeführt werden muss. Mit den experimentell bestimmten Werten $Q_0 = 57,3$ cal/Mol und $P_{s, \max} = 4,75 \cdot 10^{-6}$ Clb./cm² wird $f=0,39$ ($f=4\pi/3$ für kubische Kristalle!). Die Beziehung (1) gestattet bei bekanntem f einen Vergleich der kalorischen und dielektrischen Messungen. Die Gegenüberstellung der Messung der spezifischen Wärme nach BANTLE¹⁾ mit der von BUSCH²⁾ sowie BUSCH und GANZ³⁾ angegebenen spontanen Polarisation führte zu unbefriedigenden Ergebnissen.

Wir haben deshalb die dielektrischen Messungen mit stark verfeinerter Methode wiederholt. Der Abfall von P_s am oberen Curiepunkt ist bei KH_2PO_4 nämlich ausserordentlich steil, so dass schon kleine Fehler in der Temperaturmessung einen grossen Einfluss auf den Term $\frac{dP_s^2}{dT}$ ausüben. Wir verwendeten daher einen Flüssigkeitsthermostaten, der im Temperaturintervall 100—300° K eine Temperaturkonstanz auf $\pm 1/100^0$ gewährleistete. Die Temperatur wurde vor jeder Messung mehrere Stunden stabilisiert. Die Hysteresisschleifen $P(E)$ wurden auf dem Leuchtschirm eines Kathodenstrahloszillographen photographiert. Während die bisherigen Messungen mit Wechselstrom der Frequenz 50 Hertz ausgeführt wurden, haben wir bei unseren Untersuchungen die Hysteresiskurven viel langsamer durchlaufen, nur mit einer Frequenz von 0,03 Hertz. Dadurch wird die Erwärmung des Kristalls infolge von Hysteresisverlusten, die der Frequenz proportional sind, reduziert und Fehler infolge Relaxationserschei-

¹⁾ W. BANTLE, *Helv. Phys. Acta* **15**, 373, 1942.

²⁾ G. BUSCH, *Helv. Phys. Acta* **11**, 269, 1938.

³⁾ G. BUSCH und E. GANZ, *Helv. Phys. Acta* **15**, 501, 1942.

nungen zwischen elektrischem Feld und Polarisation ausgeschaltet. Verschiedene Kristalle, die zum Teil aus verschiedener Zucht stammen, ergeben nur geringe Abweichungen in P_s von maximal

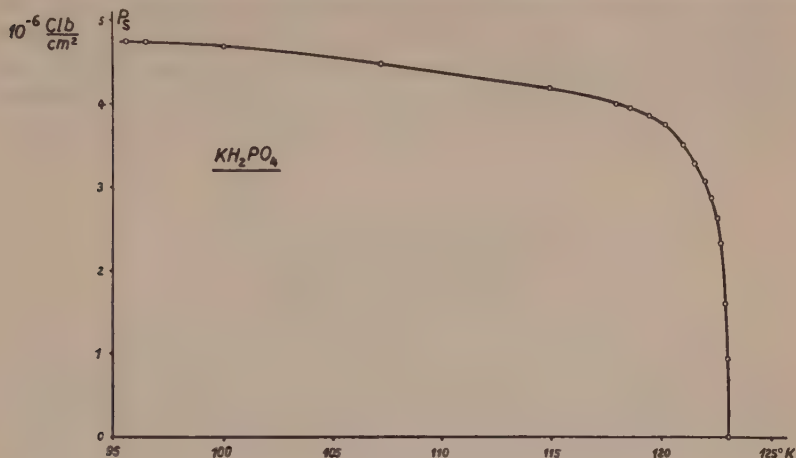


Fig. 1.

2%. Fig. 1 zeigt den Temperaturverlauf der spontanen Polarisation. Der Abfall am Curiepunkt ist wesentlich steiler als bei den früheren Messungen. In Fig. 2 ist die aus $P_s(T)$ berechnete

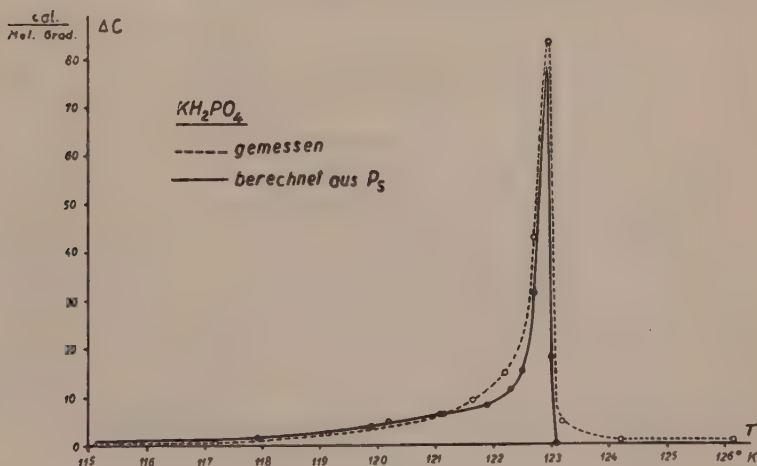


Fig. 2.

Anomalie der spezifischen Wärme und deren direkte kalorische Messung von BANTLE dargestellt. Die Übereinstimmung ist erstaunlich gut, wenn man bedenkt, dass die Kurven, die beide

differenzierte Messresultate darstellen, sehr empfindlich sind auf die kleinsten Messungenauigkeiten. Die Übereinstimmung ist sogar bedeutend besser als bei den Ferromagnetika. Die vorzügliche experimentelle Bestätigung der thermodynamischen Beziehung (1) ist ein Beweis dafür, dass nun die wirkliche spontane Sättigungspolarisation der Weiss-Bezirke gemessen wurde und zeigt zugleich, dass die Polarisation bei den Seignetteelektrika sich als Funktion von F/T allein darstellen lässt.

Elektrooptisches Verhalten von KH_2PO_4 - und KD_2PO_4 -Kristallen

von B. ZWICKER und P. SCHERRER (Zürich E.T.H.).

BANTLE, BUSCH, LAUTERBURG und SCHERRER¹⁾ haben in einer früheren Arbeit gezeigt, dass bei dem seignette-elektrischen KH_2PO_4 -Kristall am oberen Curiepunkt mit dem Auftreten der spontanen Polarisation auch eine starke Änderung der Doppelbrechung verknüpft ist. Diese zusätzliche Doppelbrechung verschwindet am unteren Curiepunkt nicht wieder, obwohl dort die Dielektrizitätskonstante stark absinkt. Dieser Befund spricht sehr stark dafür, dass am unteren Curiepunkt die spontane Polarisation nicht verschwindet, sondern nur durch „Einfrieren“ der Dipole unbeweglich wird. Es handelt sich hier also um den Übergang eines seignetteelektrischen in einen pyroelektrischen Kristall. Analoge Untersuchungen sind durchgeführt worden für „schweres“ KD_2PO_4 , in welchem der Wasserstoff durch Deuterium ersetzt war. Nach BANTLE²⁾ liegen die Curietemperaturen dieses Salzes rund 100° höher als diejenigen des leichten KH_2PO_4 ; die Messungen sind daher leichter auszuführen. Sie ergaben ähnliche Resultate.

Interessant ist das experimentelle Resultat, dass ein solcher Kristall unterhalb der Curietemperatur trotz des Vorhandenseins der spontan polarisierten Weissbezirke optisch einachsig bleibt. Richtet man jedoch mit Hilfe eines elektrischen Feldes die Polarisation aller Weissbezirke parallel, so wird allerdings das Indexellipsoid dreiaxig. Es wurden genaue Messungen des ganzen elektrooptischen Verhaltens in Funktion der angelegten Feldstärke und der Temperatur vorgenommen: Oberhalb des Curiepunktes fanden wir eine Doppelbrechungsänderung proportional dem angelegten Felde, wie sie nach POCKELS (Kristalloptik) zu

¹⁾ W. BANTLE, G. BUSCH, B. LAUTERBURG und P. SCHERRER, H.P.A. **15**, 324, 1942.

²⁾ W. BANTLE, Helv. Phys. Acta **15**, 373, 1942.

erwarten ist. Bei Zimmertemperatur ist der Effekt gerade noch messbar, wird mit sinkender Temperatur grösser und steigt un-mittelbar oberhalb des Curiepunktes sehr stark an.

Im Curiegebiet durchläuft die elektrische Doppelbrechung in Funktion der Feldstärke eine Hysteresisschleife. Dieselbe zeigt treppenförmigen Verlauf analog den Barkhausen-Sprüngen beim Ferro-Magnetismus und es folgt daraus, dass die Polarisation grosser Bezirke plötzlich umklappt.

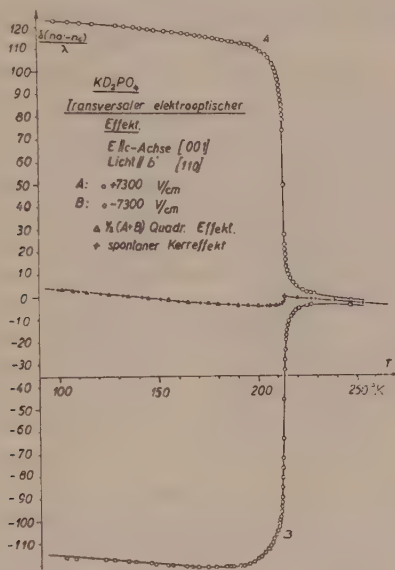


Fig. 1.

In Abbildung 1 ist eine Messung der Doppelbrechung bei konstanter Feldstärke und variabler Temperatur wiedergegeben. Die mittlere Kurve entspricht der Feldstärke $E_c = 0$. Sie kann interessanterweise als Mittel aus den beiden Messkurven A und B für $E_c = \pm 7500$ Volt/cm erhalten werden. Oberhalb der Curie-temperatur ist der Zusammenhang zwischen künstlicher Doppelbrechung und angelegter elektrischer Feldstärke linear, im Curiegebiet treten hingegen Sättigungserscheinungen auf.

Die Messungen ergeben, dass die elektro-optische Doppelbrechung genau proportional zur makroskopischen elektrischen Polarisation des Kristalles ist. Man kann daher aus dem elektro-optischen Effekt den genauen Verlauf der Dielektrizitätskonstante als Funktion von Feldstärke und Temperatur berechnen und erhält ausgezeichnete Übereinstimmung mit den direkten Messungen dieser

Grösse. Ebenso lässt sich aus den optischen Messungen der Temperaturverlauf der Sättigungspolarisation der Weissbezirke genau entnehmen und verwenden, um die Anomalie der spezifischen Wärme zu berechnen. Die Auswertung der optischen Messungen gibt eine völlige Übereinstimmung mit den kalorischen Messungen von BANTLE²⁾, und zwar für beide untersuchten Salze.

Beobachtungen über elektrische Elementarbezirke an Seignetteelektrika

von M. DE QUERVAIN und B. ZWICKER (Zürich E.T.H.).

Bei den Seignettelektrika beobachteten Hysteresisschleifen welche von der elektrischen Polarisation oder anderen direkt damit verknüpften Grössen in Funktion eines sehr langsamen Wechselfeldes durchlaufen wird, treten grosse Barkhausensprünge auf. Man muss sie in Analogie zu den Ferromagnetika auf das Vorhandensein elektrisch einheitlich polarisierter Elementarbezirke zurückführen. Die Grösse der Bezirke lässt sich aus der Zahl der Sprünge eines Astes der Schleife abschätzen, falls es zulässig ist, jedem Sprung einen Bezirk zuzuordnen. Man gelangt so zu Linearabmessungen von Millimetern.

Auch direkte Beobachtungen am Kristall deuten auf Bezirke von makroskopischer Grösse. Kühlt man nämlich einen KH_2PO_4 -Kristall unter die Curietemperatur ab, wird es plötzlich von einem System gerader, parallel zu den Prismenflächen der Wachstumsform verlaufender Risse durchzogen, die Blöcke gegeneinander abgrenzen, welche man direkt als Elementarbezirke ansprechen könnte. Beim Wiedererwärmen heilen diese Risse spurlos aus. Ferner fiel bei den interferometrischen Doppelbrechungsmessungen auf, dass die oberhalb des Curiepunktes im Gesichtsfeld des Instrumentes sichtbaren geraden Interferenzstreifen am Curiepunkt gleichzeitig mit ihrer Verschiebung Knicungen erfuhren. Der Kristall erleidet also innere Verdrehungen und Verwerfungen von Bereichen gegeneinander, die wieder in der Grössenordnung von Millimetern liegen. Diesen übereinstimmenden Beobachtungen steht aber die Tatsache entgegen, dass der freie Kristall (ohne Elektroden) im Zustand der spontanen Polarisation stets zu gleichen Volumteilen nach der positiven und negativen c -Richtung polarisiert erscheint, also die Gesamtpolarisation $P_+ + P_- = 0$ besitzt. Dies folgt aus der Übereinstimmung der Doppelbrechung des feldfrei abgekühlten Kristalls mit dem Mittelwert aus den beiden bei positivem und negativem Sättigungsfeld gemessenen Doppel-

brechungskurven. Eine Streuung verschiedener Messreihen, wie sie bei der Annahme makroskopischer Bezirke auftreten sollte, fehlt, so dass man auf Bezirke von weniger als 0,1 mm Linearabmessung schliessen muss.

Röntgenuntersuchungen an KH_2PO_4 und KD_2PO haben ebenfalls Beobachtungen über die Elementarbezirke geliefert. Reflexionen der Serie (h00)¹⁾, die nach der BRAGG'schen Methode mit Cu—K α -Strahlung an Einkristallen photographisch aufgenommen wurden, zeigen nämlich unterhalb des Curiepunktes eine eigenartige *Aufspaltung*. Es müssen demnach in den Flächen (100)

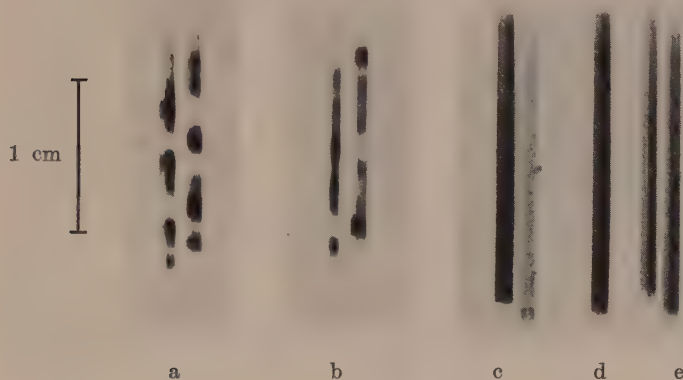


Fig. 1.

Fig. 1a und b: Reflexion (800) an KD_2PO_4 . Temperatur = 205° K.

Fig. 1c und d: Reflexion (800) an KH_2PO_4 bei einem elektrischen Feld von 2000 Volt/cm in der + bzw. - c-Richtung. Temperatur = 113° K.

Fig. 1e: Reflexion (800) an KH_2PO_4 vor Anlegen des Feldes.

Temperatur = 113° K.

(Das Cu-K Doublett ist in den Konturen der Linien bereits sichtbar.)

nebeneinander zweierlei Netzebenen mit etwas verschiedener Gitterkonstanten liegen. Zur Erklärung der Erscheinung muss erwähnt werden, dass sich die Symmetrie der Elementarzelle infolge der Polarisation von der tetragonalen Klasse D_{2d} zur rhombischen C_{2v} reduziert. Die Aufspaltung besagt nun, dass im Kristall Bereiche rhombischer Symmetrie auftreten, die in der c-Achse um 90° gegeneinander gedreht, bzw. in entgegengesetzter Richtung polarisiert sind. Ein ähnlicher Effekt ist von WEIGLE und SAINT²⁾ bei der bekannten Ammoniumumwandlung von NH_4Br

¹⁾ Die Indizes beziehen sich auf ein Koordinatensystem, das gegen das übliche um 45° gedreht ist.

²⁾ WEIGLE und SAINT, H.P.A. 9, 315, 1936.

festgestellt worden. Eine obere Grenze für die Grösse der Bereiche kann aus der Struktur der Linien geschätzt werden. Ein einzelner Bezirk trägt nämlich je nach seiner Orientierung nur zur einen oder anderen Linie etwas bei. Wenn also der spaltförmig ausgeblendete Primärstrahl nur auf wenige Bezirke von makroskopischer Grösse trifft, müssen die beiden aufgespaltenen Linien in ihrer Intensität alternieren und so ein Bild von den Abmessungen der Bezirke in der Längsrichtung des Spaltes ergeben.

Die beiden Aufnahmen 1a und 1b, welche vom gleichen Kristall stammen, zeigen den oben beschriebenen Effekt. Aus der Länge der Schwärzungszonen schliessen wir auf Bezirke von der Grösse bis zu 2 mm. Nach wiederholtem Erwärmen und Abkühlen erhalten die Linien jedesmal eine etwas andere Musterung. Die Methode besitzt ein begrenztes Auflösungsvermögen, so dass sich Bezirke von weniger als 0,1 mm Kantenlänge nicht mehr abzeichnen. Da in Fig. 1e wohl die Aufspaltung, nicht aber das Alternieren der Intensität festzustellen ist, muss man für KH_2PO_4 wohl solche Mikrobereiche als Elementarbezirke annehmen. Alle Effekte, die auf makroskopische Bezirke hinweisen, sind demnach einem übergeordneten Verband einheitlich polarisierter Elementarbezirke zuzuschreiben.

Die Aufnahmen *c* und *d* zeigen, wie mit einem elektrischen Feld die Polarisation gleichgerichtet werden kann. Die eine Linie wird auf Kosten der anderen verstärkt.

Dielektrisches Verhalten von Perjodaten

von P. BAERTSCHI (E. T. H. Zürich).

Im Kaliumphosphat, KH_2PO_4 , werden bekanntlich die Wasserstoffbindungen für das seignetteelektrische Verhalten verantwortlich gemacht. Von allen nicht isomorphen Stoffen steht dem KH_2PO_4 wohl das Ammoniumperjodat, $(\text{NH}_4)_2\text{H}_3\text{JO}_6$, strukturell am nächsten. Dem vierfach primitiven tetragonalen Anionengitter des KH_2PO_4 ¹⁾, aufgebaut aus PO_4 -Tetraedern, entspricht ein dreifach primitives, rhomboedrisches Gitter des $(\text{NH}_4)_2\text{H}_3\text{JO}_6$ ²⁾ mit JO_6 -Oktaedern als Baugruppen. In beiden Gittern bilden die Wasserstoffatome Hydrogenbindungen zwischen den kürzesten Sauerstoffabständen zweier Anionengruppen. Es war deshalb naheliegend, auch beim Ammoniumperjodat dielektrische Anomalien zu erwarten.

¹⁾ J. WEST, Z. Krist. **74**, 306, 1930.

²⁾ L. HELMHOLZ, Jour. Am. Chem. Soc. **59**, 2036, 1937.

Die beiden Strukturen zeigen aber diesbezüglich zwei wichtige Unterschiede: Im Gegensatz zum KH_2PO_4 ist $(\text{NH}_4)_2\text{H}_3\text{JO}_6$ zentrosymmetrisch gebaut. Piezoelektrisch bedingte Effekte sind also bei diesem Salz nicht zu erwarten. Ausserdem bilden hier die Hydrogenbindungen einen Winkel von 34° gegen die Horizontalebene, während er beim Kaliumphosphat nur 8° beträgt, was einer viel ausgeprägteren Richtungsanisotropie entspricht.

Dass Ammoniumperjodat eine Umwandlung bei -19° erleidet, die durch ein hohes Maximum der spezifischen Wärme gekennzeichnet ist, wurde schon von C. C. STEPHENSON³⁾ qualitativ festgestellt. Ähnlich verhielt sich auch das isomorphe Silberperjodat, $\text{Ag}_2\text{H}_3\text{JO}_6$, mit einer Umwandlungstemperatur von -46° . Diese Feststellung ist deshalb wichtig, weil sie eine Ammoniumumwandlung als Grund für das Anwachsen der spezifischen Wärme ausschliesst. STEPHENSON vermutete deshalb zunächst in den Umwandlungspunkten der beiden Substanzen seignetteelektrische Curietemperaturen. Wie die nachfolgenden Untersuchungen zeigen, ist dies aber nicht der Fall.

Der Temperaturverlauf der DK wurde an Einkristall-Kondensatoren von Ammoniumperjodat nach beiden Hauptrichtungen, also parallel und senkrecht zur c -Achse verfolgt. Auf die Zucht grösserer Einkristalle, die unter Berücksichtigung gewisser Vorsichtsmassnahmen erfolgte, kann hier nicht näher eingegangen werden. Die Messungen wurden in einem Thermostaten mit einer Kapazitätsmessbrücke ausgeführt.

In Fig. 1 ist der Temperaturverlauf der DK wiedergegeben. Die Messungen in Richtung der c -Achse (stark ausgezogene Kurve) ergaben fast den gleichen Verlauf wie diejenigen in der dazu senkrechten Richtung, die Anisotropie ist also sehr gering. Bei gewöhnlicher Temperatur zeigt der Kristall eine anomal hohe Polarisierbarkeit mit einer DK von nahezu 180. Diese fällt im Temperaturgebiet um -20° steil ab und hat bei -180° noch ungefähr den Wert 10.

Die spezifische Leitfähigkeit, bei Zimmertemperatur von der Grössenordnung $10^8 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ fällt ähnlich ab wie die D.K. Der Charakter der Kurven ist typisch der einer Umwandlung zweiter Art. Eine Temperaturhysteresis der DK konnte einstweilen, bei einer Messgenauigkeit auf $1/5^0$, nicht festgestellt werden.

Die gestrichelte Kurve in Fig. 1 gibt eine vorläufige Messung an gepresstem $\text{Ag}_2\text{H}_3\text{JO}_6$ -Pulver wieder. Die Zucht genügend grosser Kristalle war hier, der Schwerlöslichkeit des Salzes wegen,

³⁾ C. C. STEPHENSON, Jour. chem. phys. **9**, 379, 1941.

noch nicht möglich. Immerhin zeigt die ebenfalls sehr stark polarisierbare Substanz einen DK-Abfall, der, in Übereinstimmung mit dem Befund von STEPHENSON im Temperaturgebiet um -45° am steilsten verläuft.

Das stöchiometrisch analog zusammengesetzte, strukturell aber noch unbekannte Natriumperjodat, $\text{Na}_2\text{H}_3\text{JO}_4$ hat als Pulver gemessen auch eine DK von der Grössenordnung 50. Ihr Abfall mit sinkender Temperatur ist aber so flach, dass eine eigentliche Umwandlungstemperatur zweifelhaft ist.

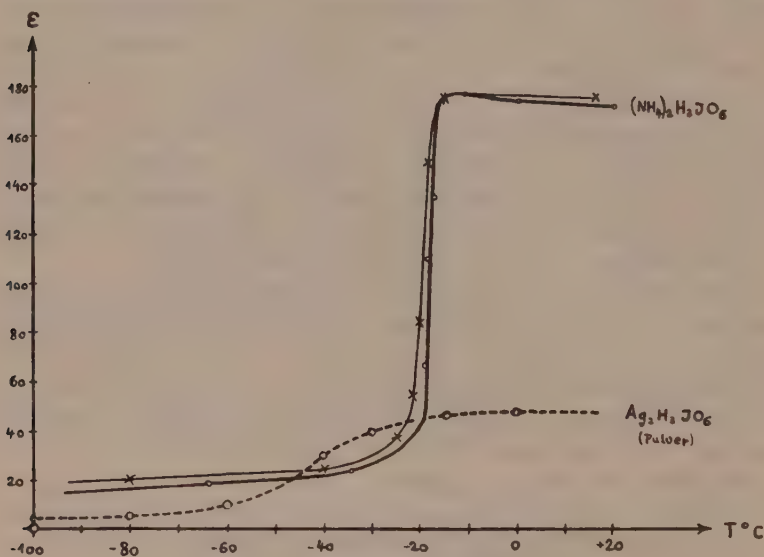


Fig. 1.

Die neutralen Perjodate vom Typus MeJO_4 haben, wie zu erwarten, kleine Dielektrizitätskonstanten. Die anomale Polarisierbarkeit ist also auf die sauren Trihydrogenperjodate beschränkt.

An Ammoniumperjodat wurde ferner die Feldabhängigkeit der Polarisation mit der Braunschen Röhre verfolgt. Bis zur Durchschlagsspannung, d. h. einer Feldstärke von 40000 Volt/cm war die Charakteristik linear und zeigte keine Anzeichen von Sättigung. Interessant ist dabei, dass für diese maximale Feldstärke die Polarisation von 1800elst. E/cm² schon doppelt so gross ist als der Sättigungswert für Seignettesalz; ohne dass eine Dipolausrichtung d. h. eine Zerstörung der Zentrosymmetrie erfolgt.

Über die strukturellen Veränderungen bei der Umwandlung lassen sich bis jetzt nur einige qualitative Aussagen machen.

Laueaufnahmen unter- und oberhalb des DK-Sprunges lassen eine geringe Gitteraufweitung beim Übergang in den Zustand hoher Polarisierbarkeit erkennen. Mit ihr verschwinden auch gewisse Interferenzen, was dem Auftreten eines neuen Gitterparameters entsprechen würde. Die Symmetrie bleibt absolut dieselbe. Insbesondere wird das Gitter bei tiefen Temperaturen nicht azentrisch, was aus dem Fehlen piezoelektrischer Resonanzschwingungen geschlossen werden darf.

Zur Aufklärung des Umwandlungsmechanismus werden die Untersuchungen an den Trihydrogenperjodaten fortgesetzt.

Der Kaskadengenerator als stabilisierte Spannungsquelle

VON H. GREINACHER (Bern).

Der Kaskadengenerator liefert eine konstante Gleichspannung in einem vielfachen Betrage des Scheitelwertes der Eingangswechselspannung. Das Übersetzungsverhältnis ist gleich der Zahl der verwendeten Kondensatoren bzw. Ventile. Stabilisierte Spannung erhält man, wenn man für konstante Scheitelspannung sorgt. Dies geschieht durch Verwendung einer Batteriespannung, die man periodisch umpolt. Die Spannungsverhältnisse wurden im einzelnen untersucht: 1. An einem Modell mit doppelt wirkender 6fach-Schaltung (Verzwölfachung), ausgeführt mit Selen-Ventilen, 2. An einem Modell mit 5fach-Schaltung und Elektronenventilen. Letzteres entsprach weitgehend dem Idealfall eines verlustfrei arbeitenden Generators und ergab dementsprechend völlig konstante Gleichspannung mit dem theoretisch zu erwartenden Übersetzungsverhältnis. Bei Modell 1 war eine gewisse Welligkeit der Endspannung vorhanden. Trotzdem lässt sich schon ein solcher Generator zum Betriebe von Zählrohren und dergleichen verwenden.

Da die Vervielfachung im Kaskadengenerator additiv erfolgt, ist sie, wenn man nicht sehr viele Stufen verwendet, nicht sehr hoch. Sie kann aber bei einer gegebenen Zahl von Kondensatoren und Ventilen wesentlich erhöht werden, indem man diese in eine Reihe von kleinen Kaskaden aufteilt, und letztere unter Zwischenschaltung je eines rotierenden Kommutators hintereinander schaltet. Werden mit m Kondensatoren bzw. m Ventilen a Kaskaden mit je b Kondensatoren hergestellt, so ergibt sich für die Vervielfachung $v = b^a$, während die gegebene feste Zahl $m = ab$ beträgt. v ist maximal, wenn $b = e$. Dann ist $v_{\max} = (e^{1/e})^m$. Der nächstliegende ganzzahlige Wert von b ist 3. Teilt man z. B.

12 Kondensatoren in 4 Kaskaden auf, so erhält man $v = 81$, während dies bei *einer* Kaskade nur 12 ergeben würde. Da die Welligkeit bei doppelt wirkender Kaskade wesentlich geringer ist, so wird man für die erste Stufe etwa eine doppelt wirkende 2fach-Schaltung (Vervielfachung) wählen und hieran dann Dreierkaskaden anschliessen. Man würde so mit 13 Kondensatoren eine Vervielfachung von 108 erzielen.

Bemerkung: Die Arbeit erscheint ausführlich in den HPA.

Zur Theorie der Mesonfelder mit starker Kopplung an Nucleonen

von G. WENTZEL (Zürich).

Da die amerikanischen Arbeiten über nichtskalare Felder infolge des Krieges hier so gut wie unbekannt geblieben sind¹⁾, möchte ich einige Ergebnisse eigener Rechnungen mitteilen, die sich auf pseudoskalare und vektorielle Felder und auf Mischungen dieser Feldtypen beziehen. Zur Charakterisierung der zugrundegelegten Annahmen sei der Wechselwirkungsterm der Hamiltonfunktion angegeben:

Neutrales Feld:

$$(1\ n) \quad H' = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \int dx \delta_a(x) \left\{ g_{PS} \frac{\partial \psi^{PS}}{\partial x_i} + g_V \text{rot}_i \vec{\psi}^V \right\} \equiv (\vec{\sigma} \cdot \vec{q}),$$

Symmetrische Theorie:

$$(1\ s) \quad H' = \sum_{i=1}^3 \sum_{e=1}^3 \sigma_i \tau_e \int dx \delta_a(x) \left\{ g_{PS} \frac{\partial \psi_e^{PS}}{\partial x_i} + g_V \text{rot}_i \vec{\psi}_e^V \right\} \equiv \sum_{ie} \sigma_i \tau_e q_{ie}$$

(σ_i, τ_e = Spin- und isotope Spinmatrizen, δ_a = Formfunktion des Nucleons, $\int dx \delta_a(x) = 1$). Der Protonradius a , der nach dem Vorgang von OPPENHEIMER und SCHWINGER durch

$$\frac{1}{a} = \int dx \int dx' \frac{\delta_a(x) \delta_a(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

definiert wird, soll klein gegen die Meson-Comptonwellenlängen sein: $a \mu_{PS} \ll 1$ und $a \mu_V \ll 1$. \hbar und c werden = 1 gesetzt. Das Näherungsverfahren für „starke Kopplung“ (Entwicklung nach

¹⁾ Vorläufige Mitteilungen: OPPENHEIMER und SCHWINGER, Phys. Rev. **60**, S. 150, 1941; DANCOFF und PAULI, DANCOFF und SERBER, Bull. Amer. Phys. Soc. **16**, 7, Noten Nr. 7 und 43. Amerikanische Veröffentlichungen seit Mai 1942 sind zurzeit in der Schweiz nicht erhältlich.

fallenden Potenzen der Kopplungsparameter)²⁾ erweist sich als durchführbar, wenn

$$g \equiv \sqrt{|g_{PS}|^2 + 2|g_V|^2} \gg a^3. \quad (2)$$

Die Ergebnisse sind folgende:

1. *Energie der Proton-Isobaren* (d. h. der Nucleon-Zustände, die durch Bindung von Mesonen an das Proton-Neutron entstehen): Die betreffende Hamiltonfunktion H^I ist diejenige eines Kugelkreisels. In der symmetrischen Theorie (Ansatz (1 s)) kann man 3 Euler'sche Winkel $\Theta \Phi \Psi$ als Feldvariable einführen⁴⁾ und erhält dann:

$$H^I = \varepsilon \left\{ \frac{1}{\sin \Theta} p_\Theta \sin \Theta p_\Theta + \frac{1}{\sin^2 \Theta} (p_\Phi^2 - 2 p_\Phi p_\Psi \cos \Theta + p_\Psi^2) \right\}; \quad (3)$$

dabei sind p_Φ und p_Ψ halbzahlig gequantelt, und es bedeutet p_Φ eine Spinkomponente und $p_\Psi + \frac{1}{2}$ die Ladung des Nucleonzustandes. Die Konstante ε hat den Wert $3 \pi a g^{-2}$. Die Eigenwerte von H^I sind:

$$H_j^I = \varepsilon \cdot j(j+1), \text{ wo } j \text{ halbzahlig und } j \geq |p_\Phi|, j \geq |p_\Psi|;^3) \quad (4)$$

j ist die Quantenzahl des Gesamt-Spinmoments des Nucleons. Im Falle des neutralen Feldes ist das Ergebnis das gleiche, nur ist $\varepsilon = 6 \pi a g^{-2}$ und p_Ψ ist auf die Werte $\pm \frac{1}{2}$ beschränkt⁵⁾; in der

²⁾ Vgl. G. WENTZEL, *Helv. Phys. Acta* **13**, S. 269, 1940 und **14**, S. 633, 1941.

³⁾ Für den Fall der symmetrischen Pseudoskalartheorie wurde mir dies bereits von Herrn W. PAULI in einem Brief vom 20. Juli 1942 mitgeteilt.

⁴⁾ Dazu gelangt man wie folgt: Ein wichtiger Schritt besteht immer darin, die Matrix H' auf Diagonalform zu transformieren. In der symmetrischen Theorie gelingt dies, indem man in (1 s) die neun Grössen $q_{i\varrho}$ durch neun neue Variable $r_1 r_2 r_3 \vartheta \varphi \psi \vartheta' \varphi' \psi'$ darstellt:

$$q_{i\varrho} = \sum_{n=1}^3 r_n s_{ni} (\vartheta \varphi \psi) s_{n\varrho} (\vartheta' \varphi' \psi'),$$

wo s_{ni} die neun Koeffizienten einer orthogonalen Transformation sind, dargestellt durch drei Euler'sche Winkel. Mit

$$\sum_i \sigma_i s_{ni} (\vartheta \varphi \psi) = A^* \sigma_n A, \quad \sum_{\varrho} \tau_{\varrho} s_{n\varrho} (\vartheta' \varphi' \psi') = B^* \tau_n B$$

(A, B unitär) wird

$$H' = (AB)^* \sum_n r_n \sigma_n \tau_n (AB),$$

wo die Matrizen $\sigma_1 \tau_1, \sigma_2 \tau_2, \sigma_3 \tau_3$ leicht simultan diagonal gemacht werden können. Die Euler'schen Winkel $\Theta \Phi \Psi$ in (3) sind dann durch die zusammengesetzte Drehung

$$\sum_n s_{ni} (\vartheta \varphi \psi) s_{n\varrho} (\vartheta' \varphi' \psi') = s_{i\varrho} (\Theta \Phi \Psi)$$

zu definieren. Von kleinen Oszillationen abgesehen ist nämlich $r_1 = r_2 = r_3 = \text{const.}$, also

$$q_{i\varrho} = \text{const. } s_{i\varrho} (\Theta \Phi \Psi) + \dots$$

Tat können ja Isobare höherer Ladung in diesem Fall nicht entstehen.

2. *Statische Kernkräfte.* Bei schwacher Kopplung ergibt bekanntlich die Störungsmethode für das statische Potential zweier Nucleonen (1) und (2), bei Zugrundelegung der Kopplungsansätze (1 *n*) bzw. (1 *s*):

$$(5\ n) \quad V = \sum_{ik} \sigma_i^{(1)} \sigma_k^{(2)} U_{ik} \quad \text{bzw.} \quad (5\ s) \quad V = \sum_{ik\varrho} (\sigma_i^{(1)} \tau_\varrho^{(1)}) (\sigma_k^{(2)} \tau_\varrho^{(2)}) U_{ik},$$

$$\text{wo } U_{ik} = |g_{PS}|^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \frac{e^{-u_{PS}r}}{4\pi r} + |g_V|^2 \left(\delta_{ik} \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \right) \frac{e^{-\mu_V r}}{4\pi r}.$$

Bei starker Kopplung treten die gleichen Ortsfunktionen U_{ik} auf (sofern $r \gg a$); nur ist

in (5 *n*) $\{\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \sigma_3^{(n)}\}$ durch $\{\sin \Theta^{(n)} \cos \Phi^{(n)}, \sin \Theta^{(n)} \sin \Phi^{(n)}, \cos \Theta^{(n)}\}$,

in (5 *s*) $(\sigma_i^{(n)} \tau_\varrho^{(n)})$ durch $s_{i\varrho}^{(n)} \Theta^{(n)} \Phi^{(n)} \Psi^{(n)}$

zu ersetzen (bezüglich der Bedeutung von $s_{i\varrho}$ vgl. die Fussnote 4). Diese neuen Austauschoperatoren sind insofern allgemeiner, als sie auch Übergänge in die höheren Isobarenzustände darstellen; bezüglich der tiefsten Zustände (normale Proton- und Neutron-Zustände, $j = \frac{1}{2}$) stimmen aber ihre Matrixelemente mit denjenigen der Operatoren in (5 *n* bzw. 5 *s*) bis auf einen Zahlfaktor $1/9$ überein⁶⁾.

3. *Streuung von Mesonen an ruhenden Nucleonen.* Vorausgesetzt, dass der Impuls des Mesons klein gegen a^{-1} und seine kinetische Energie gross gegen ε (vgl. (4)) ist, wird der Streuquerschnitt:

$$dQ = d\Omega \cdot a^2 \beta^4 f(\vartheta),$$

wo βc die Mesongeschwindigkeit und $f(\vartheta)$ eine Funktion des Streuwinkels ϑ ist; im Mittel über alle Spin- und Ladungszustände der Stosspartner wird z. B. in der Pseudoskalartheorie, bei neutralem Feld ((1 *n*) mit $g_V = 0$):

$$f(\vartheta) = \frac{3}{5} (1 + 7 \cos^2 \vartheta),$$

in der symmetrischen Pseudoskalartheorie ((1 *s*) mit $g_V = 0$):

$$f(\vartheta) = \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \vartheta)^6,$$

und in der symmetrischen Vektorthorie ((1 *s*) mit $g_{PS} = 0$):

$$f(\vartheta) = \frac{8}{15} (5 + \cos^2 \vartheta).$$

⁵⁾ Θ, Φ sind hier die Polarwinkel des Vektors \vec{q} in (1 *n*).

⁶⁾ Auch dies wurde mir schon von Herrn PAULI mitgeteilt (s. Fussnote 3).

Über die mit komplexen Betastrahlspektren zusammenhängende Gammastrahlung

E. STAHEL (Biel) und H. DANCOT (Brüssel).

(Vorläufige Mitteilung.)

Nach Sargent ist das Betaspektrum des *AcB* komplex. Es enthält neben der Hauptkomponente von 1,40 MeV eine 0,5 MeV Gruppe. Ausserdem ist bekannt, dass *AcB* eine Gammastrahlung von 0,830 MeV und zwei Komponenten von 0,404 und 0,426 MeV aussendet, die mit dem komplexen Betaspektrum verknüpft sein wird. Über die quantitativen Verhältnisse sind nur unsichere Angaben vorhanden.

Eigene Versuche, über die ausführlich in den *Helvetica Physica Acta* später berichtet werden soll, haben folgendes ergeben:

1. Etwa 8% der zerfallenden *AcB*-Atome gehen in einen angeregten (0,83 MeV) Zustand des *AcC* über. Die Hälfte dieser angeregten *AcC*-Atome geht direkt, die andere Hälfte durch die Kaskade (0,404 + 0,426) MeV in den Grundzustand unter Aussendung der entsprechenden Gammastrahlung über.

2. Die Betakomponente geringer Energie des *AcB* ist wesentlich schwächer als Sargent angibt. Ihre Intensität stimmt innerhalb der ziemlich weiten Fehlergrenze mit der Intensität der obigen Gammastrahlung überein.

Über den β -Zerfall des RaA und die Entstehung des Elementes 85

VON H. LABHART und H. MEDICUS (E.T.H. Zürich).

Das hohe Neutronen-Protonen-Verhältnis bei RaA lässt vermuten, dass dieses Element ausser der bekannten α -Aktivität auch β -Aktivität zeigen könnte. Überlegungen von TURNER¹⁾ machen es wahrscheinlich, dass das Verzweigungsverhältnis in der Grössenordnung von 0,5% liegt, d. h. dass auf je 1000 α -Teilchen 5 β -Teilchen emittiert werden sollten. MINDER²⁾ stellte Versuche an, um den β -Zerfall von RaA und das daraus entstehende Isotop 218 des Elementes 85 nachzuweisen. Aus seinen Messungen des Anstiegs der β -Aktivität der aus Ra-Emanation entstehenden Folgeprodukte schloss er auf das Vorhandensein einer intensiven β -Strahlung des RaA, und zwar bestimmte er das Verzweigungsverhältnis β/α zu 15%.

Wir erhielten bei eigenen Messungen des Anstieges der β -Aktivität aus reiner Radium-Emanation, welche mit Zählrohren statt mit der Ionisationskammer durchgeführt wurden, negative

¹⁾ TURNER, Phys. Rev. **57**, 950, 1940.

²⁾ MINDER, H.P.A. **13**, 144, 1940.

Resultate: Unter Berücksichtigung der Messfehler liess sich ein Verzweungsverhältnis über 2% mit Sicherheit ausschliessen. Zu demselben Resultat kamen KARLIK und BERNERT¹⁾, die ebenfalls die Versuche von MINDER wiederholten.

Um eine β -Verzweigung in der geringen von TURNER vorausgesagten Grössenordnung nachweisen zu können, war es nötig, eine empfindlichere Methode zu entwickeln: Da bei einer Messung des Anstieges der gesamten β -Strahlung des aktiven Niederschlages die interessierende β -Strahlung des RaA nur einen verschwindenden Bruchteil ausmacht, versuchten wir die β -Strahlung des RaA zur Zeit $t = 0$ direkt zu bestimmen, bevor sich die Strahlung der Folgeprodukte störend bemerkbar machte. Aus besonders gereinigter Emanation wurde in wenigen Sekunden reines RaA auf einen Träger niedergeschlagen und mit Hilfe von schnell arbeitenden Zählern unter photographischer Registrierung die β -Aktivität von der 6. Sekunde an eine halbe Minute lang bestimmt.

Emittiert RaA keine β -Teilchen, so entspricht der zeitliche Anstieg der β -Aktivität nahezu einer Geraden, *die durch den Nullpunkt geht*, weil ja zur Zeit $t = 0$ noch kein β -strahlendes RaB vorhanden ist. Weist aber RaA selbst β -Strahlung auf, so besteht schon zur Zeit $t = 0$ eine β -Aktivität, welche durch Extrapolation der Messkurve nach $t = 0$ erhalten werden kann.

Mehrfache Messreihen zeigen innerhalb der Fehlergrenzen absolut keine Andeutung einer β -Aktivität des RaA. Unter rechnerischer Berücksichtigung der Messfehler ergibt sich, dass eine eventuelle Verzweigung bei RaA kleiner als 0,35% sein muss. In diese Rechnung geht die Härte der β -Strahlung ein, welche hier ausserordentlich ungünstig eingesetzt wurde. Wenn die β -Strahlung dieselbe Energie wie diejenige des RaB aufweisen würde, dann könnte ein Verzweungsverhältnis kleiner als 0,8 ‰ garantiert werden.

So bleibt also die Entstehung des Isotops 218 des Elementes 85 noch immer eine offene Frage, und es ist nur das aus Wismuth künstlich hergestellte²⁾ Isotop 211 des Elementes 85 mit Sicherheit bekannt.

Kernphotoeffekte mit der Lithium γ -Strahlung an Titan, Nickel und Kupfer

von O. HUBER, O. LIENHARD und H. WÄFFLER (E.T.H. Zürich).

In einer früheren Arbeit³⁾ ist über den Kernphotoeffekt beim Bestrahlen verschiedener Elemente mit der Lithium- γ Strahlung

¹⁾ KARLIK und BERNERT, Naturwiss. **30**, 685, 1942.

²⁾ CORSON, MAC KENZIE and SEGRÉ, Phys. Rev. **58**, 672, 1940.

³⁾ O. HUBER, O. LIENHARD, P. SCHERRER und H. WÄFFLER, Helv. Phys. Acta **16**, 33, 1943.

berichtet worden. Durch weitere Messungen an Titan, Nickel und Kupfer konnten drei neue Kernphotoeffekte gefunden werden. Die zur Erzeugung der γ -Strahlen verwendete Hochspannungsanlage sowie die angewandte Messmethode sind dieselben geblieben.

Die Bestrahlung von *Titan* (als Ti und TiO_2) erzeugte eine Aktivität mit einer Halbwertszeit von $3,0 \pm 0,3$ h. Nun ist von ALLEN, POOL, KURBATOW und QUILL¹⁾ auf ganz anderem Wege ein radioaktives Titanisotop, das Ti^{45} mit einer Halbwertszeit von $3,08 \pm 0,06$ h hergestellt worden. Unsere gemessene Halbwertszeit, welche durch γ -Strahlen in Titan induziert wurde, stimmt innerhalb der Fehlergrenzen mit der für das Ti^{45} gefundenen überein. Daraus muss geschlossen werden, dass die von uns beobachtete Aktivität durch Kernphotoeffekt am stabilen Ti^{46} herrührt.

Nach 8-stündiger Bestrahlung von *Nickel* konnte die darin hervorgerufene Aktivität während 84 Stunden verfolgt werden. Die Auswertung der Zerfallskurve ergab eine Halbwertszeit von $36,9 \pm 1,5$ h. Da aber nach anderen Autoren²⁾ dem Ni^{57} eine Halbwertszeit von 36 ± 2 h zugeordnet wird, stammt die durch γ -Strahlen in Nickel induzierte Aktivität aus dem Prozess $\text{Ni}^{58} (\gamma - n) \text{Ni}^{57}$. Es wird also auch am stabilen Nickel-Isotop Ni^{58} durch die Lithium- γ -Strahlen ein Neutron abgespalten.

Beim Bestrahlen von *Kupfer* trat eine Aktivität auf, welche in eine $10,5 \pm 0,25$ min Periode und eine solche von $11,9 \pm 1$ h zerlegt werden konnte. Die 10,5 min. Periode wurde von BOTHE und GENTNER³⁾ bei der Entdeckung des Kernphotoeffektes mit der Lithium- γ -Strahlung gefunden und wird dem Cu^{62} zugeordnet. Die bei uns überdies an Kupfer auftretende $11,9 \pm 1$ h Periode ordnen wir dem Cu^{64} zu, für dessen Halbwertszeit andere Autoren $12,8 \pm 0,3$ h gefunden haben. Somit entsteht das Cu^{64} ebenfalls durch Kernphotoeffekt aus dem stabilen Cu^{65} .

Die Messresultate sind aus der folgenden Tabelle ersichtlich. In der Kolonne Halbwertszeit sind unter „Literaturwert“ die Ergebnisse anderer Autoren für dieselben, aber durch andere Reaktionen hergestellten Isotopen angeführt. (MATTAUCH und FLÜGGE²⁾). In der letzten Kolonne sind noch die von uns gefundenen relativen Ausbeuten für den Kernphotoeffekt ange-

1) ALLEN, POOL, KURBATOW and QUILL, Phys. Rev. **60**, 425, 1941.

2) Siehe J. MATTAUCH und S. FLÜGGE, Kernphys. Tabellen. Berlin 1942.

3) W. BOTHE und W. GENTNER, Z. Phys. **106**, 236, 1937.

geben. Dabei wird die Ausbeute des γ, n -Prozesses an Cu^{63} willkürlich gleich 100 gesetzt.

Ausgangsisotop mit rel. Häufigkeit	End- kern	Halbwertszeit		rel. Ausbeute
		unser Ergebnis	Literaturwert	
$^{22}\text{Ti}^{40}$ 7,95%	Ti^{45}	$3,0 \pm 0,3 \text{ h}$	$3,08 \pm 0,06 \text{ h}$	$7,2 \pm 1$
$^{28}\text{Ni}^{58}$ 67,4%	Ni^{57}	$36,9 \pm 1,5 \text{ h}$	$36 \pm 2 \text{ h}$	$3,8 \pm 0,7$
$^{28}\text{Cu}^{65}$ 32 %	Cu^{64}	$11,9 \pm 1 \text{ h}$	$12,8 \pm 0,3 \text{ h}$	$2,2 \pm 0,4$
$^{29}\text{Cu}^{63}$ 68 %	Cu^{62}	$10,5 \pm 0,25 \text{ m}$	$9,92 \pm 0,05 \text{ m}$ $10,5 \pm 0,5 \text{ m}$	100 (B & G)

Anregung isomerer Zustände durch Kernphotoeffekt

VON O. HUBER, O. LIENHARD, P. SCHERRER und H. WÄFFLER (E.T.H. Zürich).

Die Nachweismöglichkeit des (γ, n) -Prozesses beschränkt sich im allgemeinen auf solche Reaktionen, die auf einen radioaktiven Restkern führen. Eine Ausnahme bilden diejenigen stabilen Restkerne, welche einen *metastabilen Anregungszustand* besitzen. In diesem Fall gehen nämlich die umgewandelten Kerne, welche nach dem Austritt des Neutrons angeregt zurückbleiben, sowohl direkt, als auch unter Durchlaufen des metastabilen Zustandes in den Grundzustand über. Bei den letzteren beobachtet man also eine Aktivität, die dem Übergang aus dem metastabilen in den Grundzustand entspricht.

Von zahlreichen mit der Lithium-Gammastrahlung (Quantenenergie $\sim 17 \text{ MeV}$) bestrahlten Elementen zeigen Strontium und Cadmium eine Aktivität, welche wir einem isomeren Übergang zu schreiben müssen. Die Abfallskurve des von uns durch einen (γ, n) -Prozess hergestellten Strontiums besitzt eine Halbwertszeit von 168 min. Diese Periode wurde von REDDEMANN¹⁾ als zu einem isomeren Übergang des stabilen Sr^{87} gehörend, nachgewiesen. Im Falle des Kernphotoeffekts liegt also der Prozess $\text{Sr}^{88} (\gamma, n) \text{Sr}^{87*}$ vor.

Die in Cadmium durch (γ, n) -Prozess induzierte Aktivität hat eine Halbwertszeit von 55 min. Die gleiche Periode wurde von DODÉ und PONTECORVO²⁾ an Cadmium bei Bestrahlung mit $\text{Ra} + \text{Be}$ -Neutronen als (n, n) -Prozess, sowie von FELDMEIER und COL-

¹⁾ H. REDDEMANN, Zs. Phys. **116**, 137, 1940.

²⁾ M. DODÉ und B. PONTECORVO, C. R. **207**, 287, 1938.

LINS¹⁾ mit Röntgenstrahlen als (γ, γ) -Prozess erhalten. Aus der Art dieser Entstehungsprozesse folgt, dass hier ein isomeres Übergang eines stabilen Cadmiumisotops vorliegt. Die Zuordnung der Isomerie zu einem bestimmten Isotop konnte auf Grund der bisherigen Versuche jedoch noch nicht erfolgen. Der Kernphotoeffekt bietet nun die Möglichkeit, die Zahl der in Frage stehenden Isotope auf vier einzuschränken. Der im (γ, n) -Prozess entstehende metastabile Kern muss nämlich aus einem ebenfalls stabilen Kern mit um eins höherer Massenzahl hervorgehen. Da die Cd-Isotope die Massenzahlen 106, 108, 110, 111, 112, 113, 114, 116 aufweisen, so muss der isomere Zustand einem der Isotope Cd¹¹⁰, Cd¹¹¹, Cd¹¹² oder Cd¹¹³ zukommen.

Die Zerfallskonstante des ThC' ²⁾

VON H. BRADT und P. SCHERRER (E.T.H. Zürich).

Die Halbwertszeit des Alphastrahlers ThC', die von GAMOW auf 10^{-7} sec geschätzt worden ist, wurde nach dem Vorgange von DUNWORTH mit Hilfe der Koinzidenzmethode bestimmt. Es wurden für verschiedene Werte des Auflösungsvermögens τ der Koinzidenzmischung im Bereiche 10^{-7} — 10^{-6} sec Zählrohrkoinzidenzen zwischen den ThC- β -Strahlen und den ThC'- α -Strahlen registriert. Die (β, α) -Koinzidenzrate ist abhängig vom Auflösungsvermögen τ und vom mittleren Zeitintervall zwischen der β -Emission des ThC und der darauf folgenden α -Emission des ThC', d. h. von der Zerfallskonstanten λ . Diese Abhängigkeit ist unter Berücksichtigung der zeitlichen Verzögerung zwischen dem Durchgang des ionisierenden Teilchens und dem Entladungsaufbau im Zählrohr rechnerisch ermittelt worden. Die experimentell bestimmte Abhängigkeit der Koinzidenzrate vom Auflösungsvermögen bestätigt diese Rechnung und ergibt für die als Parameter eingehende Zerfallskonstante des ThC' den Wert

$$\lambda = (2,7 \pm 0,4) \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1},$$

oder für die Halbwertszeit

$$T = (2,6 \pm 0,4) \cdot 10^{-7} \text{ sec.}$$

¹⁾ J. R. FELDMEIER und G. B. COLLINS, Phys. Rev. **59**, 937, 1941.

²⁾ Ein ausführlicher Bericht erscheint in dieser Zeitschrift.

Über den Begriff des Atoms. III.

von Willy Scherrer.

(22. IV. 1943.)

Teil II¹⁾ war fast ausschliesslich einer Analyse der kräftefreien Wellengleichung

$$\square u \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = -a^2 u \quad (1)$$

mit

$$a = \frac{m_0 c}{\hbar} \quad (2)$$

im Sinne der in § 1 und 2 von Teil I²⁾ geschilderten Welpunkt-dynamik gewidmet. Es handelte sich also um eine Beschreibung der Trägheitsbewegung eines Elementarteilchens im Rahmen der relativistischen Wellenmechanik. Diese Beschreibung weicht aber insofern prinzipiell von der üblichen Behandlung ab, als das Verbot der Überlichtgeschwindigkeit in Gestalt einer Randbedingung in die Prämissen aufgenommen wurde.

In präziser Fassung lag folgende Aufgabe vor, die wir inskünftig als *Einpunktproblem* bezeichnen wollen: Von einem Elementarteilchen sei bekannt, dass es an der Weltstelle

$$Q_1 \sim (ct, x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0)$$

in Erscheinung trete. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen an irgend einer mit dem Verbot der Überlichtgeschwindigkeit verträglichen Weltstelle Q , also irgendwo im Nachkegel (Zukunftskegel) oder Vorkegel (Vergangenheitskegel) von Q_1 anzutreffen?

Bei Zugrundelegung der Gleichung (1) besteht die sinngemässe Behandlung der Aufgabe darin, dass man Vor- und Nachkegel als Grundgebiet erklärt und die in diesem Gebiet eindeutigen und so-

¹⁾ Helv. Phys. Acta, XV, 5, 476 (1942).

²⁾ Helv. Phys. Acta, XV, 1, 53 (1942).

weit als möglich stetigen und beschränkten Lösungen von (1) ermittelt. Als Mass der Wahrscheinlichkeit wählen wir das Integral

$$W = \int \int \int \int_{\mathfrak{G}} u^2 d(ct) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (3)$$

Dasselbe soll uns im Mittel die Zahl derjenigen Weltstellen liefern, welche von unserem Teilchen innerhalb des Weltgebietes \mathfrak{G} eingenommen werden. Es handelt sich also nicht um die Definition einer Wahrscheinlichkeit a priori, sondern um einen Versuch, das Integral (3) als empirische Wahrscheinlichkeit zu deuten. Die Funktion u stellt daher nicht einen konkreten Einzelfall dar, sondern das mittlere Verhalten sehr vieler und voneinander vollständig unabhängiger Teilchen, die denselben Konkurrenzbedingungen unterliegen.

Ersetzen wir nun in (3) das Gebiet \mathfrak{G} durch dasjenige Teilgebiet $\mathfrak{G}(T)$ des Grundgebietes, welches zwischen den Ebenen $t = 0$ und $t = T$ enthalten ist, so liefert

$$\frac{\partial W}{\partial T} = \int \int \int_{t=T} u^2 c dx_1 dx_2 dx_3 = v(T) \quad (4)$$

die mittlere Zahl der von unseren Teilchen zur Zeit $t = T$ pro Sekunde eingenommenen Weltstellen. Wenn also der Grenzwert

$$\lim_{T \rightarrow \infty} v(T) = v^* \quad (5)$$

existiert, so kann man von einer asymptotischen Erhaltung des Teilchens sprechen. Ein genauer mikrokosmischer Erhaltungssatz wird im Rahmen der in Teil I geschilderten Weltpunktdynamik nicht angestrebt.

Die in den Tafeln (56) und (70) von Teil II mitgeteilten Lösungen erfüllen nun tatsächlich die Bedingung (5). Hingegen sind sie alle entweder auf dem Nullkegel oder auf der Ruhachse singulär. Die einzige im abgeschlossenen Grundgebiet eindeutige, stetige und beschränkte Lösung

$$u = C \cdot \frac{I_1(ar)}{r}; \quad r = \sqrt{c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} \quad (6)$$

liefert dagegen keinen eigentlichen Grenzwert (5).

Die erwähnten Anomalien verschwinden nun vollständig, wenn man das eben geschilderte Einpunktpproblem ersetzt durch folgen-

des *Zweipunktproblem*: Von einem Teilchen sei bekannt, dass es an zwei zueinander zeitartig gelegenen Weltstellen

$$Q_1 \sim (ct, x_1, x_2, x_3) = (-A, 0, 0, 0)$$

und

$$Q_2 \sim (ct, x_1, x_2, x_3) = (A, 0, 0, 0)$$

in Erscheinung trete. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dieses Teilchen an irgend einer mit dem Verbot der Überlichtgeschwindigkeit verträglichen Weltstelle Q anzutreffen?

Das Grundgebiet besteht nun aus dem Vorkegel von Q_1 , dem Nachkegel von Q_2 und dem Durchschnitt des Nachkegels von Q_1 mit dem Vorkegel von Q_2 . Den letzteren endlichen Bereich wollen wir kurz *Doppelkegel* nennen.

Das bezeichnete Problem ist separierbar in den durch die Transformation

$$\left. \begin{aligned} ct &= \frac{\tau \sigma}{A} \\ \varrho &= \frac{\sqrt{(A^2 - \tau^2)(A^2 - \sigma^2)}}{A} \\ x_1 &= \varrho \cos \vartheta \\ x_2 &= \varrho \sin \vartheta \cos \varphi \\ x_3 &= \varrho \sin \vartheta \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

definierten Lamé'schen Koordinaten $\tau, \sigma, \vartheta, \varphi$. Der Separationsansatz

$$u = T(\tau) S(\sigma) P(\vartheta) \Phi(\varphi) \quad (9)$$

führt auf die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi &= 0, \quad (\Phi) \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] P &= 0, \quad (P) \\ \frac{1}{\sqrt{A^2 - \sigma^2}} \frac{d}{d\sigma} \left[(\sqrt{A^2 - \sigma^2})^3 \frac{dS}{d\sigma} \right] \\ &+ \left[a^2(A^2 - \sigma^2) - E - \frac{l(l+1)A^2}{A^2 - \sigma^2} \right] S = 0, \quad (S) \\ \frac{1}{\sqrt{A^2 - \tau^2}} \frac{d}{d\tau} \left[(\sqrt{A^2 - \tau^2})^3 \frac{dT}{d\tau} \right] \\ &+ \left[a^2(A^2 - \tau^2) - E - \frac{l(l+1)A^2}{A^2 - \tau^2} \right] T = 0, \quad (T) \end{aligned}$$

Hier sind in den beiden wohlbekannten Gleichungen (Φ) und (P) die Eigenwerte schon durch die geläufigen Quantenzahlen m und l ausgedrückt. Neu und für das Zweipunktproblem charakteristisch sind die beiden gleichlautenden Gleichungen (S) und (T). Ihre Quantisierung beruht ausschliesslich auf den Schrödinger'schen Forderungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit im abgeschlossenen Doppelkegel und liefert ein diskontinuierliches Spektrum von Eigenwerten E . Führt man an Stelle von σ und τ vermittle

$$\sigma = A \cos \alpha, \quad \tau = A \cos \beta \quad (10)$$

die Winkelvariablen α und β ein, so ergeben sich für die einem bestimmten Eigenwert E entsprechenden Eigenfunktionen $S_E[x]$ und $T_E[x]$ die Beziehungen

$$T_E[x] \equiv C S_E[x] \quad (11a)$$

$$S_E[-x] \equiv \pm S_E[x] \quad (11b)$$

$$S_E[x + \pi] \equiv \pm S_E[x] \quad (11c)$$

woraus ihre enge Verwandtschaft mit den Mathieu'schen (resp. Lamé'schen) Eigenfunktionen ersichtlich ist. Ihre Fortsetzung in den Nachkegel von Q_2 oder den Vorkegel von Q_1 geschieht durch Substitutionen

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow k\pi + i\alpha \\ \beta &\rightarrow l\pi + i\beta, \end{aligned} \quad (12)$$

wo k und l ganze Zahlen sind und liefert die sogenannten zugeordneten Eigenfunktionen.

Eine erste approximative Analyse der gewonnenen Lösungen zeitigte folgende Ergebnisse:

1. Sämtliche Eigenlösungen sind im abgeschlossenen Grundgebiet eindeutig, stetig und beschränkt und besitzen einen endlichen Grenzwert (5).

2. Die Struktur der Wellenfunktion hängt in dem Sinne von der Grunddistanz $2A$ ab, dass mit wachsendem A in der Umgebung der „Gewissheitsstellen“ Q_1 und Q_2 die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung von der Ruhachse Q_1Q_2 klein wird. Im Grenzfall $A = \infty$ wird diese Wahrscheinlichkeit Null. Liegt also Q_1 im Unendlichen, Q_2 aber im Endlichen, so beschreibt der Partikel im Endlichen genau eine Trägheitsbahn.

3. In genügendem Abstand von den Gewissheitsstellen entsprechen die auftretenden Frequenzen und Wellenlängen den bekannten de Broglie'schen Gesetzmässigkeiten.

Die hier entwickelte Auffassung der wellenmechanischen Trägheit ist vielleicht geeignet, die rätselhafte Doppelnatur der Materie dem anschaulichen Verständnis näher zu bringen. Sie vermeidet strikte jede Überlichtgeschwindigkeit und gestattet einen kontinuierlichen Anschluss an das klassische Trägheitsgesetz. Die mathematischen Einzelausführungen zu den hier mitgeteilten Resultaten werden an anderer Stelle erscheinen¹⁾.

Zum Schluss sei im Anschluss an die Feststellung 2. noch folgende Konfiguration erwähnt: Fallen die beiden Weltpunkte Q_1 und Q_2 in *verschiedene* Raumpunkte derart, dass ihr Verbindungsvektor die Geschwindigkeit v repräsentiert, so gehören sämtliche Weltpunkte des Doppelkegels *räumlich* zu einem gestreckten Rotationsellipsoid mit den Halbachsen A und $A \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, dessen Brennpunkte die Raumorte von Q_1 und Q_2 sind. Der von unserem Teilchen in der Zeit von Q_1 bis Q_2 „gestörte“ Raum wird also mit $v \rightarrow c$ beliebig schmal. Dieses Beispiel illustriert die Unmöglichkeit, auf Grund der relativistischen Metrik eine kleinste Raumdistanz auszuzeichnen.

Bern, Mathematisches Institut der Universität.

¹⁾ Als Teil IV in den „Commentarii Mathematici Helvetici“, Anfang 1944.

Der Piezoeffekt des seignette-elektrischen Kristalls KH_2PO_4

von W. Bantle und Ch. Caflisch.

(31. III. 1943.)

Zusammenfassung: Zur Messung des Piezomoduls eines Kristalls kommen im wesentlichen zwei Methoden in Frage: Entweder misst man die Ladung, die bei Belastung des Kristalls durch ein ballistisches Galvanometer fließt, oder man bestimmt die elektrische Spannung, die an einem Elektrometer entsteht. Diese beiden Methoden werden diskutiert, speziell in bezug auf ihre Anwendbarkeit bei seignette-elektrischen Substanzen.

Der Piezomodul d_{36} des seignette-elektrischen Kristalls KH_2PO_4 wird mit Hilfe der erstgenannten Messanordnung von Zimmertemperatur bis zur Curietemperatur $\Theta = 123^\circ \text{K}$ gemessen. Dieser Modul hat bei Zimmertemperatur den Wert $6 \cdot 10^{-7}$ cgs und steigt dann bis zur Curietemperatur auf $6 \cdot 10^{-4}$ cgs, was gegenüber Quarz einer rund 10000mal stärkeren piezoelektrischen Erregbarkeit entspricht.

Von Zimmertemperatur bis zur Curietemperatur erweist sich der Zusammenhang zwischen der mechanischen Spannung des Kristalls und der dadurch erzeugten Polarisierung als linear, d. h. der Piezomodul ist für eine bestimmte Temperatur wirklich eine Konstante. Unterhalb der Curietemperatur gilt dies nicht mehr und es hat deshalb dort die Nennung eines Piezomoduls keinen grossen Sinn mehr. An dessen Stelle tritt die Angabe der Hysteresisschleife, welche den Zusammenhang zwischen mechanischer Spannung und Polarisierung darstellt. Für dieses Temperaturgebiet werden einige vorläufige Messresultate angegeben.

1. Einleitung und Definitionen.

Ein piezoelektrischer Kristall ist bei konstanter Temperatur T ein System mit 4 Zustandsvariablen, von denen zwei beliebige als unabhängige gewählt werden können. Weil es schwierig ist, elektrische Polarisierung P und mechanische Deformation x eines Kristalls auf beliebig vorgegebene Werte einzustellen, ist der Experimentiertechnik wohl die Wahl der äusseren elektrischen Feldstärke E und der äusseren mechanischen Spannung X als unabhängige Variablen und der elektrischen Polarisierung sowie der elastischen Deformation als abhängige Variablen am besten angepasst. Dies führt zu den folgenden piezoelektrischen Gleichungen^{1) 2)}:

$$P = d \cdot X + \kappa \cdot E \quad (1)$$

$$x = s \cdot X + d \cdot E \quad (2)$$

Entsprechend der Tatsache, dass die Gleichungen (1) und (2) Be-

*

ziehungen zwischen Vektoren (P und E) und Tensoren (x und X) darstellen, hat man im allgemeinen 18 piezoelektrische Moduln d_{ik} , 21 verschiedene Elastizitätskoeffizienten s_{ik} und, bezogen auf die Hauptachsen, 3 Konstanten der dielektrischen Suszeptibilität κ_i . Aus den obigen Definitionsgleichungen geht hervor, dass der Piezomodul d die durch Druck erzeugte Polarisation *beim Fehlen* eines *äusseren Feldes* misst. Der Piezomodul wird dementsprechend am direktesten durch ballistische Messung der durch einen äusseren

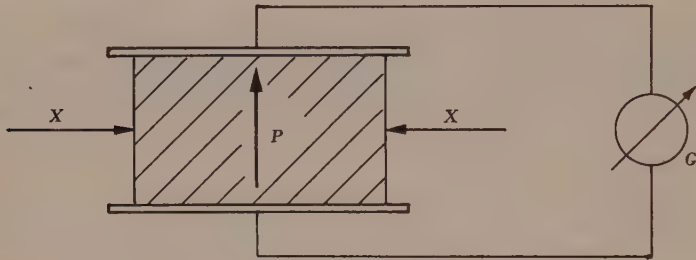


Fig. 1.

Druck entstehenden Polarisation P nach Fig. 1 bestimmt. Da der Kristall dabei durch das Galvanometer G kurzgeschlossen wird, ist sicher kein Feld am Kristall, so dass der Piezomodul sich aus $d = P/X$ berechnet.

Misst man hingegen den Piezomodul durch die elektrische Spannung V , die bei Belastung des Kristalls an einem Elektro-

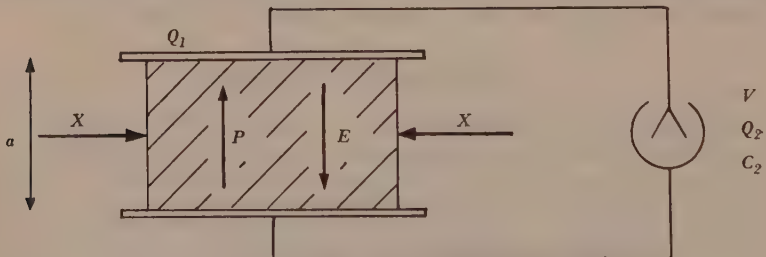


Fig. 2.

meter entsteht (entsprechend Fig. 2), so steht der Kristall unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes, welches sich der Kristall selbst macht, und das auf die entstehende Polarisation zurückwirkt. Diese zweite Messmethode erfordert deshalb notwendigerweise eine zusätzliche Bestimmung der Kristallkapazität resp. die Kenntnis der dielektrischen Eigenschaften des Kristalls.

Durch die angelegte mechanische Spannung X entsteht in dem mit dicht anliegenden Elektroden versehenen Kristall sowohl eine

Polarisation P als auch eine Feldstärke E . Diese Feldstärke und damit die Spannung V bestimmen sich aus den Versuchsbedingungen in folgender Weise:

$$\text{Experimentelle Nebenbedingung: } Q_1 + Q_2 = 0 \quad (3)$$

(Q_1 resp. Q_2 = Gesamtladungen auf Kristallelektrode resp. Elektrometer, die ursprünglich neutral waren). Die Ladung auf dem Elektrometer hängt mit der Spannung zusammen durch

$$Q_2 = C_2 \cdot V$$

oder auch, da $V = E \cdot a$ ist

$$Q_2 = C_2 \cdot E \cdot a.$$

Andererseits ist die Ladung auf dem Kristall

$$Q_1 = \frac{F \cdot D}{4\pi} = \frac{F(E + 4\pi P)}{4\pi}$$

D = dielektrische Verschiebung

F = Elektrodenfläche

Durch Einsetzen der Ausdrücke für Q_1 und Q_2 in Gleichung (3) erhält man

$$P = -E \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{a}{F} C_2 \right)$$

oder bei Einführung der Leerkapazität des Kristallkondensators

$$C_1^0 = \frac{F}{4\pi a} \quad P = -\frac{C_1^0 + C_2}{F} \cdot E \cdot a = -\frac{C_1^0 + C_2}{F} \cdot V. \quad (4)$$

Setzt man diesen Wert für P in Gleichung (1) ein, so erhält man

$$\boxed{V = -\frac{d \cdot F}{C_1 + C_2} X} \quad (5)$$

Dabei ist C_1 die wirkliche Kapazität des mit dem Kristall ausgefüllten Kondensators,

$$C_1 = \varepsilon \cdot C_1^0 = \frac{\varepsilon F}{4\pi a} = \frac{1 + 4\pi \kappa}{4\pi a} \cdot F$$

(ε = Dielektrizitätskonstante). Man sieht aus Gleichung (5), dass die Elektrometermethode die Kenntnis der dielektrischen Eigenschaften des Kristalls voraussetzt.

Die Beziehung (5) wird oft³⁾, statt aus den Gleichungen (1) und (4), abgeleitet aus

$$P' = d \cdot X \quad (6)$$

und

$$P' = \frac{C_1 + C_2}{F} V. \quad (7)$$

Dabei ist in (6) das Glied $\kappa \cdot E$ weggelassen und nur die durch die mechanische Spannung hervorgerufene Polarisierung berücksichtigt, dafür aber in (7) die Dielektrizitätskonstante des Kristalls berücksichtigt und die Kristallkapazität $C_1 = \varepsilon \cdot C_1^0$ statt der Leerkapazität C_1^0 eingesetzt. P' bedeutet in diesem Fall nicht die im Kristall wirklich vorhandene Polarisierung P , sondern eine fiktive Polarisierung, die durch die mechanische Spannung allein erzeugt würde, wenn der Kristall nicht polarisierbar wäre. Die wirkliche Polarisierung ist wegen der Rückwirkung des entstehenden Feldes kleiner als die durch die mechanische Spannung allein erzeugte Polarisierung P' . Sie berechnet sich aus (1) und (5) zu

$$P = \frac{C_1^0 + C_2}{\varepsilon C_1^0 + C_2} \cdot d \cdot X. \quad (8)$$

Bei sehr hoher Dielektrizitätskonstante, wie sie z. B. bei seignetteelektrischen Substanzen auftreten, kann deshalb trotz des grossen Piezomoduls bei dieser Anordnung nur eine relativ kleine Polarisierung des Kristalls entstehen und auch die auftretenden elektrischen Spannungen sind nicht entsprechend dem anomalen Piezomodul gross.

Betrachten wir z. B. den Fall, in welchem die Leerkapazität C_1^0 des den Kristall enthaltenden Kondensators gleich derjenigen des Elektrometers C_2 ist, so reduziert sich Gleichung (8) auf

$$P = \frac{2}{\varepsilon + 1} \cdot d \cdot X.$$

Vergleichen wir nun die bei gleicher mechanischer Spannung im Kristall entstehende Polarisierung P_1 ohne Rückwirkung (d. h. bei Messung nach Fig. 1) und P_2 mit Rückwirkung (d. h. nach Fig. 2), so erhalten wir

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{d \cdot X}{\frac{2}{\varepsilon + 1} d \cdot X} = \frac{\varepsilon + 1}{2}. \quad (9)$$

Dies bedeutet z. B. für KH_2PO_4 am Curiepunkt ($\varepsilon = 48000$), dass die durch Rückwirkung verkleinerte Polarisierung 24000mal kleiner

ist als ohne Rückwirkung. Es ist deshalb unmöglich, diesen Kristall in der Anordnung nach Fig. 2 und bei $C_1^0 = C_2$ durch Anwendung einer mechanischen Spannung bis zur Sättigung zu polarisieren. In der Schaltung nach Fig. 1 hat man hingegen (in der Gegend der Curietemperatur) schon bei einer Belastung mit $10 \text{ kg}^* \cdot \text{cm}^{-2}$ Sättigungscharakter.

Technisch wichtig ist das Verhältnis der elektrischen *Spannungen*, die bei gleichen Belastungen an zwei verschiedenen Piezokristallen (Schaltung nach Fig. 2) erzeugt werden. Man erhält dafür bei gleichen geometrischen Abmessungen der Kristalle und der Annahme $C_1^0 = C_2$ aus Gleichung (5)

$$\frac{V'}{V''} = \frac{d'}{d''} \cdot \frac{\varepsilon'' + 1}{\varepsilon' + 1}. \quad (10)$$

Vergleichen wir z. B. wieder KH_2PO_4 am Curiepunkt ($d = 60000 \cdot 10^{-8} \text{ cgs}$) mit Quarz ($d = 6 \cdot 10^{-8} \text{ cgs}$), so erhalten wir für das Verhältnis der Spannungen

$$\frac{V_{\text{KH}_2\text{PO}_4}}{V_{\text{Quarz}}} = \frac{60000 \cdot 10^{-8}}{6 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{5 + 1}{48000 + 1} = 1,25.$$

Man sieht, dass bei dieser Anordnung die elektrische Spannung, welche am seignette-elektrischen Kristall erzeugt wird, nicht wesentlich verschieden ist von derjenigen, welche am 10000mal weniger piezoelektrischen Quarzkristall unter gleichen Umständen auftritt.

Es ist deshalb bei Substanzen mit hohen Dielektrizitätskonstanten vernünftiger den Piezomodul nach Fig. 1 ballistisch zu messen, da die dabei abfließende Ladung (unabhängig von der Dielektrizitätskonstanten) proportional mit dem Piezomodul wächst.

Seignette-elektrische Substanzen zeigen bekanntlich in einem gewissen Temperaturgebiet Hysteresiserscheinungen, Sättigung und Remanenz der elektrischen Polarisation und der damit verknüpften piezoelektrischen, elastischen und optischen Eigenschaften^{4) 5) 6) 7) 8) 9) 10)}. Diese haben zur Folge, dass die Polarisation P eine komplizierte, nicht eindeutige Funktion von X und E wird, welche man nicht mehr wie in (1) eindeutig in einen piezoelektrischen Anteil $d(XE) \cdot X$ und einen dielektrischen Anteil $\varkappa(XE) \cdot E$ aufteilen kann. Nur für die Grenzfälle $E = 0$ oder $X = 0$ kann man noch einen Piezomodul $d(X, 0)$ resp. eine dielektrische Suszeptibilität $\varkappa(0, E)$ in üblicher Weise definieren. Dieser Piezomodul $d(X, 0)$, der jedoch nicht mehr algebraisch, sondern nur noch graphisch

angegeben werden kann, lässt sich sofort nach der in Fig. 1 dargestellten ballistischen Methode messen, wobei wegen der auftretenden Hysteresis und Remanenz allerdings Zug- und Druckmessungen zur Anwendung kommen müssen. Die Messmethode nach Fig. 2 (bei der gewöhnlich noch mit Ladungsteilung gemessen wird, um die Elektrometerkapazität zu eliminieren), gibt natürlich wegen der Änderung der Dielektrizitätskonstanten mit der Feldstärke keine eindeutigen Resultate mehr.

2. Problemstellung.

Der KH_2PO_4 -Kristall hat auf Grund seiner Zugehörigkeit zur tetragonal hemiedrischen Kristallklasse D_{2d} folgendes Schema der piezoelektrischen Moduln:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{array}$$

wobei d_{14} und d_{25} überdies identisch sind. Der Piezomodul d_{36} ist derjenige, welcher die Schubspannungen X_y und Y_x mit der seignetteelektrischen Polarisation P_z verknüpft. In der vorliegenden Arbeit soll dieser Modul von Zimmertemperatur bis zur Curietemperatur $\Theta = 123^\circ \text{K}$ bestimmt werden. Im Abschnitt 5 werden ausserdem noch einige vorläufige Messergebnisse des Piezoeffekts unterhalb der Curietemperatur angegeben.

Der Modul d_{36} wurde erstmals bei Zimmertemperatur bestimmt von SPITZER¹¹⁾, dann von Zimmertemperatur bis zum Siedepunkt der flüssigen Luft von LÜDY⁷⁾. Es erschien uns wünschenswert, speziell die letztere Messung zu wiederholen nach der direkten Methode, die in Fig. 1 skizziert ist, da dabei die dielektrischen Eigenschaften des Kristalls keine Rolle spielen. Der Temperaturmessung und Konstanthaltung wurde grössere Aufmerksamkeit geschenkt, indem ein Thermostat Verwendung fand. Auch wurde die Gültigkeit der Gleichung (1) insofern geprüft, als die Linearität der Beziehung $P_z = d_{36} X_y$, d. h. die Unabhängigkeit des Piezomoduls von der Belastung, speziell für Temperaturen in der Nähe der Curietemperatur, untersucht wurde. Unsere Resultate stimmen grössenordnungsmässig mit denjenigen LÜDYS überein. Die Abweichungen sind wahrscheinlich der Tatsache zuzuschreiben, dass LÜDY bei laufender Temperatur gemessen hat.

3. Versuchsanordnung.

Nach dem Schema der Piezomoduln ist ein KH_2PO_4 -Kristall nur durch Schubkräfte piezoelektrisch erregbar. Da aber reine Schubkräfte experimentell schwer zu realisieren sind, schneidet man das Kristallpräparat so aus dem Kristall heraus, dass man Druckkräfte statt der Schubkräfte anwenden kann. Den Zusammenhang zwischen den Schubkräften und den Druckkräften findet man aus den Gleichgewichtsbedingungen an dem in Fig. 3 skizzierten zweidimensionalen Element.

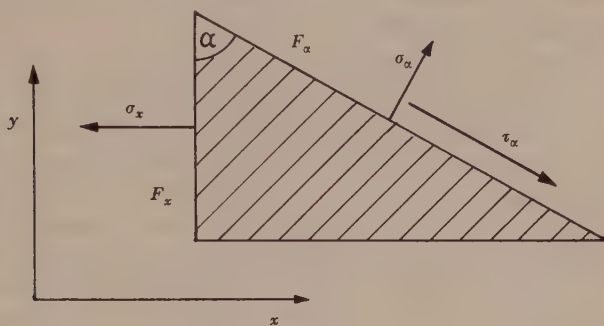


Fig. 3.

$$x\text{-Richtung: } \sigma_x \cdot F_x = \sigma_\alpha \cdot F_\alpha \cdot \cos \alpha + \tau_\alpha \cdot F_\alpha \cdot \sin \alpha$$

$$y\text{-Richtung: } \sigma_\alpha \cdot F_\alpha \cdot \sin \alpha = \tau_\alpha \cdot F_\alpha \cos \alpha$$

Da überdies gilt $F_x = F_\alpha \cdot \cos \alpha$, so erhält man

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha. \quad (11)$$

Ein Maximum der Schubkraft $\tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma_x$ erhalten wir für $\alpha = 45^\circ$; wir schneiden deshalb unsere quaderförmigen Versuchsstücke so aus dem Kristall, dass dessen Hauptachsen a und b einen Winkel von 45° gegen die Druckfläche bilden und die Elektrodenfläche senkrecht zur c -Achse steht. Es wird dann

$$P_c = \frac{1}{2} \cdot d_{36} \cdot \sigma \quad (12)$$

Indem die Polarisation P_c nach der in Fig. 1 gezeichneten Anordnung für verschiedene Temperaturen bestimmt wird, erhält man aus dieser Beziehung bei bekanntem σ den Piezomodul d_{36} in Funktion der Temperatur.

Um die Empfindlichkeit der Methode zu erhöhen, wurden gleichzeitig zwei parallel geschaltene Kristallpräparate gedrückt, wodurch die abfließende Ladung verdoppelt wurde.

Die Dimensionen dieser beiden Kristallplatten waren folgende:

Dicke: 0,111 cm

Höhe: 0,745 cm

Breite: 0,990 cm

Druckfläche: 0,0826 cm²

Elektrodenfläche: 0,73 cm².

Bei der Berechnung der Elektrodenfläche ist zu berücksichtigen, dass die Silberelektroden nicht die ganze Kristallfläche bedeckten, sondern am Rand ca. 0,1 mm von der Elektrodenfläche abgekratzt wurden, damit die beiden Elektrodenflächen nicht über die Unterlage miteinander verbunden waren.

Die Erzeugung und Messung des Druckes am Kristall war deshalb nicht ganz einfach, weil der Kristall in einen Kupfertopf eingeschlossen werden musste, um über das ganze Temperaturgebiet von Zimmertemperatur bis -150°C gemessen werden zu können. Die Druckerzeugung geschah mit dem von LÜDY beschriebenen Glockenmagneten. Da aber, speziell bei tiefen Temperaturen, der Stempel, der den Druck vom Magneten auf den Kristall überträgt, einfrieren könnte, wodurch dann der Druck des Magneten nicht mehr identisch ist mit dem Druck auf den Kristall, wurde eine neue Druckmessmethode verwendet, welche diesen Nachteil vermeidet. Sie ist in Fig. 4 skizziert und besteht im wesentlichen aus einem Stempel, der den Druck über ein Bleipolster auf den Kristall überträgt. Die Kristallplatten drücken dann ihrerseits wieder über ein Bleipolster auf eine Stahlfeder, die je nach der Grösse des Druckes mehr oder weniger zusammengedrückt wird. Beim Drücken und Entlasten bewegen sich somit Kristall und Stempel ein wenig, wodurch der letztere wirksam am Einfrieren verhindert wird.

Wegen der Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes für die Stahlfeder kann der Druck, der auf sie ausgeübt wird, einfach durch ihre Deformation δ gemessen werden. Diese Deformation wird an einer Marke, die sich am oberen Ende des Stempels befindet, mit Hilfe eines Kathetometers auf $\pm 2 \cdot 10^{-3}$ cm gemessen.

Die Regulierung des Druckes geschieht durch Veränderung des Luftspalts des Magneten. Dies geschieht durch eine Mikrometerschraube. Bei genügendem Strom zieht dann der Magnet den Stempel bis zum Anschlag, wodurch man die Möglichkeit hat, einfach durch Ein- und Ausschalten des Magnetstromes den Kristall immer wieder demselben Druck auszusetzen.

Damit das Gewicht des Stempels nicht dauernd auf den Kristall drückt, ist der Stempel oben an einem Wagebalken aufge-

hängt (Fig. 5). Damit kann das Gewicht des Stempels kompensiert werden. Die Reibung des Stempels ist so klein, dass 5 g* genügen, um die Wage vollständig aus dem Gleichgewicht zu bringen. Da die Eichung der Feder mit 4 kg* erfolgt, kann diese Reibung vernachlässigt werden. Für die Belastung des Kristalls spielt die Reibung gar keine Rolle, da die Feder unterhalb des Kristalls ist.

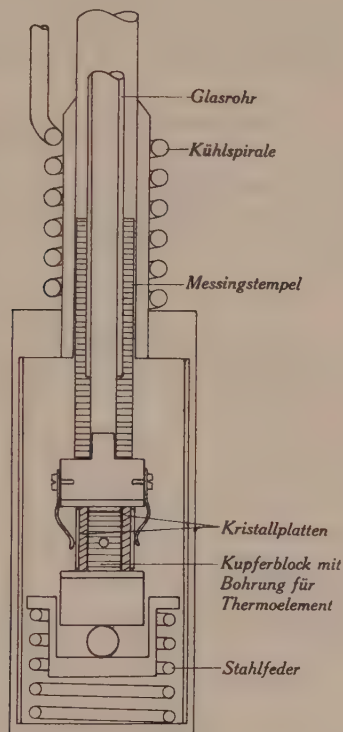


Fig. 4.

Messgefäß und Kristallhalter.

Die Federkonstante f der Druckfeder wird bestimmt durch Auflegen von Gewichten G auf den Stempel nach der Gleichung $G^* = f \cdot \delta$ (Fig. 5).

Bei 300°K betrug $f = 2,13 \cdot 10^7 \text{ Dyn/cm}$, und bei 100°K $f = 2,22 \cdot 10^7 \text{ Dyn/cm}$.

Um die relativ dünnen Kristallplatten möglichst ohne Knickgefahr belasten zu können, wurden die Platten nach Fig. 4 leicht an einen Kupferblock gepresst. Dieser Kupferblock war verlötet mit der Bleiplatte, auf der die Kristallplatten mit ihren Druck-

flächen ruhten. Die Bleipolster hatten den Zweck, sich etwelchen Ungenauigkeiten der Kristalloberflächen plastisch anzupassen.

Damit sich der Druck möglichst symmetrisch auf die beiden Kristallplatten verteilte, wurde er von der Druckfeder zentrisch über eine Kugel auf die massive Unterlage der Kristalle übertragen.

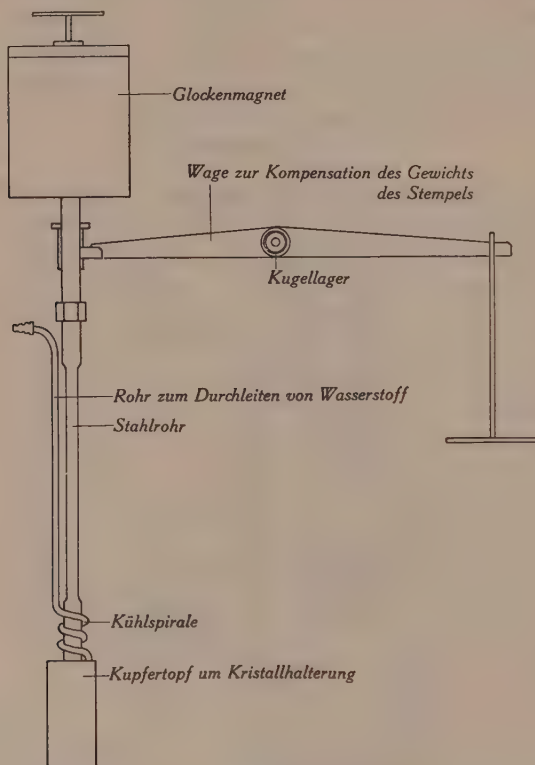


Fig. 5.

Übersicht über Druckapparatur.

Die Temperatur der Kristalle wurde durch die Thermospannung eines Kupfer-Konstanten-Thermoelements gemessen. Die eine Lötstelle befand sich in einem Eis-Wasser-Gemisch, die andere in einer Bohrung des Kupferblocks zwischen den Kristallplatten. Um Temperaturdifferenzen im Messgefäß möglichst rasch auszugleichen, konnte es durch das in Fig. 5 sichtbare dünne Messingrohr mit trockenem Wasserstoff gefüllt werden. Die Messung der Thermospannung geschah in üblicher Weise mit Hilfe eines Kompensationskastens und eines Galvanometers als Nullinstrument.

Zur ballistischen *Messung* der piezoelektrisch erzeugten *Ladung* wurde ein Hartmann- und Braun-Galvanometer verwendet mit einer ballistischen Empfindlichkeit von $6,8 \cdot 10^{-10}$ Clb/mm,m und einer Schwingungsdauer von 6,9 sec. Um die Empfindlichkeit verändern zu können, wurde auf gut isolierenden Porzellanhaltern ein Satz Widerstände bereitgestellt, die dem Galvanometer parallel geschaltet werden konnten. Die Bestimmung der ballistischen Empfindlichkeit wurde für jeden dieser Parallelwiderstände ausgeführt, indem ein genauer Eichkondensator auf eine bekannte Spannung aufgeladen und dann über das geshuntete Galvanometer entladen wurde.

Die ballistische Empfindlichkeit konnte durch die Parallelwiderstände von $3,45 \cdot 10^{-10}$ Clb/mm,m (1,035 elst. Ldg/mm,m) auf $2,97 \cdot 10^{-8}$ Clb/mm,m (89,1 elst. Ldg/mm,m) herabgesetzt werden.

Der *Thermostat* ist dem von SCOTT und BRICKWEDDE¹²⁾¹³⁾ entworfenen nachgebildet. Er besteht im wesentlichen aus zwei ineinandergestellten Dewargefässen. Zwischen die beiden Dewargefässe füllt man flüssige Luft; in das innere wird eine Mischung von Pentan und Butan eingefüllt. Dieses Gemisch bildet die Kühlflüssigkeit, in die das Messgefäß eingetaucht wird. Die Temperatur der Kühlflüssigkeit kann auf einen beliebigen Wert zwischen Zimmertemperatur und der Temperatur der flüssigen Luft eingestellt werden und dann automatisch mit Hilfe eines Gasthermometers und einer in der Kühlflüssigkeit eingebauten elektrischen Heizung auf $0,03^\circ$ konstant gehalten werden. Damit das Kältebad sich wirklich bis zur Temperatur der flüssigen Luft abkühlt, darf das innere Dewargefäß nicht auf Hochvakuum ausgepumpt sein. Für ganz tiefe Temperaturen muss man vielmehr den Zwischenraum dieses Dewargefässes mit Wasserstoff von Normaldruck füllen können. Je höher man aber die Temperatur des Kältebades wählt, um so besser muss die Wärmeisolation dieses Dewargefässes werden, da sonst die elektrische Heizleistung, und damit der Verbrauch an flüssiger Luft immer grösser wird. Man erreicht dies durch variablen Gasdruck im Zwischenraum des inneren Dewargefässes.

4. Messresultate.

a) Die Unabhängigkeit des Piezomoduls von der Belastung.

Diese Unabhängigkeit ist erfüllt, wenn die Beziehung $P(X_y) = d \cdot X_y$ bei konstanter Temperatur linear ist. Die Aufnahme eines einzelnen Messpunkts dieser Beziehung geht folgendermassen vor sich: Der Strom im Magneten wird mehrmals ein- und ausgeschaltet. Jedesmal wird die Höhe des Stempels im Kathetometer

kontrolliert und so die Strecke δ bestimmt, um die die Feder zusammengedrückt wird. Die Schubspannung $\tau = X_y$ pro Kristall bestimmt sich daraus z. B. bei 150°K zu

$$\tau = X_y = \frac{1}{2} \sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{K}{2F} = \frac{f\delta}{4F} = \frac{2,20 \cdot 10^7 \delta}{4 \cdot 0,0826} \text{ dyn/cm}^2$$

Bei jeder Belastung und Entlastung wird auch die durch das Galvanometer fließende Ladung Q gemessen. Alle Einzelmessungen stimmen gut überein. Die Polarisation P für einen Kristall wird daraus bei einem Skalenabstand $s=3,55 \text{ m}$, einem ballistischen Ausschlag a , einem Parallelwiderstand von $10^4 \Omega$ und einer dazugehörigen Empfindlichkeit $e_{10} = 22,2 \text{ elst. Ldg/mm,m}$:

$$P = \frac{Q}{2F} = \frac{e_{10} a}{2 \cdot F \cdot s} = \frac{22,2 \cdot a}{2 \cdot 0,73 \cdot 3,55} \text{ elst. Ldg/cm}^2.$$

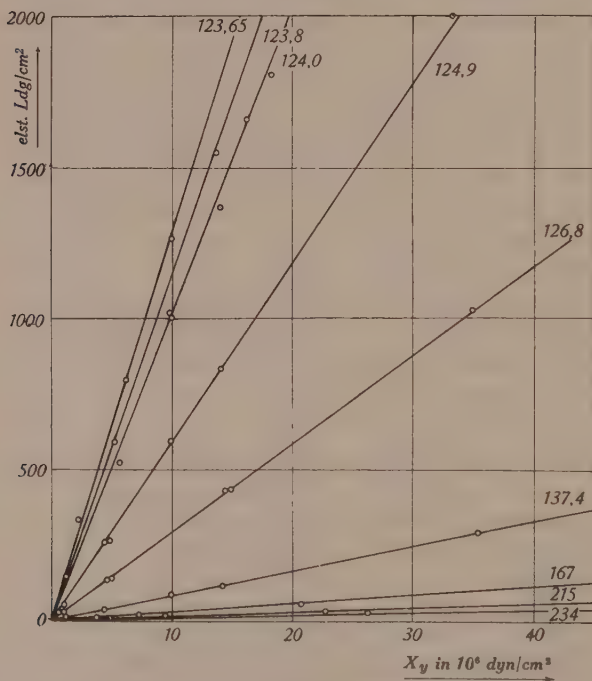


Fig. 6.

Polarisation in Funktion der Belastung. Parameter: absolute Temperatur.

In Fig. 6 ist das Resultat dieser Messungen für verschiedene Temperaturen, speziell wenig oberhalb der Curietemperatur, dargestellt. Wie man daraus ersieht, ist die Beziehung $P(X_y)$ auch

wenige Zehntelgrade über der Curietemperatur noch linear, wenigstens solange die durch die mechanischen Spannungen erzeugte Polarisierung kleiner als $2000 \text{ elst. Ldg/cm}^2$ bleibt.

b) Der Piezomodul d_{36} oberhalb der Curietemperatur.

Die Neigung der Geraden in Fig. 6 stellt den Piezomodul $d_{36} = P_c/X_y$ dar. Die Werte, die aus diesen Messungen erhalten wurden, sind in Fig. 7 als leere Kreise eingezeichnet. Ihnen wurde

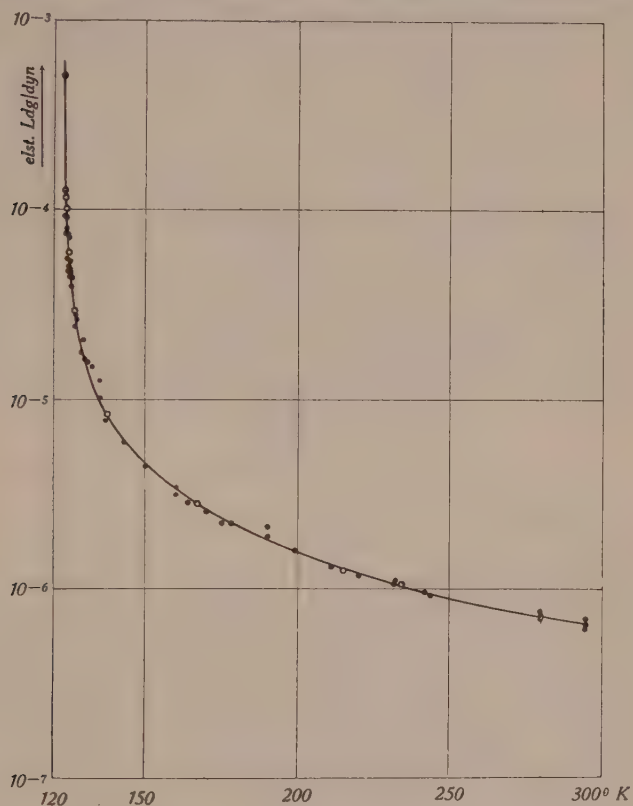


Fig. 7.

Temperaturgang des Piezomoduls d_{36} .

beim Zeichnen der Kurve das grösste Gewicht gegeben. Die ausgefüllten Kreise stellen Einzelmessungen bei langsam laufender Temperatur dar. Sie wurden zum Teil auch an anderen, als den früher beschriebenen Kristallpräparaten ausgeführt, um festzustellen, ob von Kristall zu Kristall wesentliche Schwankungen auftreten. Der Maximalwert von d_{36} , der noch eindeutig gemessen werden konnte, betrug $6 \cdot 10^{-4} \text{ cgs}$; d. h. rund 10^4 mal grösser als bei Quarz.

Der Temperaturverlauf von d_{36} gleicht auffallend demjenigen der dielektrischen Suszeptibilität κ_c . Da man den letzteren sehr oft durch ein Curie-Weiss'sches Gesetz darstellt, versuchten wir diesen Ansatz auch für den Piezomodul, also

$$1/d_{36} = c (T - \Theta)$$

Da dabei c eine temperaturunabhängige Konstante sein sollte, müsste somit d_{36} aufgetragen in Funktion von T eine Gerade mit der Neigung c darstellen. Ähnlich wie für κ_c zeigte sich aber dabei, dass die so berechneten Werte nur in der Nähe der Curietemperatur wirklich auf einer Geraden liegen. Die Konstante c dieser Geraden ist 7930 cgs. Für höhere Temperaturen werden dann die Werte für $1/d_{36}$ immer grösser, als dieser Geraden entsprechen würde und liegen bei 300° K rund 15% über der Geraden. Dieses Ergebnis steht in einem gewissen Gegensatz zum Verhalten von $1/\kappa^4$. Zwar liegen auch diese Werte nur in der Nähe der Curietemperatur auf einer Geraden, aber die Abweichungen bei höheren Temperaturen gehen auf die andere Seite. Die Krümmungen der Kurven $1/d_{36}$ und $1/\kappa$ sind folglich einander entgegengesetzt.

Mit einem maximalen Fehler von 15% lässt sich somit der Piezomodul d_{36} von 123° K bis 300° K beschreiben durch

$$d_{36} = \frac{1/7930}{T - 123}.$$

5. Vorläufige Messungen von $P(X_y)$ im Curiegebiet.

Wie in der Einleitung dargelegt wurde, kann man mit unserer Methode *im Curiegebiet* sofort die Beziehung $P(X_y)$, welche eine Hysteresisschleife darstellt, messen. Man muss dazu den Kristall sowohl Druck- als auch Zugbelastungen aussetzen können. Da unsere Apparatur vorläufig dazu noch nicht eingerichtet ist, versuchten wir auf andere Weise zum Ziel zu gelangen.

Die ersten Messungen führten wir genau so wie oberhalb der Curietemperatur aus. Es zeigte sich dabei sofort, dass der Zusammenhang zwischen P_c und X_y nicht mehr linear ist, sondern Sättigungscharakter hat. Dies war zu erwarten, aber die erhaltene Kurve war nur insofern reproduzierbar, als man bei konstanter Temperatur T_1 immer dieselbe Kurve $P(X_y)$ durchlief, aber sofort ein verschiedenes Resultat erhielt, wenn man den Kristall über den Curiepunkt erwärmte und dann wieder auf T_1 abkühlte. Dieses Verhalten deutet darauf hin, dass die Remanenz des Kristalls nicht reproduzierbar ist. Wir versuchten deshalb den Kristall vor jeder Messung durch ein immer kleiner werdendes Wechselfeld zu depo-

larisieren, d. h. die Remanenz auf Null zu bringen. Dies gelang uns jedoch offenbar nicht, denn die Resultate waren noch immer nicht eindeutig.

Nun verwendeten wir eine andere Methode: Statt $P(X_y)$ bei konstanter Temperatur T zu messen, bestimmten wir $P(T)$ bei konstantem X_y . Dies geschah folgendermassen: Der Kristall wurde einem konstanten Druck ausgesetzt. Während dieser eingespannte Kristall ein Temperaturintervall durchlief, wurde die langsam und stetig abfliessende Ladung gemessen durch Integration über die Zeit des im Galvanometer abgelesenen Stromes.

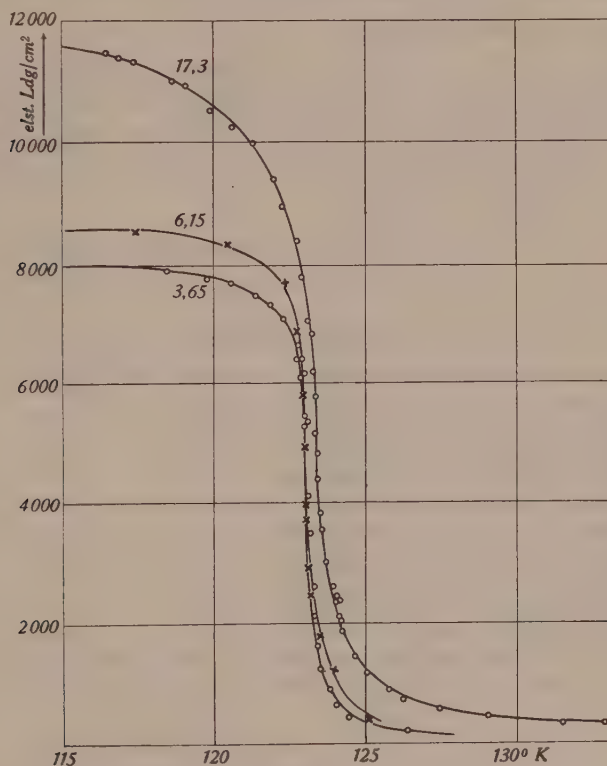


Fig. 8.

Polarisation in Funktion der Temperatur. Parameter: Schub in 10^6 dyn/cm².

Wegen der nötigen Integration ist zwar diese Methode nicht so genau, wie die frühere, das Messergebnis (Fig. 8) zeigt aber doch deutlich einige typisch seignette-elektrische Merkmale:

1. Die Polarisation wird schon bei kleinen Belastungen sehr gross (8000 elst. Ldg./cm² bei 3,65 kg*/cm², während dieselbe Be-

lastung direkt oberhalb der Curietemperatur bei $123,65^{\circ}\text{K}$ nicht einmal $500\text{ elst. Ldg./cm}^2$ erzeugen).

2. Für höhere Belastungen steigt die Polarisation nicht mehr proportional, sondern strebt einem Sättigungswert zu.

3. Unterhalb der Curietemperatur ist die Polarisation für konstante (relativ hohe) Belastungen in einem gewissen Temperaturbereich fast temperaturunabhängig.

Alle diese Erscheinungen sind völlig analog zu den dielektrischen. Ein exakter Vergleich ist jedoch erst möglich, wenn die piezoelektrische Hysteresisschleife vollständig durchlaufen werden kann. Dies ist das Ziel einer bereits begonnenen Arbeit, über die später berichtet werden soll.

Unserem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER, danken wir für seine wertvollen Ratschläge und das Interesse, das er dieser Arbeit entgegenbrachte. Dem Aluminiumfonds Neuhausen sind wir für die Überlassung von Mitteln zur Beschaffung von Apparaten zu Dank verpflichtet.

Zürich, Physikalisches Institut der E.T.H.

Literaturverzeichnis.

- 1) VOIGT, Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig 1928, S. 965.
- 2) MÜLLER, Phys. Rev. **57**, 830, 1940.
- 3) VOIGT, Lehrbuch der Kristallphysik, S. 868.
- 4) BUSCH, H.P.A. **XI**, 269, 1938.
- 5) HABLÜTZEL, H.P.A. **XII**, 489, 1939.
- 6) BANTLE, H.P.A. **XII**, 373, 1942.
- 7) LÜDY, Zs. f. Phys. **113**, 302, 1939.
- 8) DAVID, H.P.A. **VIII**, 432, 1935.
- 9) HINZ, Zs. f. Phys. **111**, 617, 1939.
- 10) MÜLLER, Phys. Rev. **47**, 175, 1935.
- 11) SPITZER, Diss. Göttingen, 1938.
- 12) SCOTT und BRICKWEDDE, Bur. Stand. J. Res. **6**, 401.
- 13) VAN LAMMEREN, Technik der tiefen Temperaturen, Berlin 1914; S. 232.

Eine Apparatur für Koinzidenzmessungen mit sehr hohem Auflösungsvermögen

von H. Bradt und P. Scherrer.

(24. III. 1943.)

1. Einleitung.

Bei der Konstruktion eines Rossi-Koinzidenzverstärkers für kernphysikalische Untersuchungen ist es oft von grosser Wichtigkeit, ein hohes *Auflösungsvermögen der Koinzidenzmischung* zu erreichen. Unter dem Auflösungsvermögen oder der *Trennzeit* τ der Mischung ist die kleinste Zeitdistanz zu verstehen, die zwischen Entladungen in den zwei, mit dem Eingang verbundenen Zählrohren liegen muss, damit diese *nicht als „koinzident“* registriert werden. Etwa bei der Untersuchung simultan emittierter γ -Quanta ist auch im günstigsten Fall, wenn nämlich stets zwei oder mehr Quanta von der radioaktiven Substanz pro Zerfall ausgesandt werden, das Verhältnis der Zahl der Koinzidenzen K zur Zahl der Einzelstösse Z der Zählrohre nur sehr klein, von der Grössenordnung der Zählrohrsensibilität für γ -Strahlen, die normalerweise einige Promille beträgt. Das gleiche gilt, wenn z. B. durch Koinzidenzmessungen relativ seltene radioaktive Zerfallsprozesse, welche — wie etwa bei der inneren Konversion von γ -Quanten in der Atomhülle — zur simultanen Emission mehrere geladenen Teilchen führen, aus einem Untergrund „normaler“ Zerfallsprozesse ausgesiebt werden sollen. Es muss notwendigerweise mit grossen Einzelstosszahlen Z_1, Z_2 gearbeitet werden, so dass die Zahl der zufälligen Koinzidenzen

$$K_z = 2 Z_1 \cdot Z_2 \cdot \tau$$

bei nicht entsprechend kleinem τ der massgebende Anteil an der gesamten Zahl der beobachteten Koinzidenzen wird.

Die ersten Koinzidenzmessungen auf dem Gebiete der Kernphysik¹⁾ wurden mit Hilfe von Apparaten ausgeführt, deren Auflösungsvermögen 10^{-3} — 10^{-4} sec betrug. In den letzten Jahren ist von verschiedenen Experimentatoren das Auflösungsvermögen um

¹⁾ Siehe z. B. BOTHE und v. BAEYER, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1, 195, 1935. — Bei Koinzidenzmessungen an der Höhenstrahlung kommt es meist auf die Güte des Auflösungsvermögens viel weniger an.

Die Bestimmung des Auflösungsvermögens geschah durch die Messung der Koinzidenzen zweier Zählrohre, die in 5 m Distanz voneinander so aufgestellt waren, dass ihre Achsen in einer Geraden lagen, und die je von einer Ra- γ -Quelle bestrahlt wurden. Durch Bleiabschirmung war dafür gesorgt, dass jedes Zählrohr nur von der benachbarten Ra-Quelle bestrahlt wurde und nicht in merklicher Weise von derjenigen Quelle, die das andere Zählrohr be-

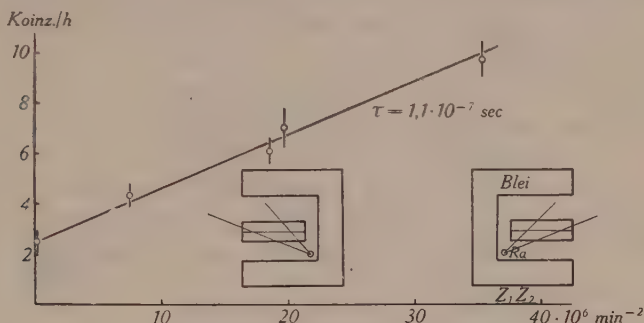


Fig. 2.

strahlte. Fig. 2 zeigt das Ergebnis einer Messreihe; es ist die Zahl der registrierten Koinzidenzen als Ordinate, das Produkt der Einzelstosszahlen beider Zählrohre als Abszisse aufgetragen. Die Tatsache, dass die Messpunkte sich um eine gerade Linie

$$K = K_0 + 2 \tau \cdot Z_1 Z_2$$

gruppieren, zeigt, dass zumindest in den angegebenen Grenzen, ein von der Belastung unabhängiges Auflösungsvermögen existiert, dessen Grösse sich aus der Neigung der Geraden zu $\tau = 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ sec}$ berechnet. $K_0 = (2,4 \pm 0,5)/h$ ist die durch die Höhenstrahlung ausgelöste Koinzidenzzahl¹⁾.

Das Auflösungsvermögen kann übrigens durch die Gittervorspannung U_g der auf die Rossi-Stufe folgenden Röhre zwischen $0,8 \cdot 10^{-7} \text{ sec}$ bis etwa $5 \cdot 10^{-7} \text{ sec}$ variiert werden; in diesem Bereich gilt mit guter Genauigkeit die Relation

$$\tau = 303 \cdot U_g^{-1,87} \mu\text{sec} \quad (U_g \text{ in Volt})$$

zwischen Auflösungsvermögen und Gittervorspannung. Durch Erhöhung des Gitterableitwiderstandes in einem Zweig der Rossi-Stufe im Bereich von 10,000 Ω bis 100,000 Ω kann das Auflösungsvermögen ebenfalls, bis etwa $20 \cdot 10^{-7} \text{ sec}$, variiert werden.

¹⁾ Die Messung wurde in einem mehrere Meter unter der Erde befindlichen Raum ausgeführt.

Um ausser den zufälligen Koinzidenzen noch die andere Komponente des Untergrundes, die durch Höhenstrahlung ausgelösten Koinzidenzen möglichst vollständig zu unterdrücken, werden die Impulse nach der Koinzidenzmischung erst noch einer Antikoinzidenz-Mischeinheit zugeführt, deren einer Zweig etwa mit einer über dem Koinzidenz-Zählrohrpaar befindlichen Zählrohrbatterie verbunden wird. Fig. 3 zeigt das Schaltschema dieses

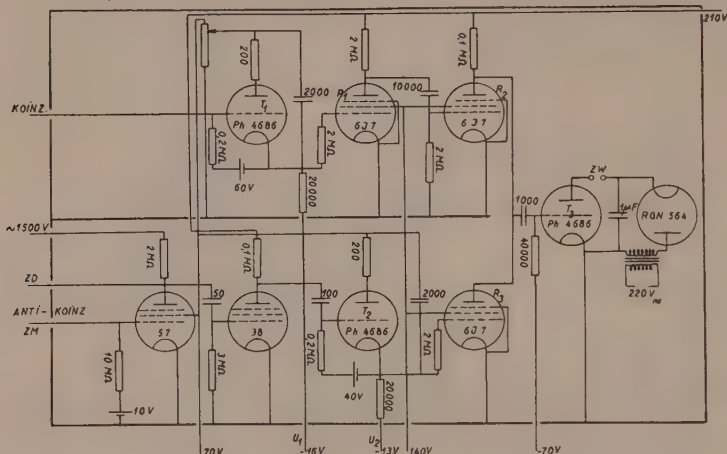


Fig. 3.

Antikoinzidenzmischung.

Zweiges und dasjenige der *Antikoinzidenzmischung*, welches letzteres im wesentlichen einer Arbeit von Rossi und Mitarbeitern¹⁾ entnommen wurde: die Stösse der Antikoinzidenz-Zählrohre werden zuerst durch eine Neher-Harper-Stufe verstärkt und nach Umkehrung der Polarität, ebenso wie die Stösse der Koinzidenzmischung, einem Thyatron in Kippschaltung zugeführt; dies ist hier zweckmässig, um die ganz verschiedenen Formen der Koinzidenz- und der Antikoinzidenz-Impulse zu egalisieren. Erfolgt kein Antikoinzidenzstoss, so sperrt die Röhre R_3 , und jeder Koinzidenzstoss, der die Röhre R_2 sperrt, setzt damit das Zählthyatron T_3 in Betrieb. Kopplungsglieder und die Kathodenspannungen der Thyatrone sind nun so gewählt, dass bei gleichzeitigem Koinzidenz- und Antikoinzidenzstoss die Röhre R_3 anfängt zu leiten, bevor R_2 zu sperren beginnt, und erst wieder sperrt, nachdem R_2 schon leitet; es erfolgt somit in diesem Falle kein positiver Stoss auf das Gitter des Zählthyatrone.

¹⁾ ROSSI, JANOSI, ROCHESTER und BOUND, Phys. Rev. **58**, 761, 1940.

Die verwendete *Zählstufe* nützt das mechanische Auflösungsvermögen des Telephonzählwerks *ZW* maximal aus, denn die Verwendung von Transformator und Gleichrichterröhre zur Aufladung der dem Thyatron parallelen Kapazität vermeidet die übliche grosse Zeitkonstante: jede Halbwelle, in der die Gleichrichterröhre sperrt, bringt das gezündete Thyatron automatisch zum Löschen. Im übrigen werden grössere Einzelstosszahlen stets mit einem Scale of Eight registriert, der nach dem von REICH¹⁾ angegebenen Prinzip konstruiert wurde. Die Zählrohrstösse werden nach zweimaliger Verstärkung und entsprechender zeitlicher Verkürzung dem Eingang zugeführt. Als Zählwerk dient eine Taschenuhr, deren Unruh entfernt ist und deren Anker mit Hilfe eines kleinen Elektromagneten gesteuert wird. Die Linearität des Scale of Eight wurde durch Messung der Abklingkurve radioaktiver Präparate (nach der Rückstossmethode hergestellte ThC''- und AcC''-Präparate, mit langsamen Neutronen bestrahltem In) kontrolliert. Stosszahlen bis 7000/min werden noch praktisch verlustfrei registriert.

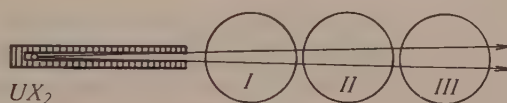


Fig. 4.

Die *Prüfung* des einwandfreien Funktionierens der *Koinzidenzmischung* geschieht in der Anordnung von Fig. 4 für Dreifachkoinzidenzen: ein durch ein Bleiröhrchen ausgeblendetes, schlankes Bündel von UX_2 β -Strahlen durchsetzt drei parallel nebeneinander liegende dünnwandige Zählrohre²⁾. Es wird die Zahl der Einzelstösse im Zählrohr III, die der Zweifachkoinzidenzen (I, III) und (II, III) und die der Dreifachkoinzidenzen (I, II, III) gemessen. Folgende Tabelle gibt das Resultat einer solchen Messung wieder.

Impulse/min	Z (III)	K (I, III)	K (II, III)	K (I, II, III)
mit Quelle . .	166 ± 2	126 ± 4	123 ± 4	117 ± 4
Nulleffekt . .	34 ± 1	1	1	0
Differenz. . .	132 ± 3	125 ± 4	122 ± 4	117 ± 4

¹⁾ REICH, Rev. Sci. Instr. **9**, 222, 1938.

²⁾ Für diese und die im folgenden beschriebenen Kontrollmessungen werden Al-Zählrohre von 5–6 cm wirksamer Länge, 2,4 cm Durchmesser und 100–150 μ Wandstärke verwendet, die mit Argon unter 90–110 mm Hg und Äthylalkoholdampf unter 10 mm Hg-Druck gefüllt waren. Die Differenz zwischen Arbeits- und Einsatzspannung der Zählrohre, von der das Auflösungsvermögen der Koinzidenzmischung abhängig ist, betrug stets 60 Volt.

Die Unterschiede der Anzahlen der Einzelstöße, Zweifach- und Dreifachkoinzidenzen rühren von der etwas von Eins verschiedenen Ansprechwahrscheinlichkeit der jeweils abgeschalteten Zählrohre her; diese Ansprechwahrscheinlichkeit beträgt für die verwendeten Zählrohre bei einem Gesamtdruck von 120 mm Hg etwa 95%.

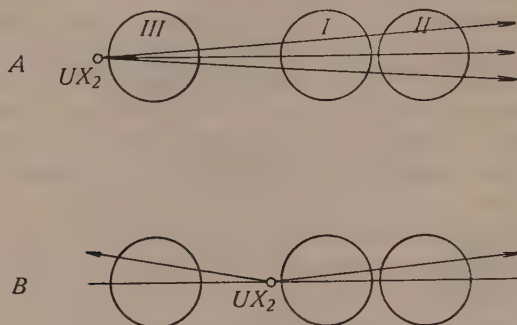


Fig. 5.

Die Prüfung der Antikoinzidenzmischung geschieht in der Anordnung von Fig. 5. Es wird in Anordnung A die Zahl der Koinzidenzen (I, II) mit an- und abgeschaltetem Antikoinzidenzzählrohr III gemessen und letztere Zahl mit der Zahl der Einzelstöße des Zählrohrs II verglichen. In Anordnung B wird die Gegenprobe gemacht; diese zeigt, dass die Zahl der Koinzidenzen (I, II) in dieser Anordnung unabhängig davon ist, ob Zählrohr III an Spannung liegt oder nicht. Die folgende Tabelle gibt das Ergebnis einer kurzen Kontrollmessung wieder.

Anordnung	Einzelstöße		Nulleffekt	Koinzidenzen (I,II)	
	I	II		III ausgesch.	eingesch.
A	321	86	34	46,5	1,2
B		525 ± 10	34	456 ± 10	460 ± 10

3. Die Begrenzung des nützlichen Auflösungsvermögens durch die „Verzögerungszeit“.

Das Auflösungsvermögen der elektrischen Koinzidenzmischung kann an sich durch geeignete zeitliche Verkürzung der Impulse im Verstärker noch weiter gesteigert werden. Doch ist dies von keinem Nutzen mehr, da ein mit abnehmender Trennzeit stets wachsender Verlust auch an echten Koinzidenzen eintritt, sobald

wir zu Trennzeiten der Grössenordnung 10^{-7} sec gelangt sind. DUNWORTH¹⁾ hat für diesen Ausfall von Koinzidenzen bei sehr kleinen Trennzeiten folgende Erklärung gegeben:

Es existiert eine zeitliche Verzögerung zwischen dem Durchgang eines ionisierenden Teilchens durch das Zählrohr und dem Beginn des Spannungsabfalls am Zählrohrdraht. Diese Zeitdistanz ist nun nicht konstant, sondern statistischen Schwankungen unterworfen, so dass, auch wenn die Auslösung der Entladungen beider Zählrohre praktisch genau simultan erfolgt – etwa beim Durchtritt eines schnellen Elektrons durch beide Zählrohre – die Spannungsimpulse doch nicht gleichzeitig in der Mischstufe eintreffen. Ist die Trennzeit der Koinzidenzmischung von der Grössenordnung der statistischen Schwankung der „Verzögerungszeit“ t , so wird ein Bruchteil simultan ausgelöster Entladungen doch nicht als Koinzidenzen registriert werden.

Wir wollen im folgenden diese Überlegung quantitativ etwas vertiefen: t sei die oben eingeführte „Verzögerungszeit“; wir nehmen an, dass ihre mittlere statistische Schwankung

$$\Delta t \equiv \sqrt{(t - \bar{t})^2}$$

klein ist gegen \bar{t} und dass die Wahrscheinlichkeit, eine Verzögerungszeit zwischen t und $t + dt$ zu treffen, durch eine Gauss'sche Fehlerfunktion gegeben sei:

$$w(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \Delta t} e^{-\frac{(t - \bar{t})^2}{2(\Delta t)^2}} dt.$$

Für die beiden Zählrohre wird, infolge stets vorhandener Asymmetrien, die mittlere Verzögerungszeit nicht genau die gleiche sein: wir führen ihre Differenz $\vartheta = |\bar{t}_I - \bar{t}_{II}|$ ein. Für die statistische Schwankung $\Delta \bar{t}$ nehmen wir dagegen in erster Näherung für beide Zählrohre den gleichen Wert an. Ist $W(\tau)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $|t_I - t_{II}| \leq \tau$ ist, so gilt

$$W(\tau) = \int_{-\tau}^{\tau} dT \int_{-\infty}^{\infty} w_I(t) \cdot w_{II}(t - T) dt;$$

die Ausrechnung ergibt

$$W(\tau) = \Phi\left(\frac{\tau - \vartheta}{2\Delta \bar{t}}\right), \quad \text{mit} \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$$

(Gauss'sches Fehlerintegral)

¹⁾ DUNWORTH, Nature 144, 132, 1939; siehe auch MONTGOMERY, RAMSEY, COWIE und MONTGOMERY, Phys.-Rev. 56, 635, 1939, sowie ROSE und RAMSEY, Phys. Rev. 59, 616, 1941.

$W(\tau)$ ist offenbar gleich dem Verhältnis der mit einem Auflösungsvermögen τ registrierten Koinzidenzzahl zu der mit unendlich grossem τ registrierten Koinzidenzzahl.

Diese Rechnung wird in der Tat durch das Experiment bestätigt. In Fig. 6 ist das Ergebnis einer Messung wiedergegeben,

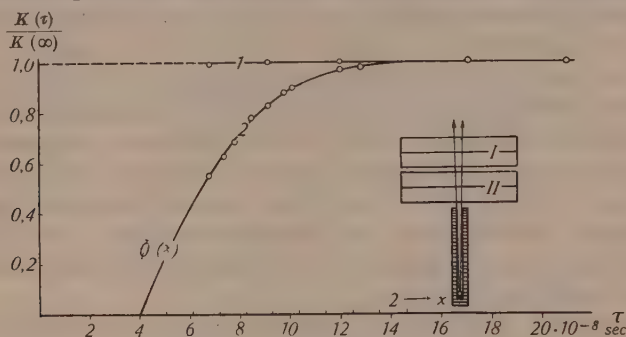


Fig. 6.

bei der ein schmales Bündel UX_2 β -Strahlen durch zwei dünnwandige Zählrohre hindurchgeschickt wurde. Werden beide Eingänge des Koinzidenzverstärkers mit nur einem der Zählrohre verbunden, so ist die „Koinzidenz“-Zahl vom Auflösungsvermögen unabhängig (Kurve 1), d. h. der Verstärker ist bei der kleinsten verwendeten Trennzeit noch voll angesteuert, was auch die oszillographische Kontrolle zeigt. Werden jedoch eigentliche Koinzidenzen zwischen den beiden Zählrohren gemessen, so ergibt sich Kurve 2: Die auf etwa 1% genau bestimmten Messwerte lassen sich sehr gut durch ein Gauss'sches Fehlerintegral darstellen mit den Parametern

$$\vartheta = 4 \cdot 10^{-8} \text{ sec}, \quad \Delta t = 2,7 \cdot 10^{-8} \text{ sec}.$$

Diese Zeiten sind von der Grössenordnung, die das von MONTGOMERY und MONTGOMERY¹⁾ gegebene Bild vom Mechanismus der Zählrohrenentladung erwarten lässt. ϑ und Δt hängen übrigens von den Betriebsdaten (Druck, Überspannung usw.) des Zählrohrpaares ab, doch wurde diese Abhängigkeit nicht systematisch untersucht. Es konnte u. a. $\vartheta \sim 0$ erreicht werden, doch wurde der obige Wert von Δt mit andern Zählrohrpaaren nie unterschritten. Mit Hilfe dieser zwei Konstanten lässt sich also die Koinzidenz-Ansprechwahrscheinlichkeit eines gegebenen Zählrohrpaares bei kleinen τ -Werten analytisch darstellen; wir werden in der folgenden Arbeit für die Bestimmung der Halbwertszeit des ThC' von diesem Resultat Gebrauch machen.

¹⁾ MONTGOMERY und MONTGOMERY, Phys. Rev. **57**, 1030, 1940.

Die Halbwertszeit des ThC'

von H. Bradt und P. Scherrer.

(24. III. 1943.)

1. Einleitung.

Die Halbwertszeit des Alphastrahlers ThC', welcher bei seinem normalen Zerfall Alphateilchen von 8,78 MeV Energie aussendet, ist die kürzeste der in den natürlichen radioaktiven Reihen vorkommenden Perioden; sie ist von GAMOW¹⁾ auf 10^{-7} sec geschätzt worden. Diese theoretische Abschätzung ist jedoch notwendigerweise sehr ungenau, da der Wert der Zerfallswahrscheinlichkeit ausserordentlich stark von der genauen Grösse des effektiven Kernradius abhängt, welcher nur durch Interpolation aus den bekannten Kernradien der anderen Alphastrahler der Thorium-Reihe bestimmt werden kann. Auch einer experimentellen Bestimmung einer so kurzen Periode stehen natürlich Schwierigkeiten im Wege.

JACOBSEN²⁾ und DUNWORTH³⁾ haben als Erste die Koinzidenzmethode zur Bestimmung der sehr kurzen Halbwertszeiten des RaC'⁴⁾ resp. des ThC' angewandt. In der Tat geht ja der Alphaemission der C'-Körper eine Betaemission der C-Körper unmittelbar voraus, wobei die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen einer Beta- und der nachfolgenden Alphaemission eine Zeit zwischen t und $(t + dt)$ verstreicht, gleich

$$\lambda \cdot e^{-\lambda t} dt$$

ist, wobei λ die Zerfallswahrscheinlichkeit des Alphastrahlers bedeutet. Ist t kleiner als das Auflösungsvermögen τ der Koinzidenzmischung, so können also durch diesen sukzessiven Zerfall Koinzidenzen in zwei Zählrohren ausgelöst werden, von denen etwa das eine die Alphastrahlen, das andere die Betastrahlen registriert. Kann die in der vorangehenden Arbeit eingeführte Verzögerungszeit zwischen dem Durchgang des ionisierenden Teilchens durch das

¹⁾ GAMOW, Structure of Atomic Nuclei and Nuclear Transformations. Oxford 1937, S. 105.

²⁾ JACOBSEN, Nature **133**, 565, 1934.

³⁾ DUNWORTH, Nature **144**, 152, 1939.

⁴⁾ Diese Periode wurde ebenfalls bestimmt von ROTBLAT, Proc. Roy. Soc. **177**, 260, 1941.

Zählrohr und dem Entladungsbeginn gegen $1/\lambda$ und τ vernachlässigt werden, so ist die Abhängigkeit der Koinzidenzrate vom Auflösungsvermögen offenbar gegeben durch

$$(1) \cdots K(\tau) = K(\infty) \cdot (1 - e^{-\lambda\tau}).$$

Durch Messung der Koinzidenzrate für verschiedene Werte von τ bei fester geometrischer Anordnung kann somit λ bestimmt werden, und die von ROTBLAT veröffentlichte Kurve zeigt, dass für die RaC-RaC' (β, α)-Koinzidenzen die Gleichung (1), ausgenommen für die kleinsten zur Messung verwendeten τ -Werte, die tatsächliche Abhängigkeit richtig wiedergibt.

Die Zerfallszeit des ThC' ist aber etwa tausendmal kürzer als diejenige des RaC' von $1,45 \cdot 10^{-4}$ sec; eine Vernachlässigung von (Δt) und ϑ ist bei ihrer Bestimmung nun keineswegs mehr gerechtfertigt und in der Tat ist die von DUNWORTH durch seine Messpunkte gelegte Kurve nicht eine Darstellung der Gleichung (1), mit deren Hilfe jedoch offenbar die Halbwertszeit berechnet worden ist. Es wird daher versucht, den Zusammenhang von Zerfallswahrscheinlichkeit und Auflösungsvermögen genauer zu berechnen und experimentell zu prüfen, um festzustellen, ob so das Resultat von DUNWORTH

$$T = (3 \pm 1) \cdot 10^{-7} \text{ sec}$$

verifiziert werden kann.

2. Abhängigkeit der Koinzidenzrate vom Auflösungsvermögen.

Zur Zeit $t = 0$ durchsetze der vom ThC-Kern ausgesandte Betastrahl das Zählrohr I, dessen Entladung im Mittel nach der Zeit \bar{t}_I beginne. Der nachfolgend vom ThC' ausgesandte Alphastrahl durchsetze zur Zeit t das Zählrohr II, welches im Mittel zur Zeit $t + \bar{t}_{II}$ anspreche. Ist τ das Auflösungsvermögen der Koinzidenzmischung,

$$\vartheta = |\bar{t}_I - \bar{t}_{II}|$$

so ist ¹⁾

$$W(\tau, t) = \Phi \left(\frac{\tau - \vartheta - t}{2 \Delta t} \right)$$

die relative Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine solche (β, α)-Koinzidenz bei diesem Auflösungsvermögen registriert werde. Der Bruchteil der sukzessiven Zerfallsprozesse, bei denen zwischen Beta-

¹⁾ Wir verweisen für das Folgende auf die vorangehende Arbeit.

emission des ThC und Alphaemission des ThC' eine Zeit zwischen t und $(t + dt)$ verstreicht, ist

$$w(t) dt = \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt;$$

also ist

$$\Omega(\tau, \lambda) = \int_0^{\tau-\vartheta} w(t) \cdot \Phi\left(\frac{\tau - \vartheta - t}{2(\overline{\Delta t})}\right) dt$$

die relative Anzahl der mit dem Auflösungsvermögen τ registrierten Koinzidenzen; dabei ist $\Omega(\infty, \lambda) = 1$ gesetzt. Mit den Bezeichnungen

$$x = \frac{\tau - \vartheta}{2(\overline{\Delta t})}, \quad \alpha = 2\lambda \cdot (\overline{\Delta t})$$

können wir schreiben

$$\Omega(x, \alpha) = \alpha \cdot e^{-\alpha x} \cdot \int_0^x e^{\alpha y} \Phi(y) dy,$$

was nach partieller Integration ergibt

$$\Omega(x, \alpha) = \Phi(x) - e^{-\alpha x} \cdot e^{\alpha/4} \cdot [\Phi(x - \alpha/2) + \Phi(\alpha/2)]. \quad (2)$$

Diese Gleichung tritt jetzt an Stelle von (1); für $(\overline{\Delta t}) \rightarrow 0$ geht die rechte Seite über in den Ausdruck

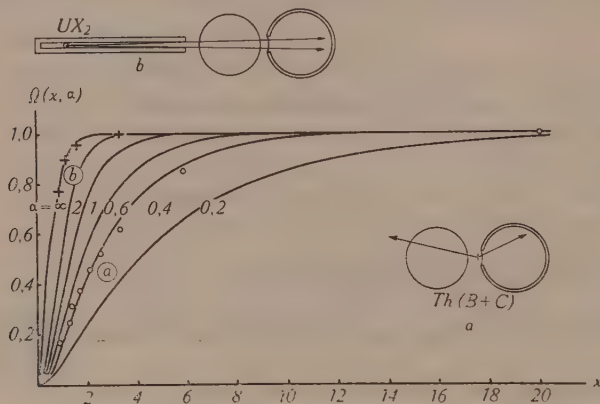
$$1 - e^{-\lambda(\tau-\vartheta)},$$

welchen ROTBLAT verwendet. Der Verlauf von Ω ist in den Fig. 1 und 2 für verschiedene Parameterwerte α aufgetragen. Für endliche Werte von α beginnen die Kurven im Nullpunkt mit horizontaler Tangente.

3. Experimentelle Bestimmung.

Die Messung geschieht in Anordnung *a* der Fig. 1. Es werden mit einer Argon-Alkoholmischung gefüllte Zählrohre von 2,4 cm Durchmesser und 6 cm wirksamer Länge verwendet. Während in das eine Zählrohr, das eine Al-Wandung von 1/10 mm Dicke besitzt, nur die Betastrahlen gelangen, dringen in das andere dickwandige Messingzählrohr durch die mit 15μ Al-Folie bedeckte Bohrung auch die Alphastrahlen ein. Das Th ($B + C$)-Präparat — ca. 1 mm^2 einer in Th-Emanation einseitig aktivierten 10μ -Al-Folie, das mit Zaponlack auf dünnes Cellophan geklebt ist — wird unmittelbar vor der Bohrung des Messingzählrohrs angebracht, so

dass die Alphateilchen ausser den 15μ Al der die Bohrung bedeckenden Folie nur wenige mm Luft durchlaufen müssen. Anschliessend an die mit dem $\text{Th}(B+C)$ -Präparat ausgeführte Koinzidenzmessung wird ein Bündel Betastrahlen durch die gleichen Zählrohre bei konstant gehaltener Arbeitsspannung in der Anordnung *b* von Fig. 1 hindurchgeschickt, und es werden so durch Messung der Koinzidenzrate in Funktion von τ die Konstanten $\overline{\Delta t}$ und ϑ des verwendeten Zählrohrpaares bestimmt. Da hierfür die Zählrohre im normalen Arbeitsgebiet verwendet werden müssen,



Fr. 1.

wird auch bei der eigentlichen Messung in Anordnung *a* das die Alphateilchen registrierende Zählrohr im normalen Arbeitsgebiet (Plateau) und nicht im Proportionalbereich verwendet. Dies bringt es mit sich, dass, obwohl der durch Höhenstrahlung und zufällige Koinzidenzen gebildete Nulleffekt nur sehr klein ist ($\lesssim 1\%$), doch ein nennenswerter Untergrund durch Betastrahlen ausgelöster Koinzidenzen vorhanden ist, welcher bestimmt wurde nach Zwischenschaltung einer 50μ -Al-Folie zwischen das aktive Präparat und das α -Zählrohr. Wie BENEDETTI's¹⁾ und eigene Versuche²⁾ zeigen, sind diese Koinzidenzen der Betastrahlung des mit dem ThC im Gleichgewicht befindlichen ThC'' zuzuschreiben; sie werden nach Korrektur infolge der in der 50μ -Al-Folie erlittenen Absorption, welche mit reiner ThC''-Quelle separat gemessen wurde, vom Resultat in Abzug gebracht. Die folgende Tabelle gibt das Ergebnis zweier Messreihen wieder, ausgeführt mit einem Zählrohrpaar, für

¹⁾ BENEDETTI, Journ. de Phys. **8**, 265, 1940.

²⁾ Helvetica Physica Acta, in Vorbereitung.

welches die Konstanten zu $\vartheta \sim 0$, $\overline{\Delta t} = 7,5 \cdot 10^{-8}$ sec bestimmt worden waren.

R_g	$-U_g$	τ	x	Messreihe 1			Messreihe 2
				K_{total}	K (ThC')	K (ThC, ThC')	K (ThC, ThC')
Ω	Volt	10^{-7} sec		min ⁻¹	min ⁻¹	%	%
100 000	36	(20 \pm 1)	13,33	459	69	100	100
9 800	36	5,0	3,33	311	69	62,0	63,0
„	40	3,8	2,52	272	69	52,1	54,8
„	44	3,2	2,09	250	69	46,5	46,1
„	50	2,5	1,67	217	67	38,4	—
„	56	2,1	1,40	189	64	32,1	—
„	60	1,8	1,30	159	62	24,8	27,0
„	70	1,3	0,86	122	54	17,5	14,8

Kolonne 1 enthält den Wert des Gitterableitwiderstandes der Rossi-Röhre des an das Beta-Zählrohr angeschlossenen Zweiges, Kolonne 2 die Gittervorspannung der auf die Mischstufe folgenden Röhre. Mit diesen beiden Elementen wurde das Auflösungsvermögen τ , das in Kolonne 3 angegeben ist, variiert. Der Gang von τ mit U_g wurde auf 2—3% genau, der Absolutwert von τ auf 5% genau vermessen. Die in Kolonne 5 angegebenen Werte gehen aus den vom Zählwerk abgelesenen Koinzidenzraten hervor nach Korrektur infolge des zeitlichen Abfalls der Th(B + C)-Quelle und infolge des durch die Relaxationszeit der Zählstufe verursachten Registrierungsverlustes. Zur Bestimmung der letzteren dieser Korrekturen wurde der zeitliche Abfall eines In¹¹⁶-Präparates (Halbwertszeit 54,4 min) gemessen und aus der Abweichung vom geradlinigen Verlauf der im logarithmischen Diagramm aufgetragenen Abklingkurve das Verhältnis der registrierten Stosszahl zur tatsächlichen Stosszahl entnommen. Diese Korrektur beträgt bei 450 Impulsen/min 15%. Kolonne 6 enthält den erwähnten Untergrund der ThC'- β -Koinzidenzen (sowie den Nulleffekt durch Höhenstrahlung von 1 Koinz./min); die Abhängigkeit dieser Koinzidenzrate vom Auflösungsvermögen ist die gleiche wie diejenige bei der Messung in Anordnung b. Die Werte der Kolonne 7 (Messreihe 1) sind die Differenzen der entsprechenden Werte von Kolonne 5 und 6, bezogen auf die Messung bei $\tau = 20 \cdot 10^{-7}$ sec als 100%; sie sind in Fig. 1 zusammen mit dem Ergebnis der Messung in Anordnung b eingetragen. Fig. 2, in welcher der x -Masstab fünffach vergrößert ist, enthält noch dazu das Ergebnis der Messreihe 2 (Kolonne 8). Die Messpunkte liegen mit Ausnahme desjenigen, der beim kleinsten

τ -Wert gemessen wurde, und der naturgemäss der unsicherste ist, zwischen den Kurven mit den Parameterwerten $\alpha = 0,44$ und $\alpha = 0,36$. Als Resultat ergibt sich somit $\alpha(\text{ThC}') = 0,40 \pm 0,04$ und indem wir den statistischen mittleren Fehler bei der Bestimmung der absoluten Zeitskala von 5% zum obigen hinzuaddieren:

$$T_{\text{ThC}'} = (2,6 \pm 0,4) \cdot 10^{-7} \text{ sec}^1$$

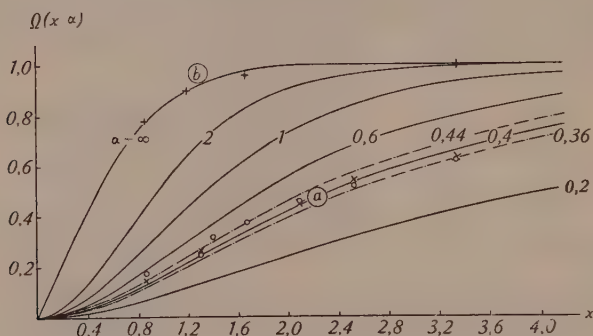


Fig. 2.

○ Messreihe 1. × Messreihe 2.

Dieses Resultat ist also mit dem von DUNWORTH angegebenen in Übereinstimmung. Der angegebene Fehler ist weniger der statistischen Unsicherheit, als einer, wenn auch nur noch geringen, systematischen Abweichung der durch die Messwerte bestimmten Kurve von der berechneten Kurvenform zuzuschreiben. Die Berücksichtigung der ThC' - β -Koinzidenzen und die Ersetzung der Gleichung (1) durch Gleichung (2) scheint uns eine Verringerung der dem Zahlwert anhaftenden Unsicherheit zu sein, welche erheblicher ist, als dies im Verhältnis der angegebenen Fehler zum Ausdruck kommt.

Physikalisches Institut der E. T. H., Zürich.

¹⁾ Der effektive Radius des ThC' -Kerns berechnet sich nach GAMOW (loc. cit. S. 104, Formel (60)) daraus zu

$$r_0 = (0,714 \pm 0,003) \cdot 10^{-12} \text{ cm}$$

In der Tabelle der Kernradien auf S. 105 benutzt GAMOW für den ThC' -Kern den interpolierten Wert $0,72 \cdot 10^{-12} \text{ cm}$.

Der Kaskadengenerator als stabilisierte Spannungsquelle

von H. Greinacher.

(9. IV. 1943.)

Zusammenfassung. Zum Betriebe eines Kaskadengenerators kann statt gewöhnlichen Wechselstroms periodisch kommutierter Batteriestrom verwendet werden. Da auf diese Weise die störenden Netzschwankungen vermieden sind, erhält man eine konstante Endspannung im vielfachen Betrage der Eingangsspannung. Bei einem verlustfrei arbeitenden Generator ist das Übersetzungsverhältnis einfach gegeben durch die Zahl der verwendeten Kondensatoren bzw. Ventile. Wie in Wirklichkeit die Spannungsverhältnisse sich ergeben, wurde an Hand zweier Modelle untersucht: 1) an einem doppelt wirkenden Generator mit Selenventilen (Verzwölfachung) und 2) einem einfach wirkenden mit Elektronenventilen (Verfünffachung). Zum Schluss wird noch ein Verfahren aufgezeigt, das durch Kombination mehrerer Kaskaden eine wesentlich höhere Vervielfachung erzielen lässt.

Für viele Zwecke, so z. B. zum Betriebe von Zählrohren, Spitzen- und Funkenzählern ist es wünschenswert, konstante Spannung im Betrage von einigen tausend Volt zur Verfügung zu haben. Nicht stabilisierte Gleichspannung erhält man in einfachster Weise durch Entnahme von Wechselstrom aus dem Netz und Aufladen eines Kondensators mit dem hinauftransformierten und gleichgerichteten Strom. Eine Stabilisierung auf der Gleichstromseite, wie sie bei den Netzanschlussgeräten für Spannungen von einigen hundert Volt durch Stabilisator-, bzw. Glättungsröhren üblich ist, kommt hier indessen nicht in Frage. Hingegen kann man versuchen, Spannungskonstanz durch Stabilisierung der Eingangswechselspannung herbeizuführen¹⁾. Auf eine andere Lösung führte mich die Einrichtung des Philips-Netzanschlussgerätes mit stabilisierter Spannung, Prospekt GM 45²⁾, das eine Batterie zur Einregulierung und Konstanthaltung von Spannungen bis zu 300 Volt verwendet. In der Kaskadenschaltung³⁾, die durch ihre Anwendung zur Erzeugung von Höchstspannungen bekannt geworden ist, hat man nämlich ebenfalls ein Mittel, eine höhere Spannung in eine feste Beziehung zu einer niedrigeren zu setzen. Zunächst zeigt die Theorie des Spannungsaufbaus im Kaskadengenerator, die neuerdings bis zur Vierfach-⁴⁾ und Fünffach-Schaltung⁵⁾ entwickelt worden ist, dass stets ein ganzzahliges Vielfaches des Scheitelwertes der verwendeten Wechselspannung entsteht. Es ist nun aber nicht nötig, als Eingangsspannung Wechselspannung mit den unerwünschten Netz-

schwankungen zu verwenden. Man wird ohne weiteres konstante Endspannung erhalten, wenn man periodisch kommutierte Gleichspannung, etwa aus einer Batterie oder einem stabilisierten Netzanschlussgerät für Niederspannung zum Betriebe verwendet. Um nun die Eignung des Kaskadengenerators als Hochspannungsstabilisator zu prüfen, wurden im folgenden an zwei Modellen, einer doppelt wirkenden Sechsfach-Schaltung (Verzwölffachung) mit Selenventilen und einer Fünffach-Schaltung mit Elektronenventilen die Spannungsverhältnisse näher untersucht.

I. 12fach-Schaltung mit Selengleichrichtern.

Das Versuchsmodell (Fig. 1) war zusammengestellt aus zwölf Kondensatoren à $2\ \mu\text{F}$ und zwölf Selengleichrichtern der Bell Telephone Manufacturing Company, die je aus 27 hintereinander geschalteten Elementen ($\Phi = 25\ \text{mm}$) bestanden. Eine Abbildung dieses an der Schweizerischen Landesausstellung 1939 ausgestellten Modells findet sich in „Welt der Atome“, Aarau, Sauerländer, 1940.

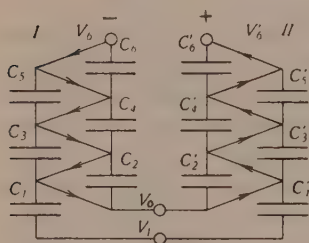


Fig. 1.

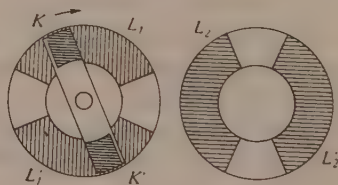


Fig. 2.

Zur Erzeugung der periodisch kommutierten Batteriespannung wurde ein rotierender Kommutator hergestellt (Fig. 2). Dieser besteht aus zwei Cibanit-Scheiben ($\Phi = 6\ \text{cm}$), auf denen je zwei Messing-Lamellen $L_1 L_1'$ bzw. $L_2 L_2'$ ($\Phi = 4\ \text{cm}$) angebracht sind. Sie stehen sich coaxial im Abstand von $6\ \text{mm}$ gegenüber (in Fig. 2 zwecks Verdeutlichung nebeneinander gezeichnet). Zwischen den Scheiben rotiert ein Cibanitstäbchen mit den beiden Kontaktbürsten KK' , die einander gegenüberliegende Lamellenstücke miteinander verbinden. An $L_1 L_1'$ liegt die Batteriespannung, an $L_2 L_2'$ der Generatoreingang (Punkte $V_0 V_1$). Ein mit der Achse verbundenes Zählwerk erlaubt in Verbindung mit einer Stoppuhr die Tourenzahl festzustellen. Bei einer einmaligen Umdrehung wird viermal umgepolt, oder die Frequenz n der erzeugten rechteckigen Wechselspannung beträgt das Doppelte der Tourenzahl z .

Es wurde nun untersucht, inwieweit das Modell mit Selen-
gleichrichtern die Anforderungen an einen idealen (unbelasteten)
Kaskadengenerator erfüllt. Diesem kommen folgende Eigenschaften
zu: 1) Die erzielte Spannung hängt nicht von der Frequenz und
der Form des eingangs verwendeten Wechselstroms ab, sondern
nur von dessen Scheitelwert. 2) Das Verhältnis von Endspannung
zu Eingangsspannung ist gleich der Zahl der verwendeten Kondens-
atoren, bzw. Ventile. 3) Die Gleichspannung verteilt sich voll-
kommen gleichmässig auf die Kondensatorenreihe, einzig die Kon-
densatoren $C_1 C_1'$ besitzen nur die halbe Spannung. 4) Im statio-
nären Zustand ist der Strombedarf 0. 5) Eine Welligkeit der er-
zielten Spannung ist nicht vorhanden.

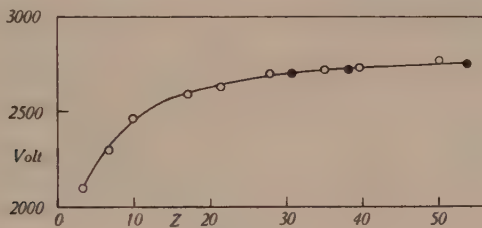


Fig. 3.

In Fig. 3 sind nun zunächst die Messpunkte für die Endspan-
nung als Funktion der Tourenzahl z bei einer Batteriespannung von
260 V aufgenommen. Die Messungen sind bei abnehmendem z aus-
geführt. Die nachherigen Kontrollpunkte • ergeben einen etwas
kleineren Wert, da die Spannung der verwendeten Leclanché-
Batterien infolge einer Stromentnahme von 30 mA etwas sank.
Zu Beginn der Messreihe betrug der Strom sogar 38 mA. Die Selen-
zellen zeigen daher eine Art Formierung⁶⁾. Resultat: Selbst bei
 $z = 50$, also einer Periodenzahl von 100, nimmt die Endspannung
noch etwas zu. Diese ist daher ganz allgemein (also auch bei gewöhn-
lichem Wechselstrom) frequenzabhängig. Immerhin ist die End-
spannung weitgehend stabil, sofern z nicht zu klein und zu variabel
gewählt wird.

Nun wurde das Übersetzungsverhältnis als Funktion der Pri-
märspannung bestimmt. Die Anwendung einer hohen Tourenzahl z
war nach dem Vorangegangenen angezeigt. Für $z = 54$ wurde Kurve
Fig. 4 erhalten. Man findet praktisch also Proportionalität zwischen
Ausgangs- und Eingangsspannung. Das Verhältnis zwischen beiden
beträgt 10,65 statt theoretisch 12. Dies entspricht dem Wert, der
auch aus Fig. 3 folgt (10,6). Mit der Spannung von 3500 V ist man
übrigens noch wesentlich unter der maximal zulässigen. Da ein

Selenelement 15—16 V Sperrspannung⁷⁾ verträgt, und im ganzen 12×27 Elemente vorhanden waren, ergibt dies für die zulässige Spannungsgrenze ca. 5000 V. Zum Vergleich ist in Fig. 4 auch der Stromverbrauch als Funktion der Eingangsspannung aufgetragen. Er wächst ungefähr quadratisch mit dieser.

Ferner wurde das Übersetzungsverhältnis verglichen bei kommutiertem Gleichstrom und bei Wechselstrom. Es ergab sich

bei Batteriespannung 229,0 V, $z = 54$ ($n = 108$): 2450 V, Übersetzung $10,7 \sim 89\%$;

bei Wechselstrom 229,0 V_{eff} (324 V_{max}), $n = 50$: 2900 V, Übersetzung $9,0 \sim 75\%$.

Batteriespannung bzw. rechteckige Wechselspannung ergibt also den günstigeren Wert.

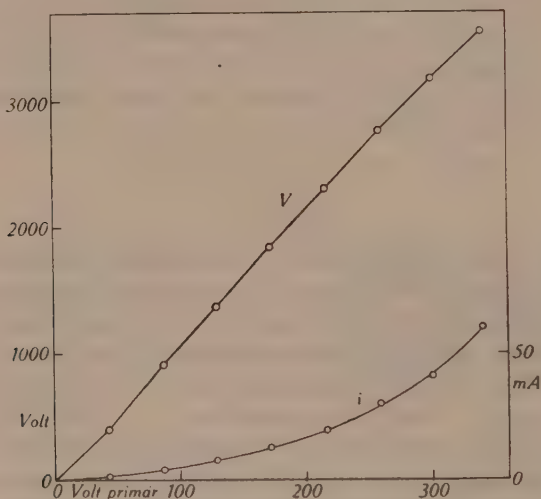


Fig. 4.

Zur Frage der Verteilung der Endspannung auf die einzelnen Kondensatoren sei folgende Messreihe wiedergegeben. An einem statischen Voltmeter (0—300 V, 1 Teil = 5 V) wurden die Teilspannungen abgelesen:

Volt	Volt	Volt	Volt
C_1 106	C_2 205 (205)	C_1' 105	C_2' 203
C_3 202	C_4 197 (197,5)	C_3' 200	C_4' 196
C_5 197	C_6 195 (195)	C_5' 196	C_6' 194
Summe 505	597	501	593

Die Eingangswechselspannung betrug hierbei 84 V für die 1. und 3. und 83,5 V für die 2. und 4. Kolonne. Die Messungen der 2. Kolonne wurden zur Kontrolle wiederholt. Resultat: Die Kaskadenhälfte II zeigt etwas geringere Spannung. Jedoch sind die Unterschiede so klein, dass an einem Braun'schen Elektrometer für die Gesamtspannung der Hälfte I und II kein Unterschied festgestellt werden konnte. Infolge der unvollkommenen Ventilwirkung der Selenzellen nehmen die Teilspannungen mit zunehmender Nummer der Kondensatoren etwas ab. Der Strombedarf nimmt, wie aus Fig. 4 hervorgeht, mit steigender Endspannung ziemlich beträchtliche Werte an und beträgt bei 3500 V bereits 60 mA. Auch mit der Tourenzahl z nimmt der Strom, wie folgende Zahlen zeigen, zu.

z	3	6	11	22	58
mA	4	5	6	7	9

Ein Vergleich des Stromverbrauchs bei Verwendung von Wechselspannung und Batteriespannung ergab folgendes:

Wechselspannung:

125 V_{eff}, $n=50$, Endspannung: 1600 V, Strom: 11,4 mA.

Gleichspannung:

166 V, $n = 50$, Endspannung: 1600 V, Strom: 8,8 mA.

Der Stromverbrauch ist also bei Batteriebetrieb bei gleicher Endspannung etwas geringer.

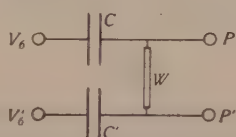


Fig. 5.

Die Welligkeit der Endspannung wurde mit einem Philips-Kathodenstrahloszillographen untersucht. Fig. 5 zeigt die für die Zuführung benützte Schaltung. CC' : Blockkondensatoren von $2 \mu\text{F}$, W : Hochohmwiderstand, $V_6 V_6'$: Endklemmen des Generators, PP' : Zuführung zum Oszillographen. Um die vollen Amplituden der Oszillographenkurve zu erhalten, durfte W nicht zu klein gewählt werden. 0,1 Megohm erwies sich als hinreichend gross. Die zur Synchronisierung verwendete Kippfrequenz ist für alle Aufnahmen dieselbe.

In Fig. 6 sind die erhaltenen Kurven wiedergegeben. abc wurde mit Wechselstrom, def mit kommutiertem Gleichstrom erhalten.

a) Kurvenform der Eingangswechselspannung von 20,1 V.

b) Welligkeit der Endspannung. Eingangsspannung: $132,5 V_{\text{eff}}$. Endspannung: 2000 V. Die Amplitude der Welligkeit betrug ca. 12 V oder 0,6% der Endspannung.

c) Dasselbe für nur eine Kaskadenhälfte (6fach-Schaltung) bei denselben Betriebsverhältnissen. Die Welligkeit besitzt die halbe Periode der vorigen, und beträgt hier die Amplitude 61 V oder 6% der Gesamtspannung von 1000 V.

d) Kurvenform der kommutierten Gleichspannung von 31,9 V. Diese gibt auch über das Verhältnis der Kontakt- und Öffnungsdauer beim rotierenden Kommutator Aufschluss.

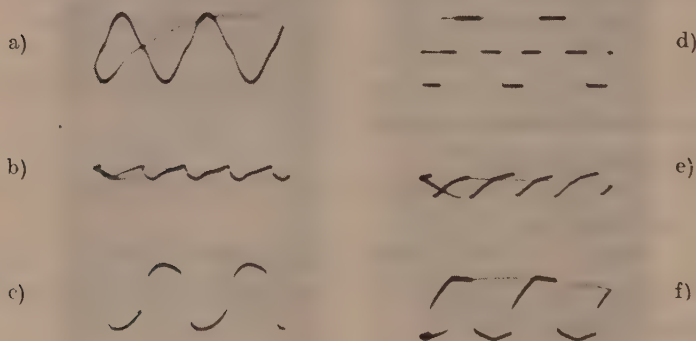


Fig. 6.

e) Welligkeit der Endspannung. Batteriespannung: 197,5 V, Endspannung: 2000 V. Die Amplitude der Welligkeit beträgt ca. 20 V oder 1% der Endspannung.

f) Dasselbe für eine Kaskadenhälfte (6fach-Schaltung) unter denselben Betriebsverhältnissen. Die Welligkeit besitzt wiederum die halbe Periode der vorigen. Die Amplitude beträgt 58 V oder 6% der Gesamtspannung von 1000 V.

Resultat: Die Welligkeit ist ausgeprägt, wenn auch relativ gering. Sie ist bei doppelt wirkender Kaskade von der zweifachen Frequenz, aber wesentlich kleiner. Dies entspricht auch dem über den Aufladevorgang im Kaskadengenerator Gesagten⁵⁾. Wie festgestellt wurde, nimmt die relative Welligkeit (Amplitude: Endspannung) stärker als linear mit der Endspannung zu. Dass der Kaskadengenerator mit Selenventilen zum Betriebe von Zählrohren, wenigstens für Demonstrationsversuche, schon recht geeignet ist, ist inzwischen auch von anderer Seite gezeigt worden⁸⁾.

II. 5fach-Schaltung mit Röhrengleichrichter.

Die genaue Anordnung gibt Fig. 7 wieder. $C_1 C_2 C_3 C_4 C_5$: Kondensatoren von je $2 \mu\text{F}$. $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5$: Vollweg-Gleichrichterröhren Philips, Type 506K, Strom: maximal 75 mA, Heizung: 4 V, 1 A. Sie wurden als Einweg-Gleichrichter verwendet (Parallelschaltung der Anoden). $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$: auf Paraffin isolierte Akkumulatoren 4 V.

Zunächst wurde festgestellt, dass die Endspannung weitgehend unabhängig ist von der Frequenz. Jedoch zeigte sich die zunächst noch ungeklärte Erscheinung, dass bei grösserer Tourenzahl des Kommutators (z über 20) die Endspannung nach anfänglicher Ein-

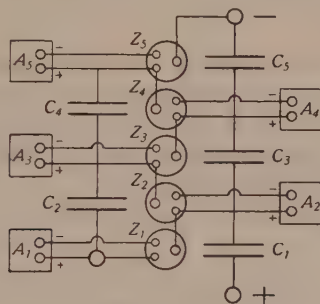


Fig. 7.

stellung noch langsam anwächst. Bei $z = 29$ wurde in einem Fall bei einer anfänglichen Einstellung von 1295 V während weiterer 10 Minuten ein zusätzlicher Anstieg von 165 V beobachtet. Nach kurzem Entladen des Generators trat dann wieder die normale Endspannung auf. Um daher konstante Verhältnisse zu erzielen, musste z bedeutend reduziert werden. Schon bei $z = 10$ war das zeitliche Anwachsen kaum mehr feststellbar. Bei vielen Messungen wurde z durch Einschalten eines Vorgeleges zwischen Motor und Kommutator auf etwa 1 herabgesetzt. Dies wirkt sich auch beim praktischen Gebrauch des Generators als Stabilisator günstig aus, da der Kommutator so eine sehr kleine Abnutzung aufweist und etwa schon mit einem Uhrwerk betrieben werden kann.

Die erzielte Spannungsstabilisierung geht aus folgenden Messresultaten hervor. 1 Minute nach Inbetriebsetzen wurden an einem Braun'schen Elektrometer (0—1500 V, 1 Teil 100 V) folgende Werte abgelesen:

nach Minuten	Volt	6 Stunden später	
		nach Minuten	Volt
0	1240	0	1240*)
10	1240	10	1250
20	1250	20	1245
30	1250	30	1245
40	1250	40	1240
50	1250	50	1245
60	1250	60	1250

*) Bei dieser Reihe wurde nach jeder Ablesung der Generator einmal entladen.

z schwankte innerhalb der Grenzen 0,95 und 1,2. Resultat: Man erhält innerhalb der Grenze der Messgenauigkeit vollkommene Spannungskonstanz.

Um das Übersetzungsverhältnis mit dem theoretischen Wert zu vergleichen, sind 1. die Elektrometerablesungen noch mittelst einer Eichung zu korrigieren. 2. ist der Einfluss der Heizakkumulatoren auf die Spannungsverhältnisse zu berücksichtigen. Die nur ungenau bekannte Eichkorrektur konnte mit + 20 bis 40 V angenommen werden. Ferner ist bei der gewählten Polung der Akkumulatoren die Spannung um etwa $5 \times 4 - 20$ V vergrößert. Man wird also für die für den Vergleich massgebende Endspannung 1245 bis 1265 V annehmen dürfen. Da die Batteriespannung 250,0 V betrug, ergibt sich so ein Übersetzungsverhältnis von 4,98—5,06. Dies stimmt mit dem theoretischen Wert 5 recht gut überein.

Um den Einfluss der Akkumulatoren auf die Endspannung zu prüfen, wurde auch eine Messung mit vertauschter Polarität derselben ausgeführt. Es ergab sich für die Endspannung, wie erwartet, ein um ca. 20 V kleinerer Wert.

Statt einer Batterie lässt sich naturgemäss auch ein Niederspannungsgleichrichter mit stabiler Spannung zum Betriebe verwenden. Mit einem solchen Gerät wurden folgende Zahlen gefunden:

Eingangsspannung (mit statischem Voltmeter gemessen): 248 V, Endspannung (während einer halben Stunde verfolgt): 1240 bis 1260 V, $z = 11$.

Das Übersetzungsverhältnis wird sofort kleiner und wird frequenzabhängig, sobald der Kaskade Strom entnommen wird. Auch nimmt der Eingangsstrom entsprechend zu. Dieser betrug bei unbelastetem Generator weniger als 0,01 mA, sofern $z < 10$, nimmt

aber bei grösserem z etwas zu (entsprechend der oben erwähnten langsamen Zusatzaufladung). So wurde bei $z = 25$ 0,02 mA gemessen. Entsprechend den geringen inneren Verlusten ist auch die Spannungshaltung nach Abschalten der Eingangsspannung sehr gut. Die Spannung ging innert 5 Minuten nur von 1270 auf 1240 V zurück, während beim Selenmodell die Spannung schon innert weniger Sekunden auf die Hälfte sank. Bei belastetem Generator nähern sich dann die Verhältnisse denjenigen beim unbelasteten Generator mit Selenventilen. Nur ist dort die Abweichung vom idealen Verhalten den inneren Verlusten, nicht der Belastung, zuzuschreiben. Die Verhältnisse bei unbelastetem und belastetem 5fach-Generator geben folgende Zahlen wieder (W' - Widerstand // zu den Abnahmeklemmen $V_6 V_6'$).

$W' = \infty$		$W' = 10 \text{ Megohm}$	$W' = 1 \text{ Megohm}$
	z		z
1260 V	5	1190 V	6
1260	8	1215	11
1260	12,5	1230	22
1275*)	22	1230	30
Stromentnahme	0 mA	ca. 0,1 mA	ca. 1 mA
Eingangsstrom	0,02 mA 25	0,5 mA 25	4,3 mA 25
Übersetzungsverhältnis	5,0	4,9	4,5

*) Infolge $z > 20$ etwas zu hoch. Die Batteriespannung betrug hier 251,0 V.

Die Verteilung der Endspannung auf die einzelnen Kondensatoren ergab sich wie folgt:

Messung mit stat. Voltmeter (0—200 V, 1 Teil: 5 V)			Messung mit stat. Voltmeter (0—300 V, 1 Teil: 5 V)		
	(Wiederholg.)			(Wiederholg.)	
C_1^*	88 V	88 V	C_1^*	138 V	137,5 V
C_2	179,5	179	C_2	281	282
C_3^*	179	179	C_3^*	282	282
C_4	179	179	C_4	282	281,5
C_5^*	179	179	C_5^*	282,5	282
Summe*	446 V		Summe*	702 V	
Eingangsspannung	86,0 V		Eingangsspannung	135,6 V	
$z = 11$			$z = 14$		

Es ergibt sich hier also eine vollständig gleichmässige Spannungsverteilung. Um zu zeigen, dass dies auch zutrifft, falls die einzelnen Kondensatoren verschieden gross sind, wurde zu C_5

(2 μF) ein zweiter Kondensator C von 10 μF parallel geschaltet. Vor dem Zuschalten wurde an C_5 gemessen 280 V; nach dem Zuschalten wuchs der Eingangsstrom zuerst stark an unter gleichzeitigem Sinken der Endspannung. Nach einigen Sekunden hatten die Ventile die Spannungsschwankungen ausgeglichen, und es wurde an $C_5 + C$ wieder genau die frühere Spannung 280 V gemessen.

Eine Prüfung der Endspannung am Oszillographen ergab keinerlei Welligkeit, wie dies auch bei dem verlustfreien Arbeiten der Anordnung zu erwarten war. Es musste schon die zweifache Verstärkung am Oszillographen eingeschaltet werden, um überhaupt ein geringes periodisches Zucken feststellen zu können. Jedoch ergab sich bei Belastung des Generators sofort eine gewisse

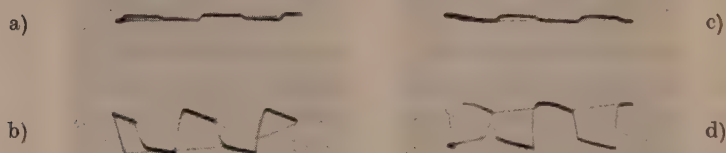


Fig. 8.

Welligkeit. In Fig. 8 sind die mit Wechselstrom (*a b*) und mit Batteriestrom (*c d*) ausgeführten Aufnahmen wiedergegeben. Der Masstab ist derselbe wie bei Fig. 6.

	Endspannung	Stromabnahme über
a) Wechselstrom 130 V eff. $n = 50$	925 V	10 Megohm
b) dasselbe	825	1
c) Batteriestrom 210,3 V $n = 50$	1030	10
d) dasselbe	930	1

Die Welligkeit besitzt bei beiden Betriebsarten etwa dieselbe Amplitude. Sie beträgt bei 10 Megohm Belastung etwa 0,5%, bei 1 Megohm Belastung jedoch bereits ca. 5%. Diese Welligkeit kann nicht nur durch zusätzliche Vergrößerung der Eingangskondensatoren herabgesetzt werden, wie dies üblich ist⁹⁾, sondern auch durch Vergrößerung der Kapazität der Endstufen. So wurde beim Parallelschalten von 10 μF zum Endkondensator C_5 eine Verringerung der Amplitude der Welligkeit von 12% festgestellt.

Anhang.

Wie oben gezeigt, liefert ein Kaskadengenerator mit Elektroventilen in Verbindung mit periodisch kommutierter Batteriespannung eine gleichmässige und gut stabilisierte Hochspannung. Wünschenswert ist die Stabilisierung einer hohen Endspannung durch eine möglichst kleine Eingangsspannung (Batterie). Leider erfolgt hier beim Kaskadengenerator die Vervielfachung additiv. Es möge hier daher ein Weg angegeben werden, der durch Anwendung eines multiplikativen Prinzips zu höheren Übersetzungsverhältnissen führt. Da die Ausgangsspannung jedes Generators wieder als Eingangsspannung für eine weitere Kaskade verwendet werden kann, so lassen sich Aggregate hintereinander schalten. Da man ohnedies einen rotierenden Kommutator benötigt, so kompliziert es die Einrichtung nicht wesentlich, wenn deren mehrere,

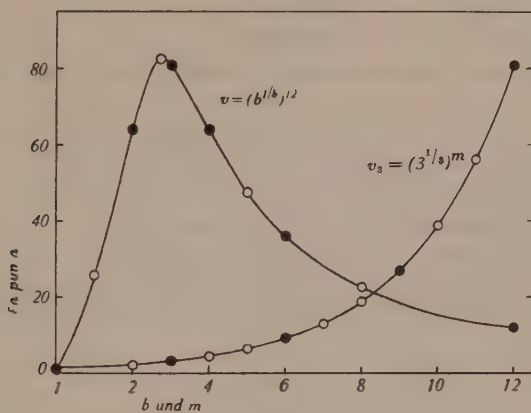


Fig. 9.

etwa auf der gleichen Achse, verwendet werden. Es ergibt sich dann folgende Aufgabe: Gegeben sind m -Kondensatoren und damit auch m -Ventile. Die Zusammenstellung zu einer Kaskade ergibt die m -fache Spannung. Welche Spannung erhält man, wenn man a -Kaskaden mit je b -Kondensatoren (Ventilen) herstellt, und sie unter Zwischenschaltung eines rotierenden Kommutators hintereinander schaltet? Wie müssen bei gegebenem m , a und b gewählt werden, damit man eine maximale Vervielfachung erhält?

Die Vervielfachung v beträgt $v = b^a$, während als fester Betrag gegeben ist $m = ab$. Es ist daher $v = (b^{1/b})^m$. Der Verlauf von $v = f(b)$ ist in Fig. 9 für $m = 12$ aufgetragen. Die Kurven für andere m sind analog. Sie weisen ein Maximum auf. Dies liegt, wie

leicht zu zeigen, bei $b = e$, unabhängig von m , so dass man als maximale Vervielfachung v_{\max} erhält:

$$v_{\max} = (e^{1/e})^m$$

Der der Basis e zunächstliegende ganzzahlige Wert von b ist 3. Wir bezeichnen die damit erzielte Vervielfachung mit v_3 . Man findet, dass v_3 nur um etwa 2% kleiner ist als v_{\max} . Die Kurve für $v_3 = (3^{1/3})^m$ ist ebenfalls in Fig. 9 aufgezeichnet. Sie steigt zunächst langsam, dann aber sehr rasch an. Mit $m = 12$ Konstruktionselementen erhält man bereits $v_3 = 81$, während die Schaltung zu einer einzigen Kaskade nur 12 ergibt. Man erhält also bei Dreierkaskaden mit einem Vierfach-Kommutator bei einer Batteriespannung von 100 V bereits 8100 V stabilisierte Gleichspannung.

Bern, Physikalisches Institut der Universität.

Literatur.

- 1) W. HACKETT, D. C. Journ. scient. instr. **16**, 297, 1939, No. 9; Phys. Ber. **21**, 819, 1940.
- 2) LINDENHOVIUS und RINIA, Phil. Techn. Rundsch. **6**, 54, 1941.
- 3) H. GREINACHER, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **4**, 195, 1921.
- 4) M. JAGGI, H. P. A. **15**, 339, 1942.
- 5) H. GREINACHER, H. P. A. **15**, 518, 1942.
- 6) D. M. DUINKER, Phil. Techn. Rundsch. **5**, 200, 1940.
- 7) W. CH. VAN GEEL, Phil. Techn. Rundsch. **4**, 100, 1939.
- 8) A. BOUWERS & F. A. HEIJN, Phil. Techn. Rundsch. **6**, 74, 1941.
- 9) A. BOUWERS, Elektrische Höchstspannungen, Springer-Verlag 1939, S. 55.

Studie über die dynamische Linse*)

von Franz J. Meier.

(27. III. 1943.)

§ 1. Problemstellung.

Die gewöhnlichen optischen Linsen sind *starre* Körper, deren geometrische und optische Eigenschaften, insbesondere die Brennweite, durch die Materialwahl und Bearbeitung unveränderbar festgelegt sind. Bifokallinsen, Einschalt- und Vorsatzlinsen, Auswechseloptik usw. oder Systeme gekuppelter, mechanisch verschiebbarer Linsen [vgl. LAUBER'sche Akkommodationsbrille¹⁾, Transfokatoren²⁾] bezwecken eine Auflockerung dieser starren Bindung an eine einzige Brennweite.

In einer gemeinschaftlichen Publikation des Verfassers mit F. DESSAUER³⁾ und einer zweiten Mitteilung in dieser Zeitschrift⁴⁾ wurde als Problem der (ganze oder teilweise) Ersatz starrer Linsen und Linsensysteme durch unstarre, zweckmässig elastische angegeben — analog den Augenlinsen höherer Tiere, die durch Variation des Krümmungsradius der Linse akkommodieren. Vermöge der Verwendung elastischer Membranen und flüssiger Füllungen würden die Materialkonstanten der starren Linse: Brechzahl, Dispersion, Krümmungsart, Krümmungsgrad und Linsendicke variabel, sodass also insbesondere die Brennweite stetig veränderlich wäre.

Auf Anregung von Herrn Prof. FRIEDRICH DESSAUER hin hat der Verfasser einige Grundfragen einer solchen Linsenkonstruktion untersucht, insbesondere experimentell geprüft, wieweit mit gegenwärtig zur Verfügung stehenden Kunststoffscheiben Linsen mit variabler Brennweite verwirklicht werden können. Andere Arbeiten des Physikalischen Institutes werden sich eingehender mit den verschiedenen Teilproblemen befassen.

*) Anmerkung der Redaktion: Die Hinweise auf das Anmerkungs- und Literaturverzeichnis gelten nur für die *vollständige* Dissertation, von der die H. P. A. durch die Zeitumstände genötigt nur den Textteil veröffentlichen kann. Die Dissertation kann durch das Physikalische Institut der Universität Fribourg bezogen werden.

§ 2. Definition der dynamischen Linse und die Möglichkeiten ihrer Verwirklichung.

In den beiden ersten Mitteilungen ist dargelegt, dass beim Ersatz des starren Materials eine Trennung der den einzelnen Linsenelementen zukommenden Aufgaben erfolgt.

Die *Linsenschale* wird zur Trennfläche zwischen Linsenkörper und Umgebung. Sie besteht aus einer Membran von sehr guter Lichtdurchlässigkeit, muss aber von sich aus keinen merklichen Beitrag zur Brechung oder Dispersion liefern. Die Linsenschalen werden also im Folgenden als beliebig dünn angenommen und sollen die Eigenschaft haben, sich jeder Druckänderung sofort durch entsprechende Wölbung anzupassen. Sie sollen ferner in genügendem Grad unempfindlich gegen Temperaturschwankungen sein und die notwendige Unangreifbarkeit gegen chemische Agenzien besitzen. Die neuere Kunststofftechnik liefert bereits einige in Betracht kommende Stoffe, die, obgleich in verschiedener Beziehung unvollkommen, doch schon die Durchführung dieser Untersuchungen gestatteten.

Die *Linseform* soll „dynamisch“ sein, d. h. aus den in Anwendung gebrachten *Kräften* hervorgehen, stetig veränderlich einen gewünschten Bereich von Dioptrien durchlaufen und jede gewählte Krümmung während der Versuchsdauer genau einhalten. Je nach dem Zweck werden entweder beide Linsenschalen als elastische Membranen eingesetzt oder nur eine, während die andere eine starre planparallele oder gekrümmte Platte ist. Unter Zuhilfenahme weiterer Füllkammern lässt sich auf diese Weise durch Über- oder Unterdruck jede plan-, bi- oder konkavkonvexe und ebenso jede analoge konkave Linseform bilden. Ausser durch Druckvariation kann diese Form u. a. auch durch radial zu- oder abnehmende Membrandicke und durch zweckmässig ausgebildete Einspannungsart beeinflusst werden. Die Kombination verschiedener Linsenkammern mit geeignet gewählten Wänden und Füllungen sollte es prinzipiell ermöglichen, die sphärische und chromatische Aberration zu korrigieren und auch — ähnlich der Augenlinse — geschichtete (Zwiebel-)Linsen zu bilden.

Die *Linsefüllung* kann an und für sich aus jedem gasförmigen oder flüssigen Stoff bestehen, der sich chemisch mit dem Material der Membranen und der Fassung verträgt und für das interessierende Spektralintervall durchlässig ist. Die damit der Linsenkonstruktion und -kombination zugängliche Skala der Brechungsindizes von Gasen, besonders aber von organischen und anorganischen Flüssigkeiten kann überdies noch weitgehend durch ent-

sprechende Mischung oder Lösungskonzentration abgestuft werden. Gasfüllung mit optisch dichter Umgebung würde Inversion der gewöhnlich mit der (konkaven oder konvexen) Linsenform identischen Linsenwirkung erzeugen. Flüssigkeitsfüllung verschafft der dynamischen Linse gegenüber der starren Glaslinse folgende Vorteile:

1. *Flüssigkeitslinsen sind optisch homogen.* Auch bei sehr grosser Dimensionierung — was mit dünnen Platten als Linsenschalen leichter ausführbar wird — ist diese Eigenschaft des Linsenkörpers gewährleistet ohne die zeitraubenden und komplizierten Vorsichtsmassregeln, die beim Guss, Pressen und Schliff grosser Glaslinsen erforderlich sind.

2. *Flüssigkeitslinsen erweitern den Bereich der verwendbaren Brechungs- und Dispersionszahlen.* Zeichnet man die sich aus dem

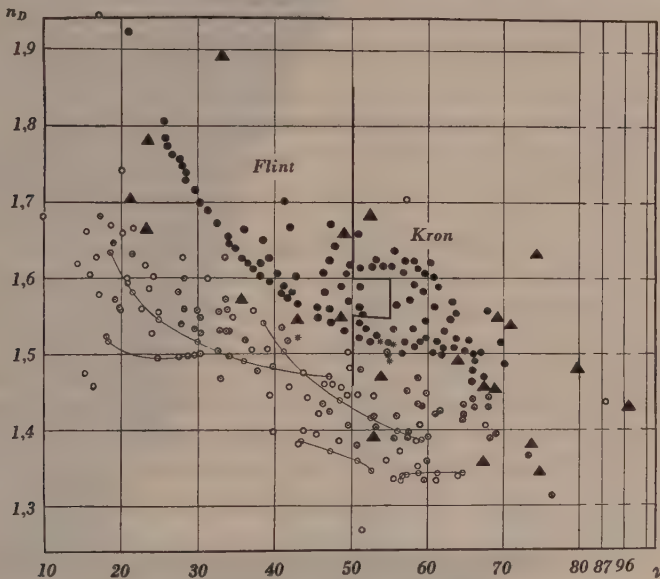


Fig. 1.

Brechungskoeffizient und Dispersionsvermögen.

- = Optische Gläser nach Tabellen von SCHOTT u. GEN.⁵⁾.
- = Liquides réfringents p. comb. optiques, nach DUCLAUX und JFANTET⁶⁾.
- ◻ = Flüssigkeiten nach LANDOLT-BOERNSTEIN⁷⁾ und S. P. THOMPSON⁸⁾.
- * = Plexiglas, nach K. FROELICH⁹⁾.
- ▲ = Kristalle usw. nach LANDOLT-BOERNSTEIN⁷⁾.

Durch Linie verbunden: Mischung, bzw. verschiedene Lösungskonzentration¹⁰⁾. Zur Gewinnung einer allgemeineren Übersicht wurden auch Konstanten von Flüssigkeiten und Kristallen eingetragen, die auf ihre optische Verwendung noch nicht untersucht wurden oder dafür überhaupt nicht in Frage kommen. Temperatur der Flüssigkeit durchschnittlich 18–20° C. Numerische Werte siehe Anhang.

Brechungsindex n_D als Ordinate und der ABBE'schen Zahl $\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$ als Abszisse ergebenden Bildpunkte von optischen Gläsern und Flüssigkeiten auf, so ergibt sich ein Diagramm (Fig. 1), das erkennen lässt, dass es sich nicht nur um eine numerische, sondern um eine qualitative Erweiterung handelt. Flüssigkeiten beherrschen, von Ausnahmen abgesehen, einen von den *Gläsern* deutlich getrennten Bereich. Diese Scheidung gilt aber nicht für Flüssigkeiten und

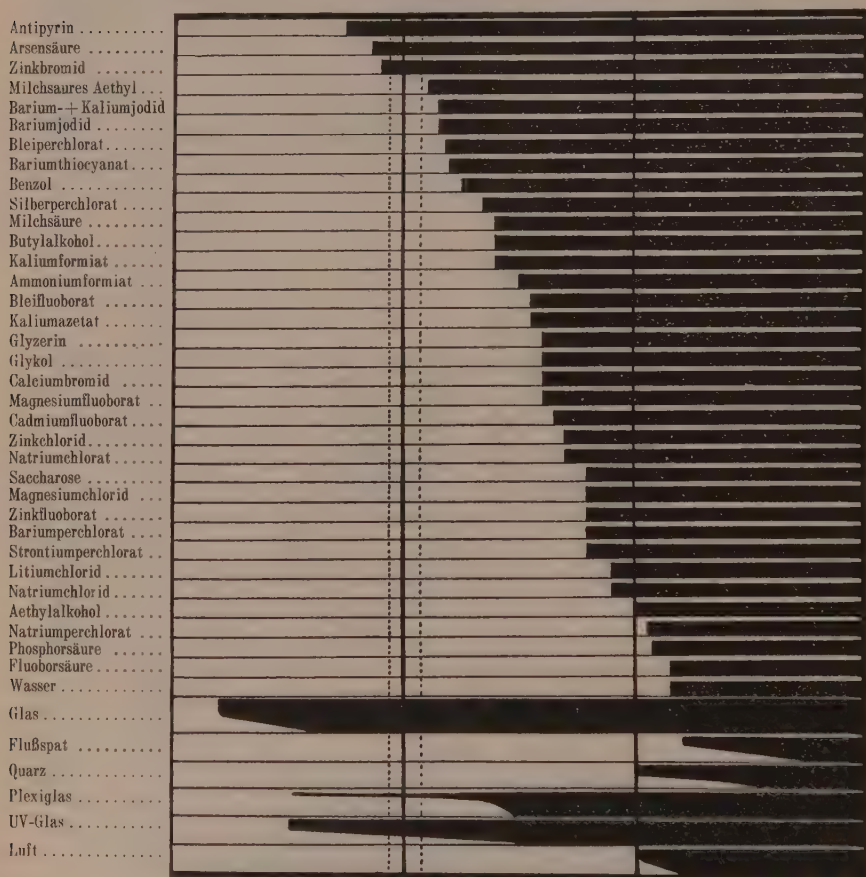


Fig. 2.

Beginn der Absorption im UV-Gebiet (schematisch).

Werte der Gläser nach GRIMSEHL¹³), Plexiglas⁹), Flüssigkeiten⁶), bei denen als Absorptionsbeginn die kürzeste gemessene Wellenlänge angegeben ist. Zwischen punktierten Linien: Zone der biologisch wirksamsten Strahlen. Abgeschrägter Beginn: nach Wellenlänge verschiedene Absorptionsstärke.

Festkörper im allgemeinen, wie die eingetragenen Bildpunkte verschiedener amorpher, iso- und anisotroper Festkörper zeigen. Die Werte eines Kunstharzstoffes (Plexiglas) liegen auf der Grenze der beiden Domänen. Allgemein haben Flüssigkeiten bei gleichem Brechungsexponenten stärkere Dispersion, bei gleichem Dispersionsvermögen den kleineren Brechungsindex als Gläser, wodurch die Variationsmöglichkeit von ν bei gleichem n (bzw. von n bei gleichem ν) bedeutend erweitert wird.

3. *Flüssigkeitslinsen zeigen vorteilhafte Lichtdurchlässigkeits-eigenschaften.*

Sie *verbreitern* gegenüber gewöhnlicher Glasoptik den Durchlässigkeitsbereich speziell nach der ultravioletten Seite, wie die schematische Zusammenstellung Fig. 2 zeigt. In einigen Fällen wird nahezu die Absorptionsgrenze von Quarz- oder Flußspatlinsen erreicht. Wasser z. B. ist nach Untersuchungen von J. DUCLAUX und P. JEANTET¹¹⁾ ausserdem für Wellenlängen zwischen 210 und 180 m μ transparenter als Quarz. Der Durchlässigkeitsbereich wird anderseits auch *engeengt* durch Linsenfüllungen mit geeigneter Absorptionsfähigkeit. So lässt sich die selektive Durchlässigkeit gewisser Flüssigkeiten auswerten zu Filterlinsen oder sogar Monochromator-Linsen, die z. B. als Kondensoren dienen können. Solche Filterflüssigkeiten sind z. B. von CHR. WINTHER aus wässrigen Lösungen anorganischer Salze zu einem Farbfilterersatz für Quecksilberlampen zusammengestellt worden¹²⁾. Es steht auch die Möglichkeit offen, gewisse reversible photochemische Eigenschaften von Flüssigkeiten auszuwerten, etwa im Sinne einer analog der Iris selbsttätigen Lichtintensitätsregulierung.

Aus diesen Feststellungen geht hervor, dass die Verwendung von flüssigen brechenden Substanzen als Linsenkörper numerisch und qualitativ neue, entwicklungsfähige Möglichkeiten zur Herstellung von Linsen und Linsensystemen (dynamische oder mit starren Linsen kombinierte) eröffnet, die durch optische Gläser allein nicht verwirklicht werden können.

§ 3. Einschlägige Untersuchungen.

Die Orientierung über einige der angedeuteten Fragen ist durch die bereits vorliegenden Veröffentlichungen erleichtert. Es handelt sich dabei um Untersuchungen über *starre Hohllinsen* von grosser Dimensionierung und verschiedenem Krümmungscharakter¹⁴⁾, um Verwertung von *Flüssigkeit als Zwischenmedium* in optischen Systemen von Spektrographen¹⁵⁾, ferner um massive *Kunststofflinsen*, deren Vor- und Nachteile¹⁶⁾. Über Teilfragen hinaus auf

die eigentliche Grundidee einer *variablen Linse* zielen der (abgebrochene) Versuch von H. LAUBER mit Kugelschalen aus Glas¹⁷⁾, ein Vorlesungsexperiment von H. GREINACHER zur Demonstration der Augenakkommodation¹⁸⁾, eine Arbeit von R. GRAHAM über gekreuzte Zylinderlinsen¹⁹⁾. Aus *Patentschriften* ist ersichtlich, dass das Problem einer regulierbaren Linse in technischen Kreisen verschiedentlich aufgegriffen wurde. Abgesehen von Plänen zur Konstruktion starrer Hohlinsen²⁰⁾ liegen Entwürfe vor, die in verschiedenen Varianten das Prinzip einer Linse mit veränderlicher Brennweite beschreiben. Der Mechanismus dieser Regulierung besteht dabei durchwegs in einer Änderung der Linsenschalenkrümmung. Der hierfür notwendige Druck wird direkt auf den Linsenäquator oder durch Änderung des Füllvolumens als Binnendruck auf die Schalenfläche ausgeübt²¹⁾.

Etwas Methodisches über die physikalischen Grundlagen des von uns eingeschlagenen Weges zur Lösung des Problems oder eingehendere quantitative Versuchsergebnisse über die Eigenschaften solcher Linsen konnten, wie schon in Mitteilung 1 bemerkt, nirgends gefunden werden. (Näheres siehe Anmerkungen.)

§ 4. Spezielle Zielsetzung der Untersuchungen.

Ein Kernproblem der dynamischen Linse liegt ganz offensichtlich in den *Linsenschalen*, die der besonderen Art der physikalischen Beanspruchung gewachsen sein und innerhalb eines gewissen Bereiches bei verschiedenem Krümmungsgrad und gewünschter Krümmungsdauer stets optisch brauchbare Grenzflächen liefern müssen. Die Probleme der Linsenfüllung wie Zusammensetzung, Druck- und Temperaturabhängigkeit der mechanischen und optischen Eigenschaften, spektrale Durchlässigkeit usw. sind anderen Arbeiten vorbehalten. Es soll daher untersucht werden:

- I. Welche Eigenschaften die Linsenschalen haben müssen, um ihren Zweck zu erfüllen;
- II. wieweit Linsenschalen aus Kunststoffmaterial diesen Anforderungen genügen und in welcher Richtung die Entwicklung auf Grund der experimentellen Ergebnisse einzusetzen hat.

ERSTER TEIL.

Mechanische und optische Bedingungen.**§ 5. Biegsamkeit und Dehnbarkeit.**

Die optische Wirkung der Linse ist bestimmt durch Material und Form des Linsenkörpers. Bei der vorgenommenen Trennung der Linsenelemente soll für die optischen Materialeffekte (n, ν usw.) nur die Füllung, für die Form der Linse nur die Schale massgebend sein. Es muss also die Schale gegenüber der Dicke der Füllung *hinreichend dünn* sein, um nur als „Fläche“ zu wirken, d. h. bei einem Schalenradius a muss die Schalendicke $h \ll a$ sein.

Ferner sollen die Linsenschalen durch verschieden starke Wölbung einen genügend breiten Dioptrienspielraum ermöglichen. Es folgt aber aus der Gleichung für dünne (plankonvexe) Linsen, dass

$$\frac{dD}{dR} = - \frac{n-1}{R^2},$$

d. h. die Änderung der Brechkraft D ist umgekehrt proportional dem Quadrat des Krümmungsradius R . Erfolgt daher die Auswölbung der Linsenschalen vom Stadium der ebenen Platte aus ($R = \infty$), so sind zur Erreichung eines auch nur kleinen Dioptrienbereiches grosse Krümmungsänderungen notwendig, also Durchbiegungen der Scheibe, die ein Vielfaches der Scheibendicke h ausmachen. Hieraus lässt sich für manche Fälle die Zweckmässigkeit einer Vorkrümmung erkennen. Ist y_0 die Durchbiegung im Schalenzentrum, dann können die Linsenschalen die Beanspruchung $y_0 \gg h$ nur dann leicht leisten, wenn wiederum $h \ll a$.

Die erste erforderliche Eigenschaft der Schalen, leicht deformierbar zu sein, lässt sich somit kurz ausdrücken

$$a \gg h \ll y_0$$

Diese Dimensionsverhältnisse entscheiden die Frage, ob die Theorien angewendet werden können, welche für die Durchbiegung dünner, am Rande eingespannter, unter einseitigem gleichmässig verteiltem Überdruck stehenden Kreisplatten entwickelt wurden. Auf Grund von $y_0 \gg h$ scheiden aus die KIRCHHOFF'sche²²⁾ und analoge Theorien, deren Gültigkeitsbereich infolge der Voraussetzung $y_0 \ll h$ und der angenommenen dehnungslosen Mittelfläche auf Durchbiegungen von maximal $\frac{2}{5}$ Plattendicke beschränkt ist, wenn der Fehler nicht mehr als 10% betragen soll²³⁾. Für grössere Durchbiegungen $y_0 \gg h$ existieren neben verschiedenen Näherungsverfahren²⁴⁾ eine Lösung von H. HENCKY²⁵⁾ für den

Grenzfall der Platte mit verschwindender Biegesteifigkeit (vollkommen biegsame Haut) und eine strenge allgemeine Lösung von ST. WAY²³⁾. Hiervon muss vorderhand die HENCKY'sche Theorie beiseite gelassen werden, weil das zur Verfügung stehende Material die Voraussetzung der verschwindenden Biegesteifigkeit nicht erfüllt. Die Anwendung der Lösung von ST. WAY oder eines der Näherungsverfahren, unter welchen das von K. FEDERHOFER²⁶⁾ die beste Übereinstimmung mit der strengen Lösung und praktisch hinreichende Genauigkeit besitzt, ist ebenfalls sehr unsicher, aus zwei Gründen. Einerseits wird der strenge Geltungsbereich dieser für „grosse“ Durchbiegungen entwickelten Theorien durch die Voraussetzung, die Krümmung der Platte solle schwach sein, auf „relativ grosse“ beschränkt. Das Verhältnis y_0/h (Durchbiegung: Plattendicke) bleibt für die experimentell untersuchten Platten bei WAY unter 1,5 und bei FEDERHOFER unter 1,2. Andererseits setzen die Theorien die strenge Gültigkeit des HOOKE'schen Gesetzes voraus. Die Frage ist aber noch nicht abgeklärt, inwieweit die auf bestimmten Voraussetzungen und Vernachlässigungen basierende klassische Elastizitätstheorie anwendbar ist auf die neuartigen Kunststoffe, aus denen die Linsenschalen bestehen. Unter diesen Umständen können Berechnungen auf Grund dieser Theorien nur im Bereiche von Durchbiegungen in der Grössenordnung der Plattendicke Anwendung finden und auch hier nur Näherungswert haben.

§ 6. Elastische Deformierbarkeit.

Der Mechanismus einer variablen Linse verlangt nicht nur biegsame, sondern *elastisch* verformbare Linsenschalen. Sie müssen also so struktuiert sein, dass der einer bestimmten Belastung entsprechende Gleichgewichtszustand sich ohne Verzögerung einstellt, die aufgenommene Energie verlustlos während der ganzen Dauer der Beanspruchung aufgespeichert bleibt, und ein genügend breites HOOKE'sches Intervall momentane und (wenigstens annähernd) vollständige Reversibilität der Verformung nach Verminderung oder Aufhebung der Belastung ermöglicht.

In Fig. 1 der ersten Mitteilung³⁾ wurde schematisch dem ideal-elastischen Verlauf der Schalenbeanspruchung, wie er diesen Forderungen entspräche, der tatsächliche gegenübergestellt²⁷⁾. Es ist weder die Zeitunabhängigkeit noch die Konstanz noch die Verlustlosigkeit des elastischen Kräftespiels hinreichend erfüllt. Der Grund der Abweichungen liegt in der Struktur des derzeitigen Materials. Die als Linsenschalen verwendbaren Scheiben bestehen

aus Kunstharzen, die zum Typ der „Gläser“ oder „eingefrorenen Flüssigkeiten“²⁸⁾ gehören, mit sehr grossen Molekülen [Mol. Gew. bis Grössenordnung 10^6 ,²⁹⁾], geringer Wärmefestigkeit³⁰⁾ und entsprechend niedrigem Temperaturintervall, wo sie vom spröden über einen viskosen zum eigentlich plastischen Fliesszustand übergehen. Die sich daraus ergebenden elastisch-plastischen Nachwirkungen, Hysteresis und remanente Dauerverformung auch nach geringen längerdauernden Beanspruchungen, also das Fehlen eines eigentlichen HOOKE'schen Bereiches, scheinen die Verwendung von Kunststoffen als Linsenschalen und damit die Verwirklichung der dynamischen Linse zu verunmöglichen. Um trotzdem der Lösung des Problems näher zu kommen, muss ein der strukturellen Eigenart der Kunststoffe angepasster Weg gefunden werden.

Die ausserordentlich verwickelten, energieaufspeichernden und energieverzehrenden Vorgänge, welche sich in den beanspruchten Schalen abspielen, sind auf das Vorhandensein verschiedenartiger Elementarbezirke³¹⁾, gegenseitig verbunden durch verschieden geartete Bindungsmechanismen mit verschiedenen Relaxationszeiten zurückzuführen. Ausschlaggebend sind die *Bindungsmechanismen*, deren energiespeichernde Fähigkeit, gemessen durch den Teilmodul E_i ($i = 1, 2, \dots$), verschieden gross ist, weshalb die auf sie entfallenden Anteile der rücktreibenden Kraft mit verschieden langen *Relaxationszeiten* λ_i ($i = 1, 2, \dots$) abklingen. Die Anzahl, Dauer und Kombination dieser Relaxationszeiten, abhängig von der Grösse, Gestalt und (ketten-, netz- oder knäuel-förmigen) Anordnung der Makromoleküle, bestimmen die deformationsmechanischen Eigenschaften der Kunststoffsubstanz. Auch bei einfachen Substanzen muss mit einer Vielheit von Bindungsmechanismen gerechnet werden, also auch mit einem entsprechenden Relaxationszeiten-Spektrum³²⁾ bzw. -Kontinuum³³⁾. Wenn praktisch mit ganz wenigen diskreten λ -Werten gerechnet wird, so ist dies nur eine Annäherung des tatsächlichen Sachverhaltes³⁴⁾, insofern diese λ Häufungswerte vieler, nahe beieinanderliegender Abklingungszeiten darstellen, deren Feinstruktur erst durch verfeinerte Messmethoden ergründet werden kann³⁵⁾.

Als Norm für die Beurteilung der Elastizität von Kunststoffmaterial gilt das Relaxationszeiten-Verhältnis beim Kautschuk. Der kautschukelastische Zustand bei Zimmertemperatur ist nach W. KUHN unter Einbeziehung der von E. WOHLISCH, K. H. MEYER und H. MARK gemachten Beobachtungen dadurch gekennzeichnet, dass neben einer Gruppe von Bindungsmechanismen mit äusserst kurzer Relaxationszeit ($\lambda_{\text{MICRO}} = 10^{-5}$ sec) nur ein einziger Bindungsmechanismus mit praktisch unendlich langer Relaxations-

zeit ($\lambda_{\text{MACRO}} = \infty$) auftritt. Demnach gilt analog dazu ganz allgemein als Kriterium der Hochelastizität das Vorkommen zweier sehr stark voneinander verschiedener Relaxationszeiten, wobei aber die massgebenden Bindungsmechanismen auch anders beschaffen sein können als beim Kautschuk³⁶). Hochmolekulare Stoffe zeigen ganz allgemein solche Hochelastizität, ohne jedoch eigentliche Kautschukelastizität zu besitzen, da ihre langen Relaxationszeiten zwar grössenordnungsmässig mehrfach die kurzen übertreffen, jedoch immer noch von endlichen Wert sind. Hieraus ergibt sich die Notwendigkeit der Kenntnis der λ -Verhältnisse, da die elastische Tauglichkeit von Kunststoff-Linsenschalen nicht allein nach dem (gegenüber Metallen meist sehr kleinen) Modulwert E beurteilt werden kann, ganz abgesehen davon, dass die gewöhnlich angegebenen E -Werte³⁷) nach statischen, für Metalle normalisierten Verfahren gemessen sind³⁸), denen gegenüber dynamische Bestimmungsmethoden, die dem Kunststoffcharakter Rechnung tragen, bedeutend höhere E -Werte liefern³⁹).

Die Auswirkung der Relaxationszeiten, zu deren Erfassung verschiedene Modellvorstellungen⁴⁰) ausgearbeitet und zahlreiche Studien⁴¹) unternommen wurden, macht sich auf zweierlei Arten geltend: durch Zunahme der Verformung, wenn die äussere Spannung S konstant gehalten wird ($\dot{S} = 0$), oder durch Abklingen der inneren Spannung, wenn die Verformung y konstant, d. h. festgehalten wird ($\dot{y} = 0$). Wie sich aus diesem doppelten Aspekt ein Weg zu einer vorläufigen Lösung des Linsenschalen-Problems ergibt, wurde in der ersten Mitteilung³) an Hand der MAXWELLSchen Relaxationsgleichung⁴²) gezeigt. Diese kennt nur eine einzige Relaxationszeit; die makromolekularen Kunststoffe sind indessen aufzufassen als eine Kombination verschiedener „Maxwell-Körper“, die einzeln dieser Gleichung folgen. Um den tatsächlichen Verlauf der Deformation wiederzugeben, wie er experimentell festgestellt ist⁴³), wurden auf Grund des erweiterten Relaxationszeit-Begriffes Theorien von K. BENNEWITZ und H. RÖTGER³¹), W. HOLZMÜLLER und E. JENCKEL³¹) u. a.⁴⁴) entwickelt.

Im Falle konstanter Belastung ($\dot{S} = 0$) ergibt sich zur Beschreibung der elastisch-plastischen Verformung eine Gleichung vom Typus der Formel, die N. W. TAYLOR, E. P. McNAMARA und J. SHERMAN⁴⁵) empirisch an Natronkalksilikatgläsern gefunden haben. Die Gesamtverformung y infolge äusserer Krafteinwirkung stellt sich, ohne Berücksichtigung der Trägheitskraft, wie folgt dar:

$$y = y_0 (1 + \sum s_i (1 - e^{-q_i t}) + \tau t) \quad (1)$$

worin y_0 die augenblicklich erfolgende Anfangsverformung, das Glied mit dem Summationszeichen die durch die Anzahl Relaxationszeiten charakterisierte elastische Nachdehnung und das letzte Glied die zeitproportionale plastische Verformung zum Ausdruck bringt*). Stellt man die dynamische Linse durch Druckeinwirkung auf irgendeine gewünschte Wölbung (Brennweite) ein und hält — wie man es bei metallischen Scheiben tun würde — den Druck konstant, so geht die Linse von der momentan angenommenen Wölbung in grössere Wölbungen über. Dieses Verhalten der Linsenschalen, gemessen an der Veränderung des Biegungs-

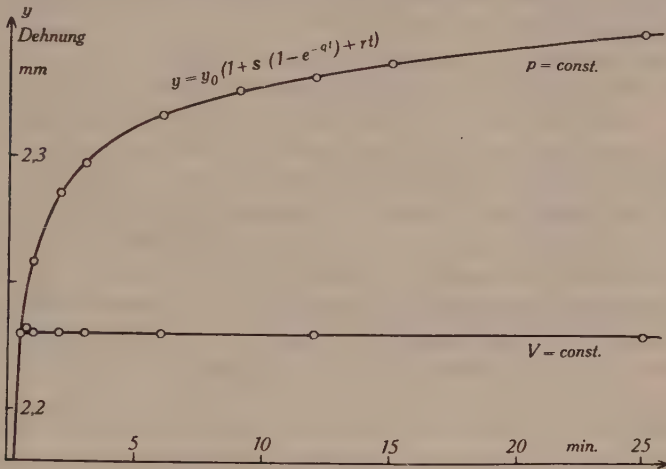


Fig. 3.

Typus des Verhaltens bei konstantem Druck p und bei konstantem Füllungsvolumen V . —o— = Experimentelle Werte, gemessen an einer 0,5 mm dicken Melopasplatte. Die $V = \text{konst.}$ -Kurve ist, aus Gründen der besseren Darstellung des typischen Unterschiedes im Verhalten, parallel zu sich verschoben an die Momentandehnung der $p = \text{konst.}$ -Kurve angeschlossen. Gleichung für 2 Relaxationszeiten.

pfeiles im Schalenzentrum, entspricht im Grundzug dem Deformationsverlauf bei einfacher Dehnung (Fig. 3: $p = \text{const.}$ -Kurve). Es ist offensichtlich, dass die Bedingung $\dot{S} = 0$ nicht zu einer Scharfeinstellung der dynamischen Linse führen kann, da eine bleibende Gleichgewichtsform unter konstantem Druck nicht oder erst nach sehr langer Zeit zustande kommt. Hingegen können diese je nach Material verschiedenen Verformungskurven dazu dienen, durch blossen Vergleich das geeignetste Material auszu-

*) Bezüglich der expliziten, inhaltlich äquivalenten Neuformulierung der ursprünglich empirischen Koeffizienten s_i , q_i , r , speziell betreffs Zusammenhang der Relaxationszeiten λ_i mit ihnen, muss der Kürze wegen auf die genannten Originalarbeiten³¹⁾ verwiesen werden.

wählen oder durch graphische Auswertung auf die Anzahl der vorkommenden Relaxationszeiten zu schliessen.

Im Falle festgehaltener Verformung ($\dot{y} = 0$) ergibt die Integration der Maxwell'schen Gleichung in der von W. KUHN erweiterten³⁴⁾ und auf die zwei bei Hochelastizität auftretenden Gruppen sehr kurzer (λ_K) und ziemlich langer (λ_L) Relaxationszeiten angewandten Form:

$$S_t = S_{OK} e^{-\frac{t}{\lambda_K}} + S_{OL} e^{-\frac{t}{\lambda_L}}$$

Wird also die äussere Verformung der Linsenschalen nach der Scharfeinstellung in geeigneter Weise (z. B. durch Absperren und Konstanthalten des Füllvolumens) fixiert, so ist damit ein *äusserer* sofortiger Gleichgewichtszustand erreicht (vgl. Fig. 3, die $V = \text{const}$ -Kurve). Die zur Zeit $t = 0$ in den beanspruchten Schalen bestehenden Teilspannungen S_{OK} und S_{OL} werden aber entsprechend ihren zugehörigen Relaxationszeiten λ_K und λ_L abklingen, und zwar auf Kosten der Reversibilität der Deformation, sofern die Fixierungsart tatsächlich jede äussere Weiterverformung verunmöglicht. Der Gleichgewichtszustand ist daher nur dann echt, wenn er auch ein innerer ist, d. h. wenn die Gesamtspannung S_t für jedes t konstant bleibt. Dies ist nach der obigen Gleichung möglich, wenn $\lambda_K \rightarrow 0$ und $\lambda_L \rightarrow \infty$, d. h. wenn die Linsenschalen Kautschukelastizität besitzen.

Obgleich die zurzeit verfügbaren Kunststoffe dieser Bedingung noch sehr unvollkommen entsprechen, lässt sich in dieser Methode ein für den Deformationsmechanismus der dynamischen Linse massgebendes Lösungsprinzip erkennen, bei dem umso mehr durch die Volum-Konstanz auch die geometrische Volumform-Konstanz gewährleistet ist, je besser im Schalenmaterial die intermolekularen Konstellationsänderungen, etwa analog der Vulkanisierung des Kautschuks durch Vernetzung mit Schwefelbrücken⁴⁶⁾, unterbunden werden können, d. h. je kautschukelastischer die Linsenschalen sind.

§ 7. Widerstandsfähigkeit gegen Temperaturschwankungen.

Als „eingefrorene Flüssigkeiten“ mit fixierter Struktur²⁸⁾ haben sowohl die Silikatgläser als auch die Kunstharzgläser die thermische Charakteristik der Flüssigkeiten, die jedoch bei den organischen Kunststoffen viel stärker hervortritt⁴⁷⁾ als bei den anorganischen Glassorten. Bei Zimmertemperatur sind letztere wegen ihres hohen Schmelzpunktes noch sehr stark „eingefrorene“ Flüssigkeit, während die Kunstharze meist schon nahe ihrer Wärme-
festigkeitsgrenze sind (35–100°).

Die Temperaturabhängigkeit der Kunststoffe ist sehr kompliziert. Bei härtbaren kann wenigstens annähernd eine höchstzulässige Dauertemperatur angegeben werden, unterhalb welcher sich bestimmte Materialeigenschaften auch bei langzeitiger Wärme- einwirkung nicht wesentlich ändern. Bei thermoplastischen — solche kommen für Linsenschalen in Betracht — ist eine Charakterisierung schwieriger, da sie bei steigender Temperatur allmählich erweichen⁴⁸⁾. Wärmezufuhr bewirkt eine Ausdehnung des Materials und eine Änderung seiner Festigkeitseigenschaften. Bei gleicher Belastung aber höherer Temperatur nimmt die Gesamtdehnung zu, während durch die gesteigerte Bewegung der Moleküle der innere Zusammenhalt gelockert wird, so dass neben Abnahme der Dehnungs-³⁸⁾ und Biegezugfestigkeit⁴⁹⁾ vor allem ein rascherer Ablauf der Nachwirkungserscheinungen eintritt⁵⁰⁾. Die E_i -Werte nehmen proportional der steigenden Temperaturen leicht ab⁵¹⁾, während die entsprechenden, sehr temperaturabhängigen Relaxationszeiten λ_i einem Exponentialgesetz folgen⁵²⁾. Die Verkürzung der Relaxationszeiten bewirkt ein schnelleres Erreichen des stationären Zustandes (vgl. die Messungen an Polystyrolgläsern⁵³⁾), was nicht so sehr auf eine Beschleunigung der Mikro-Brownschen Bewegung (Abstandsveränderung benachbarter Atome, Winkeldeformationen), sondern vorwiegend der Makro-Brownschen Bewegung (Umlagerung, Gestaltänderung der Moleküle) zurückzuführen ist⁵⁴⁾.

Eine Kunststofflinse wird infolge dieser thermischen Verhältnisse temperaturempfindlicher sein als eine gewöhnliche Glaslinse. Die Auswirkungen des Kunststoffcharakters werden jedoch geringer sein, wenn es sich nicht um eine starre Linse aus Kunststoff, sondern um eine dynamische handelt, bei der nur die dünnen Linsenschalen aus diesem Material bestehen. Wärmestauungen infolge schlechter Wärmeableitung können bei verschwindender dritter Dimension nicht so leicht entstehen wie bei einem Vollkörper. Da ausserdem die spezifische Wärme der Kunststoffschalen (soweit bekannt) und der Füllflüssigkeiten bedeutend grösser ist als die der Glaslinsen, bleibt unter gleichen Abkühlungsverhältnissen die Temperatursteigerung bei dynamischen Linsen kleiner. Auch die relativ grossen Ausdehnungskoeffizienten von „eingefrorenen“ und normalen Flüssigkeiten, welche bei Vollinsen zusammen mit der schlechten Wärmeleitfähigkeit meist zu Formverzerrungen und somit zur Unbrauchbarkeit führen, sind bei dynamischen Linsen von geringerer Bedeutung. Denn eine Wärmeausdehnung der Flüssigkeitsfüllung wirkt als erhöhter hydrostatischer Druck *gleich-*

mässig auf die Schalen und kann durch den Reguliermechanismus kompensiert werden.

Ohne hier auf die Fragen der Füllung näher einzugehen, sei bemerkt, dass die Temperaturabhängigkeit der Brechungsindizes bei Flüssigkeiten sich in Änderungen der vierten, die Druckabhängigkeit pro kgcm^{-2} in solchen der fünften Dezimalstelle von n äussert.

Unmittelbar störend wird der Temperatureinfluss dann, wenn er die konstante Scharfeinstellung der dynamischen Linse in gewünschter Dauer verunmöglicht, weil die Dehnung zu gross und die Viskosität des Materials so stark verringert wird, dass sie zu erheblichen und relativ rasch sich einstellenden plastischen Deformationen führt. Es müssten daher bei intensiver und langdauernder Wärmezufuhr (Projektionslampen) die üblichen Vorkehrungen zur Absorption der Wärmestrahlung getroffen werden. Bei kleineren Temperaturschwankungen bildet bereits die Arbeitsmethode mit konstantem inkompressiblem Flüssigkeitsvolumen eine gewisse Sicherung, indem sie die direkten Auswirkungen verkürzter Relaxationszeiten grösstenteils unterbindet, solange nicht Kautschukelastizität des Materials solche Viskositätsänderungen ausschliesst.

Allgemein kann erwartet werden, dass die Linsenschalen bei konstantem Füllvolumen innerhalb der Grenzen ihres Wärmefestigkeitsbereiches auf Zimmertemperaturschwankungen nicht mit messbaren thermischen Dehnungen reagieren werden, so dass von einer praktisch hinreichenden Widerstandsfähigkeit gesprochen werden kann.

§ 8. Unempfindlichkeit gegen Störfaktoren.

Linsenschalenmaterial, das den bisherigen Anforderungen entspräche, könnte trotzdem ungeeignet sein wegen *zu geringer Oberflächenhärte* und ungenügender Widerstandsfähigkeit gegen Feuchtigkeit und andere atmosphärische Einflüsse, die mit der Zeit zu Quellungen und Rissbildungen in der Oberfläche führen. Die Ergebnisse der diesbezüglichen spärlichen Untersuchungen, speziell an transparenten Kunststoffen, sind infolge der Mannigfaltigkeit der Materialien und des bisherigen Fehlens einheitlich normalisierter Prüfverfahren noch schwer vergleichbar. Akrylat-Kunstharze scheinen am kratzfestesten zu sein und sollen auch gute Wetterbeständigkeit aufweisen⁵⁵). Die Bedeutung der Zernarbung der Oberfläche (Orangenschaleneffekt) lässt sich daran er-messen, dass vom beugungstheoretischen Standpunkt aus die Ungenauigkeiten in der Flächenbeschaffenheit der an Luft grenzenden Linsenflächen nicht grösser als $0,3 \mu$ sein dürfen, damit die Bildgüte nicht leidet. Bei der Augenhornhaut wirkt die Tränenflüssigkeit

ausebnend⁵⁶); bei Linsen könnten geeignete Firnisse die gleiche Wirkung erziehen.

Unbeständigkeit der Linsenschalen *gegen chemische Agenzien* können optisch sehr geeignete Füllflüssigkeiten von der Verwendung ausschliessen. Neben einseitiger Beständigkeit mancher Kunststoffe gegen Säuren oder gegen Alkalien zeigen andere ziemlich gute allgemeine Widerstandsfähigkeit gegen beide, auch gegen Öle und Fette⁵⁷).

Eine weitere Störungsursache kann in der *Art der Abdichtung* liegen. Wird diese gleichzeitig durch das Festklemmen der Linsenschalen bewerkstelligt, dann hängt es vom Grad der Abdichtung (abgekürzt K_a) ab, ob man es mehr mit einer lose aufliegenden oder fest eingespannten Platte zu tun hat. Diese beiden Grenzfälle unterscheiden sich aber durch verschieden grosse Auswölbung (Verhält. n. d. lin. Theor. 1:4) und andere Spannungsverteilung⁵⁸). Es folgt daraus, dass nur dann eine rotationssymmetrische Wölbung der Linsenschalen eintreten wird, wenn dem ganzen Scheibenumfang entlang genau die gleichen Druckverhältnisse herrschen. Es müssen daher Dickenvariationen der Schalenperipherie, Unregelmässigkeiten der Schalenträger oder Dichtungseinlagen, Druckunterschiede im Einklemm-Mechanismus usw. vermieden werden, wenn man nicht zweckmässiger bei der Fassung der Linsenschalen Befestigung und Abdichtung als getrennte Aufgaben behandelt. In diesem Falle liesse sich gleichzeitig eine Spannungsentlastung der Kunststoffschele erreichen. Gelänge es beispielsweise, am Umfang der Kunststoffscheibe einen Kreisring anzufügen, der seinerseits gute elastische Eigenschaften im Sinne des Hooke'schen Gesetzes oder der Kuhn'schen Kautschukelastizität besitzt und nur als Verlängerung der Scheibe wirkt, dann würde — da bei der fest eingespannten Platte das radiale Spannungsmaximum am Rand auftritt — das makromolekulare Mittelstück bedeutend entlastet und der Rand wäre als nahezu freidrehbar eingespannt aufzufassen.

Störungen der Rotationssymmetrie können ferner durch *Mangel an Planparallelismus* der Kunststoffscheiben verursacht werden. Die daraus resultierende Verlagerung des Durchbiegungsmaximums verunmöglicht die Zentrierung in bezug auf die optische Achse der Linse. Ähnlich wirkt die Füllflüssigkeit bei *Linsen mit grossem Durchmesser* in vertikaler Stellung. Zum gleichmässig einwirkenden Formungsdruck tritt der linear nach unten zunehmende Druck der Flüssigkeitssäule. Er kann im allgemeinen bei kleinen Linsendurchmessern und stärkerer Belastung vernachlässigt werden, erfordert jedoch bei grossen Linsen entsprechende Vorkehrungen zur Vermeidung der Exzentrierung des Linsenscheitels⁵⁹).

§ 9. Physikalisch-optische Eigenschaften.

Ist eine Linse mit den geforderten deformationsmechanischen Eigenschaften auf gewünschter Wölbung durch Konstantsetzen des Füllvolumens fixiert, dann erhebt sich die Frage, ob dieser dynamisch geformte Linsenkörper optisch verwendbar ist. Die Untersuchung befasst sich auch hier nicht mit der Füllung, sondern nur mit den optischen Eigenschaften der Linse, insoweit sie vom Material der Linsenschalen (physikalisch-optische) und von ihrer Wölbungsform (geometrisch-optische) abhängen.

Die Aufgabe der Linsenschalen soll wesentlich in der Formgebung bestehen. Wenn auch ihr Beitrag als lichtbrechendes und -absorbierendes Medium durch die Dimensionierung der Schalen ($h \ll a$) vernachlässigbar ist, so muss doch der störende oder fördernde Einfluss anderer Umstände abgeschätzt werden.

Zunächst können *vermehrte Reflexionsverluste* infolge Vermehrung der Grenzflächen entstehen und sich namentlich bei Systemen von Linsen geltend machen (ein zweikammeriger Achromat weist schon 6 Grenzflächen auf). In der Regel wird diese Schwierigkeit wenigstens bei Einzellinsen durch Angleichung des Füllungs- und Schalen-Brechungsindex zu beheben sein. Möglichkeiten dazu bestehen von seiten der Füllflüssigkeit mehrere, wie Mischen, Verdünnen usw., von seiten der Schalen allerdings so gut wie keine. Es sind wohl Ansätze vorhanden, auch bei Kunstharzgläsern eine Kron-Flint-Analogie zu entwickeln⁶⁰), doch sind die Unterschiede der Brechungskoeffizienten noch zu unbedeutend, jene der Materialeigenschaften von Sorte zu Sorte zu gross, um eine Verwertung zu erlauben. Für Fälle, wo die vollständige Angleichung nicht möglich ist, lassen sich die Mehrverluste nach den FRESNELSchen Formeln abschätzen. Sie betragen z. B. bei einer wassergefüllten Plexiglaslinse gegenüber einer Vollinse aus Plexiglas oder aus Kronglas mit $n = 1,49$ rund 0,6%⁶¹).

Polarisationsfähigkeit, die an Cellophanscheiben beobachtet wurde⁶²), oder *Doppelbrechung*, die ganz allgemein bei mechanischer Beanspruchung von Kunstharzen auftritt, bezüglich Art und Ursachen vielgestaltig ist und z. T. mit den elastisch-plastischen Nachwirkungen zusammenhängt⁶³), dürften wegen der geringen Dicke der Linsenschalen keinen störenden Einfluss ausüben.

Unbedingt erforderlich ist *vollkommene Klarheit* des Schalenmaterials. Sie ist bestimmt durch Lichtdurchgang und Lichtzerstreuung. Während ungünstige Absorptionskonstanten des Materials immerhin durch die geringe Scheibendicke abgeschwächt werden, machen rauhe Oberfläche oder Verschleierung die Linsenschalen unbrauchbar. Akrylat-Kunstharze weisen diesbezüglich gegenüber Silikatgläsern und einer Reihe von organischen Vergleichs-

gläsern⁵⁵⁾ mit 90–99% Gesamtdurchlässigkeit für ein Spektralintervall von ca. 1000–430 m μ ⁹⁾ die weitaus günstigsten Verhältnisse auf. 50% der Strahlung von 280 μ Wellenlänge gehen noch durch 5 mm Schichtdicke, ein Umstand, der die vorzügliche Eignung eines solchen Werkstoffes zu Linsen mit ebenso UV-durchlässigen Füllungen (Fig. 2) erkennen lässt.

Unbedingt notwendig ist auch *Lichtbeständigkeit*. Lichtwirkung verursacht bei manchen Kunststoffen mit der Zeit Veränderungen der strukturellen, chemischen oder physikalischen Verfassung, die sich in Gelbfärbung, allgemeiner Trübung usw. äussern. Aufschlussreich und für allfällige Vorkehrungen zum Schutz von Kunststofflinsen richtunggebend sind Alterungsprüfungen, die K. FROELICH an organischen Gläsern mit künstlicher Bestrahlung ausgeführt. Es zeigt sich, dass gewöhnlich reine UV-Bestrahlung oder reine Wärmebestrahlung keinen oder fast keinen Einfluss auf die Lichtdurchlässigkeit ausübt, die Kombination beider Strahlungen dagegen wegen der Temperaturabhängigkeit der UV-Wirkung schon nach halb so langer Bestrahlungszeit eine starke Verminderung der Durchlässigkeit bewirkt⁹⁾.

§ 10. Geometrisch-optische Eigenschaften.

Während bei der starren statischen Linse dem Rohkörper die geometrischen Flächen gegeben werden, wie sie für eine bestimmte optische Wirkung verlangt sind, ist bei der variablen dynamischen Linse das Primäre die durch die Druckkräfte bewirkte Formung des Materials, die nach bestimmter mechanischer Eigengesetzlichkeit abläuft und automatisch die Form der Grenzflächen festlegt. Die optische Verwendungsfähigkeit der den Schalen aufgeprägten Flächenform muss daher erst untersucht werden.

Entsprechend den im 1. Kapitel § 1 genannten Tatsachen, nach denen die stark gebogenen Linsenschalen ausserhalb des strengen Gültigkeitsbereiches der bestehenden Biegungstheorien fallen, kann auch die aus diesen Theorien sich ergebende Bestimmung der Flächenform nur *Näherungswert* haben.

Eine homogene, zu Anfang ebene Linsenschale von der Dicke h und dem Radius a sei vollständig rotationssymmetrisch eingespannt und durchgebogen unter gleichmässig verteiltem Druck p (Fig. 4a). Es genügt somit, einen Meridianschnitt zu betrachten. Die Figur deutet schematisch den unverschiebbar festgeklemmten Scheibenrand (links) und den Fall der um den immobilisierten Randkreis frei drehbaren Scheibe an (rechts). Der Näherungstheorie K. FE-

DERHOFERS²⁴⁾ folgend soll die grösste Durchbiegung in der Scheibenmitte $y \geq h$ sein, aber immer noch so, dass der Winkel ω , den die Tangente in einem Punkte P der Meridiankurve mit der Abszisse einschliesst, als klein angesehen werden kann⁶⁴⁾. In diesem Fall lautet der Ausdruck für die Kurvenkrümmung in P :

$$\frac{1}{R} = \frac{d(\sin \omega)}{dx} = \frac{d\omega}{dx} - y''$$

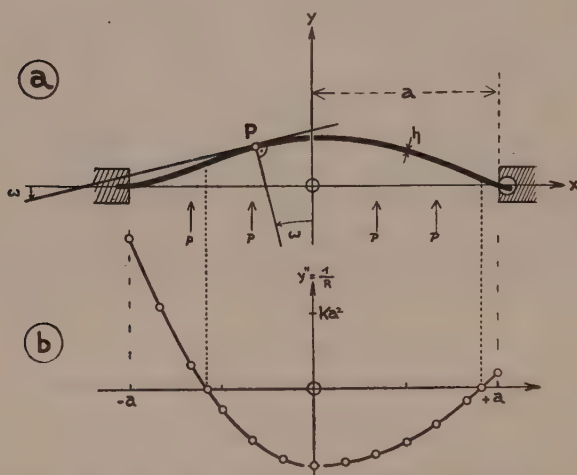


Fig. 4.

Durch Integration von Näherungsansätzen für ω , die den entsprechenden Randbedingungen genügen, ergeben sich als Meridiantgleichungen:

bei festgeklemmtem Rand: $y_1 = \frac{1}{4} K_1 (x^2 - a^2)^2$

bei frei drehbarem Rand: $y_2 = \frac{1}{4} K_2 (\beta x^4 - 2 a^2 x^2 - a^4 (\beta - 2))$

a ist Scheibenradius, $\beta = \frac{1 + \mu}{3 + \mu}$ mit μ als Querkontraktionszahl, K_1 und K_2 sind konstante Materialfaktoren⁶⁵⁾. Aus den Gleichungen folgt, dass in beiden Fällen die deformierte Meridianlinie eine Kurve 4. Ordnung mit Symmetrieachse ist. Der nähere Verlauf der Krümmung entlang der Meridianlinie ist in Fig. 4b dargestellt als Funktion des Scheibenradius. ($K_1 = K_2 = K$; $\mu = 0,35$.) Infolge der Grenzbedingung $\omega = 0$ für $x = \pm a$ ändert die Krümmung zwischen Scheibenzentrum und Rand das Vorzeichen. Die Lage des Wendepunktes bzw. des Wendekreises ist

massgebend für die effektive Apertur der dynamischen Linse. Als Abszisse ergibt sich aus

$$y_1'' \approx K_1 (3x^2 - a^2): x_1 = \pm \frac{a}{\sqrt{3}} = \pm 0,577 a$$

$$y_2'' \approx K_2 (3\beta x^2 - a^2): x_2 = \pm \frac{a}{\sqrt{3\beta}} = \pm 0,909 a$$

Im Sinne einer gewöhnlichen⁶⁶⁾ Linse verwendbar ist somit zunächst das vom Wendekreis begrenzte Mittelstück der gebogenen Linsenschale, das im Falle unverschiebbar festgeklebten Randes ca. 33%, bei frei drehbarem ca. 82% der Gesamtfläche ausmacht. Ferner deutet der Abszissenwert darauf hin, dass im Gültigkeitsbereich der Näherungstheorie die Lage des Wendepunktes nur eine Funktion des Radius ist, also nicht von den Materialkonstanten, insbesondere nicht vom Druck und der Biegungssteifigkeit abhängt.

Die Frage, ob Krümmungsflächen, deren Meridianlinie eine Kurve 4. Ordnung ist, optisch verwertbar sind, ist im allgemeinen zu bejahen. Asphärische Flächen verschiedener Typen werden vielfach einzeln zu Reflektoren, Spiegeln usw. verwendet, aber auch kombiniert miteinander oder mit ebenen oder sphärischen Flächen zu Linsen, Objektiven, Kondensoren⁶⁷⁾. Speziell die Eigenschaft aberrationsfreier Abbildung der Cartesischen Flächen, deren Meridianlinie im allgemeinen eine Kurve 4. Ordnung ist, wird zur Konstruktion aplanatischer Kombinationen benützt⁶⁸⁾. In welchem Ausmass die Krümmungsfläche der dynamischen Linse abbildungsfähig ist, ob sie universelle oder auf Spezialgebiete oder Sonderfälle eingeschränkte Verwendungsfähigkeit besitzt, können erst die eigentlich optischen Untersuchungen entscheiden. Die vorliegende Arbeit befasst sich auch nicht näher mit den verschiedenen Möglichkeiten, die Krümmungsfläche zu beeinflussen, noch mit den Vorteilen, die der Umstand bietet, dass bei der dynamischen Linse die Linsendicke nicht nur freier Parameter für die Berechnung, sondern variables Konstruktionselement ist⁶⁹⁾. Die experimentelle Untersuchung muss vor allem klarzustellen suchen, wieweit die auf klassischen Anschauungen und Voraussetzungen basierenden Theorien der Plattenbiegung auch für die makromolekularen Kunststoff-Linsenschalen Geltung haben, insbesondere was die Form der Meridiankurve betrifft.

Zusammenfassung.

Die Auswölbung der Kunststoff-Linsenschalen ist Funktion verschiedener konstanter und variabler Faktoren:

$$y = f(h, a, p, t, E_i, \lambda_i, \mu, T, K_d, r, y_{\text{rem}})$$

Es bedeuten: h = Plattendicke, a = Plattenradius, p = Belastung, t = Zeit, E_i = Elastizitätsmoduln, λ_i = Relaxationszeiten, μ = Querkontraktionszahl, T = Temperatur, K_d = Dichtungskonstante, r = plastischer Koeffizient, y_{rem} = remanente Dauerverformung aus Vorbehandlung.

Zum Zustandekommen einer brauchbaren dynamischen Linse mit zuverlässig funktionierendem Brennweiten-Variationsmechanismus ist notwendig:

a) *Zweckmässige Wahl der Dimensionsfaktoren:*

1. $h \ll a$, d. h. dünne, leicht biegsame Scheiben;
2. $y \gg h$, zur Erreichung grosser Akkommodationsbreite. Ev. Vorkrümmung der flexiblen Scheiben oder Kombination mit gekrümmten starren Gläsern.

b) *Elimination der störenden Einflüsse von Strukturfaktoren:*

3. $\dot{y} = 0$, praktisch erzwungen durch Volumkonstanz der Füllung;
4. $\lambda_i = \lim \lambda_K \rightarrow 0$ und $\lim \lambda_L \rightarrow \infty$, d. h. Kautschukelastizität zur Sicherung der Volumformkonstanz;
5. $r = 0$, d. h. kein plastisches Fließen, also auch $y_{\text{rem}} = 0$;
6. Keine grossen Schwankungen von T ;
7. $K_d = \text{const}$ auf der ganzen Scheibenperipherie. Zweckmässiger ist Trennung von Befestigung und Abdichtung.
8. Spezielle Materialeigenschaften und Dimensionierungen sind entsprechend zu berücksichtigen.

c) *Physikalisch- und geometrisch-optische Eignung:*

9. Vollkommen klares und lichtbeständiges Schalenmaterial; Vermeidung zusätzlicher Reflexionsverluste.
10. Tatsächliche optische Verwendungsfähigkeit der aus der Schalenbiegung resultierenden Krümmungsflächen mit Kurve 4. Ordnung als Meridian.

ZWEITER TEIL.

Experimentelle Untersuchung des Verhaltens der Linsenschalen.

§ 11. Das Material⁷⁰⁾.

Versuche mit anorganischen Gläsern verliefen negativ. Alle uns zugänglichen Glassorten, auch eigens für diesen Zweck empfohlene Bor-Kron-Glasplatten BK7 erwiesen sich für die vorgesehene Beanspruchung als zu spröde. Zudem lassen sich bei der Befestigung lokale Spannungen in den Randpartien schwerlich vermeiden, wodurch die Bruchgefahr bedeutend erhöht wird. Mit bruchfesteren Sicherheitsgläsern, wie z. B. „Securit“, konnten

mangels Scheiben von hinreichend geringer Dicke keine Versuche durchgeführt werden.

Bessere Biegsamkeit und in einzelnen Fällen eine sogar die Silikatgläser übertreffende Transparenz bieten die in grosser Mannigfaltigkeit vorhandenen organischen Gläser. Die Auswahl wird allerdings durch die Forderung klarer Durchsichtigkeit und möglichst guter Kautschukelastizität sehr eingeschränkt. Am aussichtsreichsten schien von Anfang an das unter dem Namen Plexiglas bekannte Polymetakrylsäureester-Kunstharz, das auf Grund von anderweitig gemachten materialtechnischen Untersuchungen⁷¹⁾ den im ersten Teil der Arbeit aufgestellten Bedingungen am ehesten zu entsprechen schien und wegen seiner ausserordentlichen Durchsichtigkeit auch schon zur Herstellung von starren Linsen verwendet wurde⁷²⁾. Vergleichshalber wurden neben diesem Polymerisationsprodukt noch je ein Vertreter der beiden andern Kunststofftypen wenigstens teilweise in die Untersuchungen einbezogen, Melopas als Polykondensationsprodukt und Cellon als Abkömmling hochmolekularer Naturprodukte. Über die physikalischen Daten geben die entsprechenden Eigenschaftstabellen Aufschluss⁷³⁾.

§ 12. Versuchsanordnung und Gang einer Messung.

Einen schematischen Überblick über die Versuchsanordnung gibt Fig. 5. Die Apparatur setzt sich im wesentlichen aus 3 Teilen zusammen: Linsenfassung, Druckanlage, Messeinrichtung.

Die Linsenfassung. Die zuerst benützte, aus zusammenschraubbaren Messing-Ringscheiben bestehende Fassung erwies sich bei Vorversuchen als ungeeignet, weil der durch die Einzelschrauben verursachte Druckunterschied (also $K_a \neq \text{const}$) Bildverzerrungen bewirkte. Die verbesserte Fassung (Fig. 5 F) besteht aus einem Rohrstück, in das ein zweites eingeschraubt wird, wobei Zwischenringe ohne Gewinde aber mit Führungsleisten die Übertragung der Drehbewegung auf die Linsenschalen verhindern. Als Hilfsmittel zum Abdichten wurden dünne Einlagen aus verschiedenem Material ausprobiert, wobei flüssiger Kautschuk⁷⁴⁾ und Plexigum KP74⁷⁵⁾ sich als geeignet erwiesen. Hahn 2 verschliesst den Zuleitungskanal möglichst nahe beim Linsenhohlraum. Die ganze Fassung steht in zwei Stiften auf einem um seine Achse drehbaren Metallteller, dessen Sockel in zwei senkrecht zueinander stehenden Richtungen verschiebbar ist.

Die Druckanlage. Zur Wölbung der Linsenschale wird der Druck einer Quecksilbersäule auf hydrostatischem Weg auf die Füllung des Linsenhohlraumes übertragen. Die beiden Queck-

silberniveaus haben grosse Fläche, um die Wirkung kleiner Temperatur- und Druckschwankungen vernachlässigbar zu machen. Durch Heben und Senken von h_1 erfolgt die Grobeinstellung nach Manometer-, bei h_2 die Feinregulierung nach Kathetometerablesung. Die Kombination der Hahnen 1–3 gestattet sowohl bei konstantem Druck oder Volumen als auch bei Entlastung auf $p = 0$ oder Unterdruck zu arbeiten. Hahn 4 reguliert das Grundniveau.

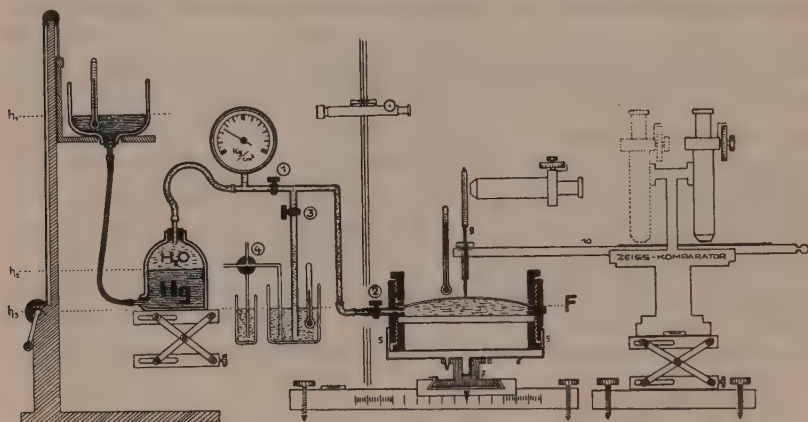


Fig. 5.

Die Messeinrichtung. Zur Beobachtung der Durchbiegung und ihrer zeitlichen Veränderungen sowie zur Aufnahme der verschiedenen Meridiankurven wurde die Methode der direkten Messung durch Abtasten angewandt. Der Taster (Fig. 5, Nr. 9), ein leichter Messingstift, trägt eine Mikrometerskala, die mittels Mikroskop mit verschiebbarem Fadenkreuz abgelesen wird. Um seitliche Abweichungen des Tasters auf ein Minimum zu reduzieren, gleitet er in einer 4 cm langen Führung, die am Ende der horizontal verschiebbaren Messtischplatte (Nr. 10) eines Zeiss-Komparators angebracht ist. Die Horizontal- und Vertikalverschiebungen sind auf 10^{-4} cm genau bestimmbar. Der relative Fehler, welcher den Ablesungen infolge des zum sichern Gleiten des Tasters in der Führung notwendigen Spielraumes anhaftet, wurde aus einer Reihe von Messungen zu 0,03% ermittelt.

Die Temperaturen wurden in unmittelbarer Nähe des Tasters, im Reservoir der Füllflüssigkeit sowie im Quecksilberbehälter der Druckanlage gemessen. Bei langzeitigen Beobachtungen diente ein Thermograph zur Kontrolle der Temperaturkonstanz.

Gang einer Messung. Die Linsenschale wird in die Fassung gespannt, in der eine 5 mm-Planglasplatte die zweite Linsenfläche

bildet; es wird der Hohlraum mit destilliertem Wasser gefüllt, die Fassung an die Druckleitung angeschlossen, auf den Sockel gestellt, mittels Stellschrauben horizontal einreguliert. Hahn 1 ist geschlossen, Hahn 2 und 3 offen, wodurch die Anfangsbedingung $p = 0$ erfüllt ist. Nach eingravierten Marken wird die Linsenfassung so justiert, dass bei horizontaler Verschiebung der Taster sich auf einem Durchmesser der Linsenschale bewegt. Ist die gleiche Ordinatenlage der beiden erreichbaren Endpunkte des Meridians geprüft, wird dessen Scheitelpunkt, also das Scheibenzentrum bestimmt, wo der Durchbiegungspfeil gemessen bzw. von dem aus die Meridiankurve abgetastet werden soll. Bei langzeitigen Beobachtungen im Linsenscheitel wird der Taster zwischen den Messungen von der Schale abgehoben. Die Messungen der Meridiankurve geschehen immer in beiden Richtungen, Scheitel-Rand und zurück.

§ 13. Reaktion der Linsenschalen auf kurzzeitige Temperaturwechsel.

Die einzelnen Messreihen wurden, um der Temperaturabhängigkeit der Verformung Rechnung zu tragen, bei praktisch konstanter, durch Thermograph kontrollierter Zimmertemperatur ausgeführt. Um jedoch festzustellen, inwieweit und wie rasch kurzzeitig einwirkende Temperaturschwankungen sich im Verfor-

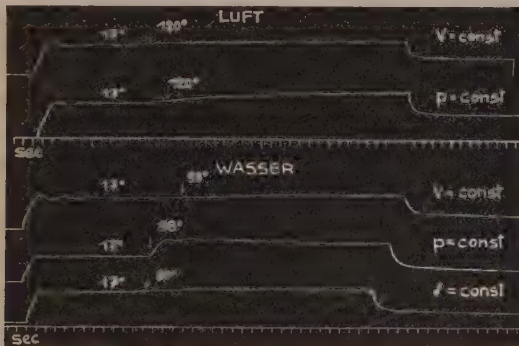


Fig. 6.

mungsprozess bemerkbar machen, wurden folgende Versuche angestellt:

Eine 0,5 mm dicke Plexiglasscheibe, mit $0,5 \text{ kgcm}^{-2}$ belastet, wurde nach erfolgter Durchbiegung erst bei konstantem Volumen, dann bei konstantem Druck einem Heissluftstrom von ca. 120°C ausgesetzt. An dem im Linsenscheitel aufgesetzten Taster war ein Zeiger befestigt, der die Änderungen der Durchbiegung kymo-

graphisch ca. 4mal vergrössert registrierte. Die beiden ersten Kurven in Fig. 6 zeigen die Reaktion auf den plötzlichen Temperatursprung von rund 100°C , dessen Einwirkung in dem durch einen Pfeil markierten Zeitpunkt beginnt. Der Effekt ist bei $p = \text{const}$ grösser als bei $V = \text{const}$. (N.B. Bei der 2. Kurve musste der Kymograph einige Augenblicke arretiert werden, was durch die Vertikalverschiebung der Kurve links vom Pfeil festgehalten ist.) Der Unterschied wird viel deutlicher, wenn anstatt Heissluft siedendes Wasser auf die Linsenschalen gebracht wird. Die drei folgenden Kurven zeigen, dass bei konstantem Volumen eine kaum merkbare Reaktion eintritt, während bei konstantem Druck die Geschwindigkeit und Grösse der thermischen Dehnung von der gleichen Grössenordnung ist wie die durch $0,5 \text{ kgcm}^{-2}$ Belastung erzielte Durchbiegung. Die dynamische Linse kann daher bei konstantem Volumen als unempfindlich selbst gegen beträchtliche kurzzeitige Temperaturschwankungen bezeichnet werden.

§ 14. Das Verhalten der Linsenschalen bei $\dot{S} = 0$.

Eine Anzahl Cellon-, Melopas- und Plexiglasscheiben wurden bei verschiedenen grosser (bis 1 kgcm^{-2} Überdruck) konstant einwirkender Belastung untersucht. Es wurden Scheiben von 0,5, 0,75 und 1 mm Dicke verwendet. Bei einem Durchmesser von 100 mm betrug daher das Verhältnis von Radius a zur Plattendicke h bei der dünnsten Scheibe 100:1, bei der dicksten 50:1.

Fig. 7 gibt eine orientierende Übersicht über den Verformungsprozess einer Plexiglasscheibe von 0,5 mm Dicke, die wäh-

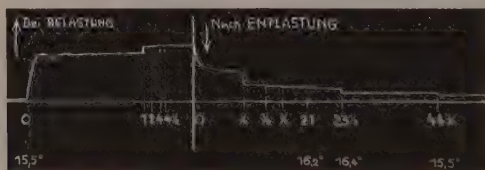


Fig. 7.

Die beim Beginn der Durchbiegung auftretende gedämpfte Schwingung tritt infolge Stossbelastung auf, wobei die Linsenschale samt den Flüssigkeitsmengen in der Druckleitung in Schwingung kommen. Gewöhnlich wird nicht-stossartige Druckbeanspruchung erfolgen, so dass keine Korrosionserscheinungen durch auftretende Stosswellen zu befürchten sind⁷⁶⁾.

rend 4,5 Stunden unter konstanter Belastung von $0,7 \text{ kgcm}^{-2}$ gehalten und dann entlastet wurde. Die sich im Laufe der Zeit einstellende Nachdehnung bzw. Nachschrumpfung ist durch einen am Taster angebrachten Zeiger kymographisch als vertikale Verschiebung des Kurvenzuges registriert. Die angegebenen Zahlen

bedeuten, dass 1, 2, 4, ... Stunden nach Beginn der Beanspruchung die Kymographenwalze wenige Sekunden lang weitergedreht wurde, wodurch die horizontalen Kurvenabschnitte entstanden.

Das Kymogramm zeigt die starke Abhängigkeit des neuen Gleichgewichtszustandes von der Zeit. Könnte der Zeitfaktor ausgeschaltet werden, d. h. kämen nur so kurze Belastungszeiten in Frage, dass die für Nachdehnung und Nachschrumpfung verantwortlichen Platzwechselvorgänge der Makromoleküle überhaupt nicht stattfinden könnten, dann verhielten sich die Linsenschalen elastisch. Fig. 8 gibt eine Schar solcher kurzzeitiger

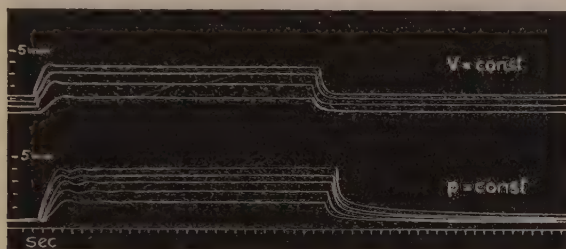


Fig. 8.

Eine 0,5 mm-Plexiglasscheibe nacheinander mit 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0 kg cm^{-2} belastet und nach 30 Sekunden wieder entlastet.

$p = \text{const.}$ -Kurven wieder. Die rasche und — wenigstens nach den geringeren Belastungen — vollständige Reversibilität der Deformation ist gut zu erkennen. Die langsamere Rückfederung nach höherem Druck rührt hauptsächlich von der Versuchsanordnung her, da die rückfedernde Scheibe ein der grösseren Auswölbung entsprechendes Mehrquantum an Füllflüssigkeit durch den engen Zuleitungskanal aus dem Linsenhohlraum hinauspressen muss. Hahn- und Rohrquerschnitt, wachsender Gegen- und Ausflussdruck beschränken die Ein- und Ausflussgeschwindigkeit der Füllung. Es darf daher die hier ausführlich zur Darstellung kommende Momentanwölbung und Momentanabflachung nicht mit der gewöhnlich als „zeitlos“ behandelten Momentandehnung und Momentanrückfederung bei Stabversuchen verwechselt werden.

Vergleichshalber wurden kurzzeitige Belastungskurven auch bei $V = \text{const.}$ aufgenommen (Fig. 8), indem kurz nach Belastung oder Entlastung der Linsenhohlraum abgeschlossen wurde. Der Effekt zeigt sich in der arretierten Schwingung und besonders in der fixierten Rückfederung. Es ist damit bereits ein Hinweis auf

die Lösung der später zu behandelnden Frage der Konstanthaltung einer gewählten Wölbung gegeben.

Bei langzeitiger Belastung, um die es sich bei der Linsenförmung handelt, kommen die für Kunststoffe charakteristischen Nachwirkungserscheinungen zur vollen Auswirkung. Es wurden Linsenschalen aus Cellon (*C*), Melopas (*M*) und Plexiglas (*P*) eingespannt, mit $0,2 \text{ kg cm}^{-2}$ gewölbt und bei dieser *konstanten Belastung* während 24 Stunden die Durchbiegungsänderungen im Linsenscheitel gemessen. Dann wurde entlastet und gleicherweise ebensolang die Rückverformung beobachtet. Die Verformungskurven sind in Fig. 9 wiedergegeben.

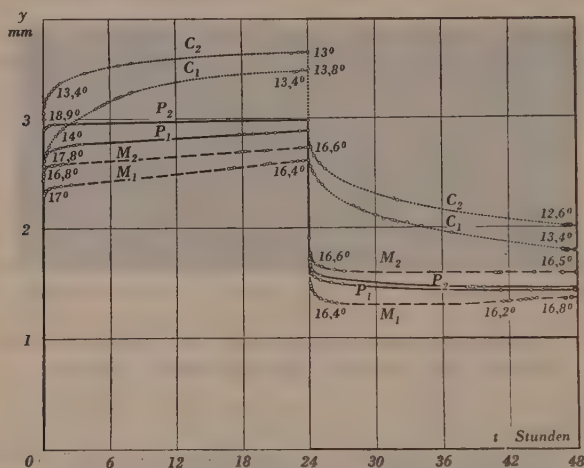


Fig. 9.

C_1 , M_1 , P_1 sind die jungfräulichen Belastungs- bzw. Entlastungskurven; C_2 , M_2 , P_2 die Kurven nach erfolgter „Alterung“. Temperaturänderungen (z. B. bei C_1 und M_1) machen sich durch Steigungsänderungen bemerkbar, der Gesamtkurvenverlauf wird aber nicht wesentlich gestört. Das gegenüber M_1 und P_1 nicht lineare Kurvenstück C_1 der plastischen Verformung ist auf den relativ grossen Zuwachs des Füllvolumens zurückzuführen, so dass die in der Druckanlage entstandene Niveaudifferenz nicht mehr durch den grossen Querschnitt des Reservoirs kompensiert wurde.

Weil die Linsenschalen aber nicht nur zu einer bleibenden Form ausgewölbt werden sollen, sondern durch beliebig oft wiederholte Durchbiegung und Abflachung das dynamische Element an der Linse zu verwirklichen haben, wurden die Scheiben nach der ersten Messreihe „gealtert“, indem sie je 50mal nacheinander belastet und entlastet und dann wieder wie vorher beobachtet wurden. Es handelt sich hierbei nicht um eine Alterung im strengen Sinne, da ja der Zeitfaktor ausgeschaltet ist und zudem die Molekül-anordnung des Kunststoffs instabil bleibt.

§ 15. Diskussion und Auswertung der $p = \text{const}$ -Kurven.

Einerseits illustrieren die Kurven deutlich die Unmöglichkeit, eine dynamische Linse mit derartigen Schalen bleibend scharf einzustellen, wenn die Regulierung der Brechkraft nur als Funktion konstanten Drucks erfolgen soll. Andererseits unterscheiden sie sich durch individuellen Verlauf, so dass sich daraus Anhaltspunkte zum Vergleich der Eigenschaften des jeweiligen Materials, nicht aber eigentliche Materialkonstanten gewinnen lassen.

Als Hauptkriterien für gute Eignung wurden genannt: leichte Biegsamkeit, möglichst angenäherte Kautschukelastizität und verschwindender Kaltfluss. Die entsprechenden Vergleichsgrößen (zugleich die Glieder der Deformationsgleichung (1)): Momentanwölbung y_0 , Relaxationszeiten λ_i und plastischer Koeffizient r

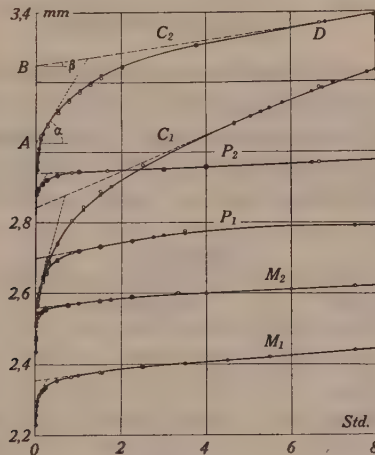


Fig. 10.

—●— = Messpunkte; —○— = Hilfspunkte aus interpolierten Abschnitten der Gesamtkurven, Fig. 9; —○— = Kontrollpunkte, berechnet nach den ermittelten Verformungsgleichungen.

lassen sich — in Anlehnung an HOLZMÜLLER-JENCKEL und BENNEWITZ-ROETGER³¹⁾ — durch graphische Auswertung der Verformungskurven ermitteln. Zu diesem Zweck wurde in Fig. 10 die wichtigste Etappe der Kurven in grösserem Masstab angegeben. Zur Klärung der Frage, mit wievielen Relaxationszeiten gerechnet werden muss, werden die Ordinatendifferenzen zwischen der Kurve und der Tangente an sie zur Zeit $t = \infty$ ($\text{tg } \beta$; siehe Angaben Fig. 10, C₂) logarithmisch aufgetragen. Können diese Werte durch eine einzige (logarithmische) Gerade interpoliert

werden, wie dies bei allen Kurven in befriedigender Weise der Fall war, dann genügt zur Darstellung der Nachdehnung eine einzige e -Funktion. Somit lautet Gleichung 1:

$$y = y_0 (1 + s (1 - e^{-at}) + rt)$$

Zur Bestimmung dieser Gleichungskoeffizienten stehen ausser $\operatorname{tg} \beta$ zur Verfügung: die Kurvensteigung $\operatorname{tg} \alpha$ im extrapolierten Kurvenpunkt A zur Zeit $t = 0$ (A ergibt sich als Schnittpunkt der Interpolationsgeraden mit der logarithmischen Achse), $0A = y_0$ als Momentandehnung, $AB = y_t$ als Nachdehnung. Mittels dieser graphischen Messgrößen können s , q und r der Gleichung ausgedrückt und ebenso nach besonderer Formel die beiden auftretenden Relaxationszeiten λ_1 und λ_2 berechnet werden (siehe die genannten Autoren).

§ 16. Messresultate.

Die durchgeführte graphische Auswertung der Kurven liefert die nachstehend zusammengestellten Werte. Ausser den schon angeführten Vergleichsgrößen sind noch angegeben die nach 24 Stunden erreichten Maximaldurchbiegungen (y_{24}) und die nach ebensolanger Entlastung immer noch verbleibende remanente Verformung (y_{rem}).

Tabelle 1

Stoff	CELLON			MELOPAS			PLEXIGLAS		
Kurve	C_1	C_2	ΔC_1 %	M_1	M_2	ΔM_1 %	P_1	P_2	ΔP_1 %
y_0 cm	0,2574	0,3126	+ 21	0,2294	0,2526	+ 10	0,2556	0,2884	+ 13
y_t cm	0,0270	0,0220	- 18	0,0060	0,0030	- 50	0,0140	0,0056	- 60
y_{24} cm	0,3449	0,3599	+ 4	0,2614	0,2730	+ 4	0,2888	0,2891	+ 3
y_{rem} cm	0,1778	0,2015	+ 13	0,1365	0,1586	+ 16	0,1439	0,1447	+ 0,5
	10^{-8}	10^{-8}		10^{-8}	10^{-8}		10^{-8}	10^{-8}	
$\operatorname{tg} \alpha_{[\text{cm/sec}]}$	1 236	557	- 55	662	476	- 28	1 710	613	- 64
$\operatorname{tg} \beta$	142	53	- 62	44	43	- 2	63	13	- 79
q	40 502	22 922	- 43	103 150	144 400	+ 40	177 657	109 222	- 38
r	553	169	- 69	191	169	- 11	248	46	- 81
s	0,1048	0,0703	- 33	0,0261	0,0118	- 55	0,0547	0,0194	- 65
λ_L sec/cm	199 000	624 000	213	537 000	598 000	+ 11	425 000	2353 000	454
λ_K	2 232	4 074	+ 82	944	684	- 27	805	915	+ 13
$\lambda_K : \lambda_L$	1 : 89	1 : 153		1 : 569	1 : 874		1 : 528	1 : 2416	

Mit den erhaltenen Gleichungskoeffizienten wurde für jede Kurve eine Anzahl Kontrollwerte berechnet. Sie zeigen gute Übereinstimmung mit den experimentellen Messpunkten (vgl. Fig. 10). Ein Vergleich der drei Linsenschalensorten bezüglich der Momentanwölbung y_0 ergibt noch keinen Grund zur Ausscheidung, da die unmerklichen Unterschiede auf ungefähr gleiche Biegsamkeit hindeuten. Bezüglich Kautschukelastizität liegen die Verhältnisse, wie schon aus dem Kurvenbild ersichtlich ist, für Cellon am schlechtesten. Die beiden λ -Werte von C_1 sind weniger kurz und weniger lang als die entsprechenden von M_1 und P_1 . Infolgedessen ist natürlich auch der plastische Koeffizient r mehr als doppelt so gross als z. B. bei P_1 . Cellon ist daher als ungeeignet für die Beanspruchung als Linsenschalen auszuschliessen. Diese Ausscheidung muss auch auf Celluloid ausgedehnt werden, für das in Vorversuchen analoge Kurven und Werte wie bei Cellon gefunden wurden.

Plexiglas M 279 und Melopas weisen qualitativ und quantitativ nur geringe Unterschiede auf, wenn man allein die P_1 - und M_1 -Kolonne berücksichtigt. Melopas ist leicht im Vorteil bezüglich y_t und r . Plexiglas hat etwas grössere Momentandurchbiegung, was bei seinem gegenüber Melopas halb so grossen Elastizitätsmodul und der etwas höheren Versuchstemperatur zu erwarten war. Eine bedeutendere Differenzierung tritt erst in Erscheinung, wenn man die Wertekolonnen nach Vorbehandlung einbezieht. Abgesehen von der grösseren Momentandehnung ist eine Veränderung in Richtung besserer Kautschukelastizität festzustellen, was sich in rascherem Ablauf der elastischen Nachdehnung und Verringerung des kalten Flusses äussert. Wie ein Vergleich der λ und r beweist, stehen die Verhältnisse am günstigsten für Plexiglas. Wenn für die weiteren Versuche in erster Linie Plexiglas verwendet wurde, so war dabei ausserdem der Umstand mitbestimmend, dass Melopas leicht verschleiert erscheint und keine glatte Oberflächenbeschaffenheit aufweist, Plexiglas dagegen bezüglich Schleierfreiheit und Lichtdurchlässigkeit an erster Stelle der Kunstharze steht.

Die Frage, inwieweit eine mechanische Vorbehandlung bleibenden Effekt auf die Veränderung des Relaxationszeiten-Verhältnisses ausübt, wurde noch nicht systematisch untersucht. Andeutung einer bis zu einem gewissen Grade *dauernden* Umstellung geben indessen die an der oben (P_1 und P_2) verwendeten Plexiglasscheibe fortgesetzten Messungen: P_3 .

	P_1 Konstante Belastung mit	Ent- lastg. auf	50× Belastg. Entlastg.	P_2 Konstante Belastung mit	Ent- lastg. auf	P_3 Konstante Belastung mit
kgcm ⁻²	0,2004	0	0-0,20	0,2048	0	0,2042
Dauer (Stunden)	24	24	0,25	24	42	24
Anfangs- temperatur°C	17,8			18,9		16,6
λ_L sec cm ⁻¹	425 000			2 353 000		785 500
λ_K	805			915		414
$\lambda_K : \lambda_L$	1 : 528			1 : 2416		1 : 1897

§ 17. Das Verhalten der Linsenschalen bei $V = \text{const.}$ Volumkonstanz und Volumformkonstanz.

Die Tatsache, dass die Festigkeitseigenschaften der Kunststoffe von der Molekülgrösse, der Art der Vernetzung, der Polymerisations- und Abkühlungstemperatur, dem Verhältnis von polymerisierten und nicht-polymerisierten Molekülen usw. abhängen⁷⁷⁾, weist die Herstellung eines wirklich kautschukelastischen Linsenschalenmaterials ins Gebiet der Kunststoffchemie. Inzwischen muss die physikalische Untersuchung die Möglichkeiten prüfen, wie die Nachwirkungserscheinungen so weit verhindert werden können, dass sie die Verwendung des Materials in der dynamischen Linse nicht verunmöglichen. Das Experiment hatte die Frage zu klären, inwieweit sich dies auf dem bereits in Fig. 3 angedeuteten Weg der Volumkonstanz erreichen lässt, d. h. ob durch *Volumkonstanz* tatsächlich die Verformung arretiert und eine konstante *Volumform* mit optisch brauchbarer Krümmungsfläche bewirkt wird.

Es wurde eine Anzahl Linsenschalen verschieden stark belastet und entlastet und jedesmal beim gewünschten Deformationsgrad das Füllvolumen z. T. sofort, z. T. nach 15 oder 30 Sekunden oder 1–2 Minuten abgeschlossen. An der Skala des im Scheitel der durchgebogenen Schale aufgesetzten Tasters wurde beobachtet, ob sich die Wölbung ändert oder nicht. Denn es ist im allgemeinen zu erwarten, dass Volum- und Volumformänderungen sich am deutlichsten an der Stelle der grössten Durchbiegung zeigen. In Fig. 11 ist eine Auswahl solcher Beobachtungen in Kurven zusammengestellt, wobei zwecks Darlegung der Störfaktoren neben Fällen befriedigend langer Dauerkonstanz auch

Kurven wiedergegeben sind, die eine relativ starke und systematische Wölbungsänderung erkennen lassen.

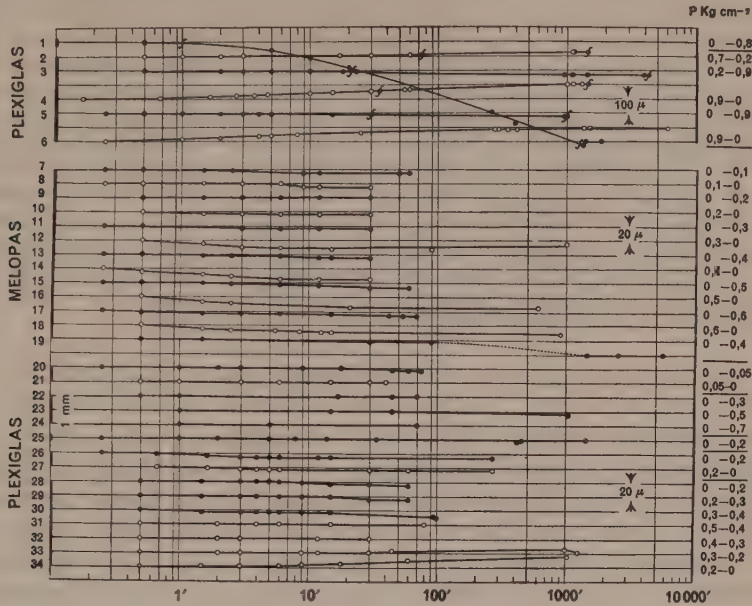


Fig. 11.

Änderung des Durchbiegungspfeiles bei $V = \text{const.}$ —●— nach Belastung, —○— nach Entlastung, —f— = Volumkontrolle.

Kurve 1 ist ein typischer Fall von Undichtigkeit; die Kurven 2–6 stammen von Plexiglas, zur Abdichtung zwischen Kautschukringe eingespannt; 7–19 von Melopas; 20–34 wiederum von Plexiglas, aber unter Verwendung von nachträglich festwerdender und klebender Kautschuklösung als Dichtungsmittel. Die jeweils von derselben Scheibe erhaltenen Kurven sind in chronologischer Beobachtungsfolge eingezeichnet und am linken Rand des Schemas durch eine Linie verbunden. Die Zahlen rechts geben die vorausgehende und die eingestellte Belastungsstufe an, bei der die Messungen ausgeführt wurden.

Kurve 2 gibt beispielsweise das Verhalten des Biegungspeiles einer Plexiglasscheibe an, die vorher einige Zeit mit $0,7 \text{ kgcm}^{-2}$ belastet war, dann auf $0,2 \text{ kgcm}^{-2}$ entlastet und nach Absperrung des Volumens beobachtet wurde. Nach einigen Minuten unveränderter Einstellung beginnt eine langsame Erhöhung des Scheitels, die nach 100 Minuten etwa 10μ , nach 1000 Minuten, also ca. 16 Stunden etwa 20μ beträgt. Kurve 4 und 6 — Plexiglas von $0,9 \text{ kgcm}^{-2}$ auf 0 entlastet — zeigen diese nachträgliche Scheitelerhöhung besonders stark. Kurve 21 bei nur geringer vorausgehender Belastung zeigt nach 40 Minuten gar keine, desgleichen 31 bei Entlastung von $0,5$ auf $0,4 \text{ kgcm}^{-2}$, also auf eine beträchtliche Restwölbung, nach 80 Minuten gleichfalls keine Nachwirkung, während 27 als einzige unter den Plexiglascurven bei Veränderung $0,2$ auf 0 eine freilich sehr kleine (circa 4μ betragende) umgekehrte Nachwirkung aufweist.

Im Gegensatz zu diesen Entlastungskurven zeigen die Kurven für $V = \text{const}$ nach Druckvergrößerung zumeist eine nachträgliche Verringerung der Scheitel-

höhe. Sie setzt z. B. bei Kurve 3 nach etwa 10 Minuten merklich ein, erreicht nach 1000 Minuten 34μ und bleibt dann bis 4300 Minuten, also rund 71 Stunden konstant. Auch alle andern Beobachtungen nach erfolgter Druckerhöhung ergeben, wenn überhaupt eine Änderung eintritt, systematisch diese Abflachung des Scheitels, die bei schwächerer Auswölbung (20, 26, 28, 29) in geringerem Ausmass, bei stärkerer Anspannung (3, 5, 30) ausgeprägter auftritt. Auch nach Druckvergrößerung gibt es Kurven, die gar keine solche Veränderung des Biegungspfeiles zeigen, solange beobachtet wurde. So bleibt 22 und 24 während 80 Minuten konstant, obwohl Belastungen von 0 auf 0,3, bzw. 0 auf $0,7 \text{ kgcm}^{-2}$ wirksam waren. Kurve 23, die von der gleichen 1 mm dicken Plexiglasscheibe stammt, deutet allerdings darauf hin, dass evtl. zu wenig lang beobachtet wurde, da dort viel später eine geringe Senkung doch noch eintritt, welche nach 1000 Minuten 5μ beträgt. Ebenso ist bei 25 sehr gute Dauerkonstanz festzustellen. Es ist dies die gleiche Platte, von der in Fig. 9 die Zeit-Dehnungskurven und nachher die Auswirkung der mechanischen Vorbehandlung angegeben sind, und die schliesslich noch bei konstantem Volumen beobachtet wurde.

Es gibt also Kurven mit Wölbungskonstanz und solche mit Wölbungsänderungen. Woher diese kommen, ist in Anbetracht ihres geringen Betrages in der Grössenordnung von μ und den komplizierten Versuchsbedingungen nicht eindeutig festzustellen. Schwankungen der Zimmertemperatur um Zehntelsgrade kommen kaum als Ursache in Betracht, wenigstens nicht bei kurzzeitigen Beobachtungen und schwerlich für Wölbungsabnahme bei steigender Temperaturtendenz. Eindringen der Tasterspitze kann Scheitelerhöhungen nicht erklären. Abnahme des Füllquantums infolge Flüssigkeitsverlustes durch Undichtigkeit kann nicht in jedem Einzelfall ausgeschlossen werden, da sich die Abdichtung während der Beobachtungszeit nicht kontrollieren liess. Kurve 1 hingegen, bei der die Undichtigkeit erst beim Scheibenwechsel festgestellt wurde, weist auf eine ganz andere Grössenordnung der Wölbungsänderung hin. Es müssen daher als Ursachen der beobachteten Instabilität Veränderungen des Linsenhohlraumes oder der Linsenschalen selber in Betracht gezogen werden, die bei absolut konstantem Füllquantum bzw. wegen dieser Volumkonstanz eine Änderung der Volumform bedingen. Der Linsenhohlraum könnte dadurch eine Veränderung erfahren, dass sich unter dem Einfluss des Druckes und der Flüssigkeit (Erweichen des Abdichtungsmittels) dem Rand entlang zusätzliche Hohlräume auftun oder sich wegen Inhomogenität der Linsenschale lokale Ausbeulungen bilden. Dadurch wird eine andere Verteilung der inkompressiblen aber leicht formbaren Füllung und automatisch eine Wölbungsabnahme ermöglicht. Derartige Störungen akzidenteller Natur könnten jedoch nur Scheitelsenkungen, nicht aber Scheitelerhöhungen nach Druckverminderung erklärlich machen.

Eine bessere Deutungsmöglichkeit, wie gezeigt werden wird,

ergibt die Berücksichtigung des Kunststoffcharakters der Linsenschalen. Die bei elastischem Material innerhalb der Elastizitätsgrenze unschädlichen Spannungsunterschiede in einer gebogenen Platte kommen zu störender Auswirkung bei Kunststoffmaterial ohne strenges Hooke'sches Intervall. Verschieden stark beanspruchte Plattenzonen werden auch verschieden starke Nachwirkungen erleiden, die sich auch in äusserer Verformung zeigt, soweit die Volumelastizität der Flüssigkeitsfüllung eine Volumerweiterung zulässt. Es ist auch ohne diese Einschränkung denkbar, dass Nachdehnungen in der stärker gespannten Rand- und Scheitelzone Entspannung und Schrumpfung der Zwischenzone ermöglichen, wodurch die Linsenschale sich derart in sich selber verzieht, dass bei konstantem Volumen die Volumform sich am Rand erhöht und in der Mitte abflacht.

Verschiedene Beobachtungstatsachen sprechen für diese Erklärung:

1. Aus dem Vergleich der Kurvenserie 28–34 mit 7–19 geht deutlich hervor, dass die Volumkonstanzkurven nach Entlastung gegenüber jenen nach Belastung auffallend grössere Änderungen aufweisen. Ob die Belastung von 0 aus oder stufenweise erfolgt, hat wenig Einfluss auf die Grösse der Durchbiegungsänderungen. Geht aber die Entlastung stufenweise zurück, dann tritt gar keine Veränderung (21, 31, 32) oder nur sehr geringe ein (10, 20), wird aber immer grösser, je mehr sich die Scheibe dem Ausgangsstadium (hier der ebenen Platte) wieder nähert oder direkt in die Null-Lage zurückversetzt wird (31–34, 2, 4, 6), und ist um so ausgeprägter, je stärker und länger die vorausgehende Belastung war (8–10). Diese Erscheinung findet ihre Erklärung in der eingetretenen irreversiblen Deformation der Schalen, die bei nachfolgender Druckerhöhung sich nicht weiter bemerkbar macht, wohl aber bei der Rückkehr zum ungedehnten Ausgangsstadium.

Der Unterschied der *Beträge* der im übrigen gleichsinnigen Änderungen bei Kurve 2–6 gegenüber den andern, 7–34, die, wenn solche überhaupt auftreten, innerhalb der beobachteten Zeiten meist nicht über $\pm 10 \mu$ hinausgehen, dürfte mit der *Einspannungsart* zusammenhängen. Zwischen Kautschukringen eingespannt bleibt der ganze Scheibenradius bis zur Einklemmstelle ohne Verkürzung durch Festkleben für die Durchbiegung frei, wobei zu beachten ist, dass der Biegunspfeil im Zentrum proportional der 4. Potenz des Radius ist. Ausserdem stellen die 0,5 mm dicken Kautschukringlager im Sinn der Ausführungen I, 1, § 4, eine weniger feste Einspannung dar, was ebenfalls eine grössere Durchbiegung im Gefolge hat.

2. Wenn diese Erklärung den Tatsachen entspricht, muss wegen der Volumkonstanz bei Scheitelsenkung eine Randerhöhung (und umgekehrt) feststellbar sein. Zu diesem Zwecke wurde an den durch Integralzeichen markierten Stellen der Kurven 1–5 die Meridiankurve aufgenommen.

Tabelle II.

Kurve	2		3		4		5	
Inter- vall	23 h.		71 h.		23 h.		16 h.	
x	y_1	y_2	y_1	y_2	y_1	y_2	y_1	y_2
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
0,0	4,1647	4,1718	5,4096	5,3734	3,8212	3,8608	5,4542	5,4373
3,6	4,1566	4,1656	5,3816	5,3549	4,8117	3,8494	5,4386	5,4158
7,2	4,1019	4,1187	5,2995	5,2750	3,7706	3,8055	5,3573	5,3355
10,8	4,0005	4,0042	5,1495	5,1308	3,6969	3,7240	5,2126	5,1914
14,4	3,8490	3,8488	4,9348	4,9203	3,5836	3,6009	4,9945	4,9810
18,0	3,6403	3,6375	4,6481	4,6401	3,4245	3,4300	4,7105	4,6954
21,6	3,3673	3,3648	4,2828	4,2831	3,2042	3,2015	4,3445	4,3319
25,2	3,0227	3,0187	3,8268	3,8311	2,9103	2,9012	3,8926	3,8779
28,8	2,5857	2,5806	3,2715	3,2889	2,5136	2,5011	3,3369	3,3294
32,4	2,0484	2,0415	2,6042	2,6225	2,0061	1,9943	2,6639	2,6591
36,0	1,3977	1,3907	1,7905	1,8203	1,3728	1,3596	1,8460	1,8365
39,6	0,6700	0,6700	0,8600	0,9000	0,6500	0,6000	0,9000	0,8900
43,2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
F_1, mm^2	125,9063		161,3383		118,4505		163,7825	
$F_2, \text{ „}$	125,9148		161,3594		118,5523		163,1811	
$F_2 - F_1$	0,0085		0,0211		0,1018		- 0,6013	
$\Delta F_1 \%$	0,006		0,01		0,08		- 0,36	

Die in Tabelle II unter y_1 und y_2 angegebenen Werte der ersten und zweiten Meridiankurve, die mit einem Zwischenintervall von 23, ... Stunden gemessen wurden, bestätigen die gegenseitig bedingte Ab- und Zunahme der Auswölbung. Sie ist bei Kurve 3 und 4 besonders deutlich erkennbar.

3. Nur eine ständige Kontrolle der Abdichtung könnte absolute Sicherheit geben, ob wirklich nur Formänderungen und keine Volumänderungen mitspielen. Da diese nicht möglich war, wurde sie durch Volumintegration ersetzt. Es wurde nach der SIMPSONschen Regel das von der Meridiankurve, dem Ausgangsniveau als Abszisse und der Mittellachse als Ordinate eingeschlossene Flächenstück F integriert. Mit Ausnahme von Kurve 5 (eventuell beginnende Undichtigkeit?) kann die Fläche als unverändert, also auch

das Volumen als konstant angesehen werden. Als Gegensatz dazu ergibt die Flächenintegration beim undichten Fall der Kurve 1:

Kurve 1		Intervall = 22 h.		
x	y_1	y_2	$y_1 - y_2$	Fläche
mm	mm	mm	mm	mm ²
0	6,814 ₃	6,092 ₄	0,721 ₉	$F_1 = 186,816$
10	6,450 ₈	5,787 ₄	0,663 ₄	$F_2 = 169,405$
20	5,288 ₁	4,805 ₄	0,482 ₇	
30	3,226 ₈	3,004 ₉	0,221 ₉	$F_2 - F_1 = -17,411$
40	0,000 ₀	0,000 ₀	0,000 ₀	$\Delta F_1 = -9,3\%$

Es muss somit auf Grund der experimentellen Ergebnisse trotz konstanten Volumens bei Kunststofflinsenschalen mit Veränderungen der Volumform gerechnet werden. Um jedoch zu einem Gesamtbild des Verhaltens solcher Scheiben bei $V = \text{const}$ zu kommen, müssen neben den Ursachen auch die tatsächlichen Ausmasse berücksichtigt werden, die in der Größenordnung von μ variieren gegenüber mm bei $p = \text{const}$. Abgesehen von den ersten 6 Kurven mit speziellen Einspannbedingungen (bei denen die grösste Abweichung immerhin nur 4% des Anfangswertes beträgt) bleibt bei den übrigen 28 Kurven das Mittel der nachträglichen Wölbungsänderungen unter 0,5% der Momentanwölbung. Mehrere Kurven zeigen überhaupt keine oder nach stundenlanger Konstanz nur verschwindende Änderungen. Andere haben sich kurz nach Abschluss des Volumens verändert, um dann einen konstanten Dauerwert anzunehmen (7, 17, 18, 26, 27). Wenn darum auch geschlossen werden muss, dass Kunststoffmaterial immer seine Natur durch Nachwirkungen offenbaren wird, wenn es lang und stark genug beansprucht wird, so zeigt sich doch, dass die störenden Eigenschaften bei zweckmässiger Einspannung, Konstantsetzung des Volumens, Limitierung der Belastungszeit und -grösse beschränkt werden können. Die optischen Anwendungsmöglichkeiten werden sich mit Verbesserung des Materials in Richtung der Kautschukelastizität erweitern.

§ 18. Die Form der Meridiankurve.

Zur Feststellung des für die optische Brauchbarkeit entscheidenden Charakters der Krümmungsfläche genügt es — rotations-symmetrische Ausbildung der Fläche vorausgesetzt —, die Meridiankurve des für den Lichtdurchgang freien Teiles der Linsenwölbung zu kennen. Diese Kurve wurde experimentell nach der zu Anfang des II. Teiles beschriebenen Methode aufgenommen,

und zwar so, dass nach Kontrolle der Symmetrie und genauer Justierung nur vom Scheitel zum Rand und zurück gemessen und die sich daraus ergebenden Mittelwerte auf die zweite Kurvenhälfte übertragen wurden. Mit Rücksicht auf den optischen Zweck der Messungen und weil die Einklemmstelle für den Tasterstift unzugänglich war, wurde der Ursprung des Koordinatensystems in den Linsenscheitel gelegt.

Es sei $f(x)$ die empirische Funktion, gegeben durch die von Rand zu Rand in äquidistanten Abständen x_0, x_1, \dots, x_n gemessenen Meridian-Kurvenpunkte y_0, y_1, \dots, y_n . Gesucht ist jene Funktion $g(x)$, welche $f(x)$ am besten approximiert. Zu diesem Zweck wird für $g(x)$ nach der Approximationsmethode durch Kugelfunktionen einer Veränderlichen der Ansatz gemacht:

$$g(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_n P_n(x) \quad (2)$$

wobei $P_i(x)$ die Kugelfunktion i -ter Ordnung bedeutet, und die Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n so bestimmt werden, dass das mittlere Fehlerquadrat zwischen $f(x)$ und $g(x)$ ein Minimum wird, also

$$\int_{x_0}^{x_n} [f(x) - (a_0 P_0 + a_1 P_1 + \dots + a_n P_n)]^2 dx \rightarrow \text{Minimum}.$$

Verwandelt man durch Substitution einer neuen Variablen $x = \frac{x_0 + x_n}{2} - \frac{x_n - x_0}{2} u$ die Grenzen des Integrals in $+1$ und -1 und bildet die partiellen Ableitungen nach den jetzt als unabhängige Variable betrachteten Koeffizienten a_i , so folgt als Bedingung für die Koeffizienten:

$$\int_{-1}^{+1} [f(u) - (a_0 P_0(u) + a_1 P_1(u) + \dots + a_n P_n(u))] P_i du = 0$$

Auf Grund der Orthogonalitätseigenschaft der Kugelfunktionen

$$\int_{-1}^{+1} P_i P_k du = \begin{cases} \frac{2}{2i+1} & \text{für } k=i \\ 0 & \text{für } k \neq i \end{cases}$$

ergibt sich dann:

$$a_i = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_i f(u) du \quad (3)$$

Die Auswertung der Integrale $\int_{-1}^{+1} P_i f(u) du$ kann, da es sich um äquidistante Beobachtungen handelt und die Beobachtungs-

fehler unbedeutend sind, durch Zerlegung in Einzelintegrale $I_i = \int_{-1}^{+1} u^i f(u) du$ und Integration nach der SIMPSONschen Regel erfolgen.

Ein Mass für die Güte der Annäherung liefert der Ausdruck der Minimumbedingung, der sich mit Berücksichtigung der Kugelfunktionseigenschaften umformen lässt zu

$$M_n = \int_{-1}^{+1} f^2(u) du - 2 \sum_{i=0}^{i=n} \frac{a_i^2}{2i+1} \quad (4)$$

und ebenfalls nach der SIMPSONschen Regel berechnet werden kann. Als Approximationskurven kommen nur die von gerader Ordnung in Betracht, da die Meridianlinie symmetrisch ist.

Es wird zuerst ausführlicher die Berechnung der Meridiankurve einer 0,5 mm dicken Plexiglasscheibe angegeben, die nach vorherigen Beanspruchungen von 0 auf 0,9 kgcm⁻² belastet und bei konstantem Volumen nach einer halben Stunde ausgemessen wurde. Zwischen dem randnächsten Messpunkt und der Einklemmstelle bleiben noch 8 mm. Das Mikrometer des benützten Zeisskomparators gestattete 10⁻³ mm genau abzulesen, 10⁻⁴ mm abzuschätzen. Bei einem relativen Ablesefehler von 0,03% wird die 4. Dezimalstelle der Millimeterwerte beeinflusst, die 3. kann daher als sicher angesehen werden.

Tabelle III.

Messresultate der Meridiankurve.

x mm	y' Mitte-Rand	y'' Rand-Mitte	$y' - y''$ mm	$\frac{y' + y''}{2}$ mm	y mm
-36,0	15,0083	15,0082	0,0001	15,0083	3,6082
-32,4	15,8285	15,8240	0,0045	15,8262	2,7903
-28,8	16,5012	16,4973	0,0039	16,4992	2,1173
-25,2	17,0562	17,0536	0,0026	17,0549	1,5616
-21,6	17,5073	17,5063	0,0010	17,5069	1,1097
-18,0	17,8740	17,8716	0,0024	17,8728	0,7437
-14,4	18,1647	18,1589	0,0058	18,1618	0,4547
-10,8	18,3789	18,3729	0,0060	18,3749	0,2416
-7,2	18,5191	18,5198	-0,0004	18,5196	0,0959
-3,6	18,6001	18,6017	-0,0016	18,6009	0,0156
0	18,6160	18,6169	-0,0009	18,6165	0,0000
+3,6	18,6001	18,6017	-0,0016	18,6009	0,0156
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
+36,0	15,0083	15,0082	0,0001	15,0083	3,6082

Durch Einführung der Substitutionsvariablen $x = -36 u$ werden die Grenzen des Integrals in $+1$ und -1 verwandelt. Die Einzelintegrale I_i ($i = 0, 2, 4$) zu Gleichung 3 werden berechnet, die Kugelfunktionen P_i eingesetzt und die Koeffizienten a_i damit bestimmt. Es ergeben sich die Werte:

$$\begin{array}{lll} I_0 = 2,1717 & I_2 = 1,8467 & I_4 = 0,9779 \\ a_0 = 1,0858 & a_2 = 2,3355 & a_4 = 0,1915 \end{array}$$

Mit diesen Koeffizienten liefert Gleichung 4 als Minimum der Fehlerquadrate

$$\begin{array}{l} M_2 = 0,008_6 \\ M_4 = 0,000_6 \end{array}$$

Damit ist klagestellt, dass die empirische Meridiankurve durch eine Parabel 4. Ordnung am besten approximiert wird, da bei M_4 das mittlere Fehlerquadrat unter die Fehlergrenze gesunken ist.

Die Gleichungen der Annäherungsparabeln 2. und 4. Ordnung lauten:

$$\begin{array}{l} g_2(u) = -0,0819 + 3,5031 u^2 \\ g_4(u) = -0,0102 + 2,7861 u^2 + 0,8365 u^4 \text{ resp.} \\ g_2(x) = -0,0819 + 270 \cdot 10^{-5} x^2 \\ g_4(x) = -0,0102 + 214 \cdot 10^{-5} x^2 + 501 \cdot 10^{-9} x^4 \end{array}$$

Zum Unterschied gegenüber a_i seien die Koeffizienten dieser Gleichungen mit b resp. b' bezeichnet.

Auf diese Art sind für eine Anzahl gemessener Meridiankurven die Näherungskurven berechnet und in Tabelle IV die Koeffizienten a_i sowie die Werte M_2 und M_4 zusammengestellt. Jede Gleichung ist unabhängig von der andern auf den jeweiligen Linsenscheitel als Ursprung bezogen.

§ 19. Diskussion der Approximationsergebnisse.

Der Vergleich der M_2 - und M_4 -Werte in Tabelle IV zeigt, dass durchwegs die Parabel 4. Ordnung (P^{IV}) sich den experimentellen Meridianpunkten besser anschmiegt als jene 2. Ordnung (P^{II}), wenn auch in Einzelfällen (1, 13, 14) die Annäherung nicht wesentlich besser ist. Dieses Ergebnis erweist sich unabhängig von der Grösse der Belastung (vgl. 1–10), vom Richtungssinn der Beanspruchung (z. B. 3–8 und 9–10), von der Scheibendicke (1–10 gegen 11–14), von der angewendeten Einspannung (15, 16 gegen 1–10) und auch unabhängig vom Verhältnis der Durchbiegung y_0 im Linsenscheitel zur Scheibendicke h . Da nach den Biegungstheorien auch bei Platten, die dem Hookeschen Ge-

setz folgen, eine P^{IV} als Meridiankurve resultiert, ist bezüglich Krümmungscharakter eine Übereinstimmung zwischen Kunststoffmaterial und elastischem Material festzustellen. Die mechanische Seite des Problems (z. B. Koeffizientenvergleichung der experimentellen und theoretischen Gleichung) wurde nicht weiter verfolgt, da die Approximation vor allem die optische Brauchbarkeit der Krümmungsfläche klären sollte.

Tabelle IV.

Nr.	Beanspruchung kgcm^{-2}		$\frac{y_0}{h}$ ca.	$g(u) = a_0 P_0 + a_2 P_2 + a_4 P_4$			Güte der Approximation	
	von	auf		a_0	a_2	a_4	M_2	M_4
1	0	0,2	4	0,5967	1,2201	0,0298	0,0007	0,0005
2	0	0,3	5	0,6092	1,3033	0,0926	0,0021	0,0003
3	0	0,5	8	0,8221	1,7632	0,1341	0,0041	0,0003
4	...	0,5	8	0,8029	1,7310	0,1410	0,0046	0,0002
5	0,5	0,7	9	0,9829	2,0945	0,1613	0,0057	0,0001
6 (3)	0,2	0,9	11	1,0926	2,3372	0,1813	0,0070	-0,0001
7 (3)	...	0,9	10	1,0718	2,2992	0,1873	0,0078	0,0000
8 (5)	0	0,9	11	1,0858	2,3355	0,1915	0,0086	0,0006
9 (4)	0,9	0	7,5	0,6646	1,5288	0,2693	0,0160	0,0000
10 (4)	...	0	8	0,6930	1,5705	0,2473	0,0132	-0,0002
11	0	0,3	2,5	0,6961	1,3190	-0,0910	0,0025	0,0007
12 (22)	0	0,5	3	0,8515	1,6443	-0,0645	0,0015	0,0006
13 (23)	0	0,7	3,5	0,9697	1,8982	-0,0350	0,0010	0,0008
14 (24)	0	0,9	4	1,0598	2,0885	-0,0164	0,0004	0,0003
15 ▲	0	0,1	6	0,5765	1,2402	0,0884	0,0021	0,0005
16 ▲	0	0,5	10	0,8962	1,9823	0,2363	0,0122	-0,0002
17	0	0,05	28	3,0070	6,2772	0,4249	0,0360	-0,0040
18	0	0,2	58	5,2784	11,3605	1,2711	0,3592	0,0002

Bemerkungen zur Tabelle: Nr. 1—10, 15, 16 stammen von 0,5 mm dicken, 11—14 von 1 mm dicken Plexiglasscheiben, 17, 18 von einer 0,5 mm Kautschukmembran. Bei 15, 16 war die Scheibe auf einer Kante gelagert, nicht wie bei den andern auf ebenem Scheibenträger. Die eingeklammerten Zahlen bei der Kurvennummer weisen auf Fig. 11 hin, wo $V = \text{const}$ -Kurven derselben Platte wiedergegeben sind. Die negativen Resultate unter den theoretisch immer positiven M -Werten rühren von der numerischen Berechnung der Integrale durch Näherungsmethoden her.

P^{IV} unterscheidet sich bezüglich des Krümmungsverlaufes von einer P^{II} bekanntlich durch den abgeflachten Scheitel. P^{IV} hat im Scheitel nicht das Krümmungsmaximum, sondern ein Maximum des Krümmungsradius, weshalb der Scheitelkrümmungskreis *äußerer* Schmiegekreis ist. Die Berechnung des Krümmungs-

radius auf Grund der Approximationsgleichung hat Werte ergeben, die vom Scheitel gegen den Rand hin abnehmen. Es darf aber hieraus erst dann auf den wirklichen Linsenmeridian geschlossen werden, wenn Betrag und Richtungssinn der Abweichungen zwischen Meridian und Näherungskurve bekannt sind.

Tabelle V.

Nr. in Tab. IV	Koeff.			im Abstand vom Linsenscheitel				
	b'_2 (10^{-5})	b'_4 (10^{-9})		0	5 mm	10 mm	20 mm	30 mm
8	214	501	R*	233,6	225,8	205,4	151,9	108,3
			R	233,6	225,7	204,8	149,5	103,1
			D*	2,14	2,21	2,43	3,29	4,61
			D	2,14	2,21	2,44	3,34	4,84
			$\left. \begin{matrix} R^*-R \\ D^*-D \end{matrix} \right\} \%$	∓ 0	∓ 0	$\mp 0,3$	$\mp 1,5$	$\mp 4,8$
1	131	99	R	381,6	377,4	365,1	323,0	271,0
			D	1,31	1,32	1,36	1,54	1,84
3	166	339	R	301,1	292,1	268,2	202,1	143,2
			D	1,66	1,71	1,86	2,47	3,49
4	159	364	R	314,4	304,0	276,4	202,9	140,6
			D	1,59	1,64	1,81	2,46	3,55
9	99	700	R	505,0	456,6	354,6	187,2	104,8
			D	0,99	1,09	1,41	2,67	4,77
10	110	643	R	454,5	417,9	344,6	189,1	109,3
			D	1,10	1,19	1,45	2,64	4,57
15	118	228	R	423,7	407,9	366,9	261,8	177,2
			D	1,18	1,22	1,36	1,91	2,82
16	161	610	R	310,5	293,8	253,0	162,6	101,9
			D	1,61	1,70	1,97	3,07	4,91
14	246	-43	R	203,4	203,7	205,4	212,1	224,4
			D	2,46	2,45	2,43	2,35	2,22

Es werden zuerst in Tabelle V die Krümmungsradien zu einer Anzahl Kurven aus Tabelle IV angegeben, die nach der Näherungsgleichung $R = (y'')^{-1}$ berechnet sind. Zur Orientierung über den durch diese Näherung gemachten Fehler ist bei einer der meistgekrümmten Schalen der Krümmungsradius R^* nach der genauen Formel gerechnet und die Differenz in % angeführt. Erst bei den beiden letzten Meßstellen zeigt sich ein merklicher

Unterschied. Die genauen R -Werte sind etwas grösser. Gleichzeitig sind die entsprechenden Dioptrienwerte D angegeben, wie sie sich bei einer Plankonvexlinse von $n = 1,5$ ergäben.

Über den Richtungssinn der Abweichungen gibt Fig. 12 Aufschluss. Die Näherungskurven (sowohl P^{II} als P^{IV}) sind durch die horizontale Gerade dargestellt — und zwar wegen der Kurvensymmetrie nur der positive Abschnitt der Abszisse vom Scheitel aus. Die Kurven mit Kreisen zeigen, wie die Meridiankurve von der P^{II} abweicht, die Kurven mit Punkten, wie sie sich von der P^{IV} -Näherungsfunktion unterscheidet. In der Übersichtslegende ist der erste Fall an einem Linsenquerschnitt dargestellt.

Auf Grund der Ergebnisse aus Tabelle V und Fig. 12 lassen sich bezüglich der Annäherung der empirischen Meridiankurven folgende Feststellungen machen:

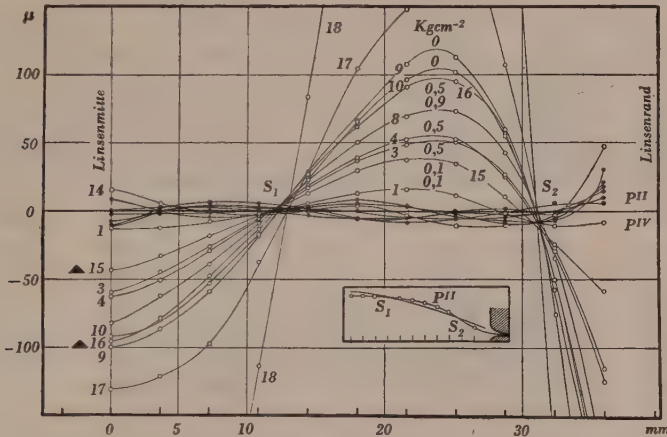


Fig. 12.

Numerische Werte siehe Anhang.

1. Durch Fig. 12 wird die aus Tabelle IV hervorgehende durchgängig bessere Approximation durch eine P^{IV} als durch P^{II} bestätigt.

2. Bei geringem Durchbiegungsverhältnis y_0/h , solange also die Normaldruckkomponenten auf die Scheibenfläche wegen der schwachen Krümmung als parallel angesehen werden können, ist die Approximation durch quadratische Parabeln ungefähr gleichwertig wie durch P^{IV} . (Vgl. die Annäherungsüberlegung in der 1. Mitteilung³.)

3. Der Vergleich der Kurven 3, 4 mit 9, 10 (siehe auch Tab. IV) zeigt, dass die Nachwirkungserscheinungen bei zeitlich ausgedehnt-

ter Belastung der Kunststoffscheiben ein Entfernen von der P^{II} -Form, bei Entlastung ein Annähern bewirken.

4. Da die Differenzen zwischen Meridiankurve und Approximations- P^{IV} durchwegs unter $\pm 10 \mu$ bleiben (abgesehen von den randnächsten Werten), können die in Tabelle V berechneten Krümmungsradien auch als die des wirklichen Linsenmeridians gelten.

5. Die Tatsache, dass sich mit wachsendem y_0/h -Verhältnis die Meridiankurve durch Scheitelabflachung und stärkere Wölbung der Zone zwischen S_1 und S_2 (cf. Fig. 12, Übersichtslegende) von der quadratischen Parabel entfernt, lässt eine Annäherung an die sphärische Form vermuten. Eine Bestätigung dieser Annahme ergibt sich, wenn man z. B. unter der Voraussetzung, die

x mm	Kurve 17			Kurve 18		
	y mm	R mm	Dioptr.	y mm	R mm	Dioptr.
0,0	0,0000	82,91	6,03	0,0000	55,40	9,02
3,6	0,0839	77,27	6,47	0,1245	52,11	9,61
7,2	0,3425	77,85	6,59	0,5524	47,19	10,59
10,8	0,7534	77,78	6,42	1,2543	47,12	10,61
14,4	1,3478	77,58	6,44	2,2463	47,17	10,57
18,0	2,1178	77,55	6,44	3,5746	47,11	10,61
21,6	3,1096	76,57	6,53	5,3029	47,64	10,72
25,2	4,3045	75,91	6,58	7,4119	46,54	10,74
28,8	5,7873	74,55	6,70	10,1251	46,39	10,77
32,4	7,5711	73,11	6,83	13,5670	45,47	10,99
36,0	9,7137	71,56	6,98	18,1701	44,74	11,17

Kautschukkurven 17, 18 seien kreisförmig, den Radius eines solchen durch den Linsenscheitel als Ursprung gehenden Kreises berechnet. Die Koordinaten der gemessenen Meridianpunkte müssten dann, in die Scheitelgleichung des Kreises $(x^2 + y^2)/2y = R$ eingesetzt, immer denselben Wert ergeben. Die Resultate lassen tatsächlich eine Annäherung an die Kugelform als Minimaloberfläche erkennen.

6. In Fig. 12 ergeben sich aus der Gesamtheit aller Differenzkurven zwei auffallend ausgeprägte Übereinstimmungspunkte zwischen Meridiankurve und Approximationsparabel (S_1 , S_2), die sowohl druckunabhängig sind wie auch unbeeinflusst vom Biegungssteifigkeitsunterschied zwischen Plexiglas und Kautschuk (E von Plexiglas = 28000 kgcm^{-2} , von Kautschuk = 2 kgcm^{-2}). Es dürfte aus dem Verlauf der Differenzen angenommen wer-

den, dass S_2 dem materialunabhängigen Wendepunkt entspricht (§ 10), der mit $x = 0,7a$ ($a = \text{Radius}$) einem Zwischenstadium zwischen fest eingeklemmtem und frei drehbarem Scheibenrand entspräche. S_1 fällt ungefähr mit dem aus Tab. V ersichtlichen Beginn stärkerer Krümmung in ca. 10 mm Distanz vom Scheitel zusammen.

7. Aus der Materialunabhängigkeit der Lage von S_2 folgt, dass der die Krümmung entscheidende Vorgang zwischen S_2 und der Einklemmstelle vor sich geht. Damit sich die zentrale Partie der Linsenschale störungslos zur Minimalvolumform ausbilden kann, müsste also entweder die Biegesteifigkeit der Schale so gering sein, dass der Einfluss der Einspannbedingungen schon in unmittelbarer Nähe der Einklemmstelle aufhört und auf die Steigung der Meridiankurve in S_2 nicht mehr einwirkt. Oder aber es müsste durch entsprechende (eventuell veränderliche) Dicke der Linsenschale oder durch geeigneten Neigungswinkel des Scheibenträgers die Steigung des Meridians vom Rand her über S_2 hinein gesteuert werden. Schliesslich zeigt der Vergleich der Kurven 15, 16 (Fig. 12) mit 1, 3, dass bei gleicher Belastung die auf einer Kante gelagerten Scheiben (also freier drehbarer Rand) sich mehr im Sinn der Kautschukmembran verformen als die Scheiben mit flächenhafter Einspannung.

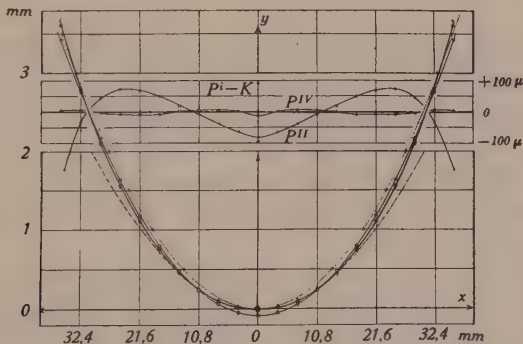


Fig. 13.

Eingezeichnet ist die experimentelle Kurve (dicke Linie), die Annäherungsparabel 2. Ordnung, wie sie sich nach der Berechnung anschmiegt (dünne Linie) und in den Scheitel verschoben (gestrichelte Linie) mit Angabe des sich der Parabel weitgehend anschmiegenden Scheitelkrümmungskreises (Rhomben-Kreispunkte). Trotz stark überhöhten Masstabes lässt sich die Approximationsparabel 4. Ordnung wegen zu geringer Differenzen nicht von der Hauptkurve trennen. Ein kleiner Pfeil bei den Messpunkten gibt den Abweichungssinn an. Der Scheitelkrümmungskreis der P^{IV} verläuft ausserhalb der Meridiankurve, nachdem er sich der Scheitelzone von ca. 25 cm Durchmesser ziemlich gut von aussen angeschmiegt. In vergrössertem Masstab sind die auftretenden Differenzen zwischen empirischer (K) und annähernder (P^i) Kurve angegeben.

Abschliessend sind in Fig. 13 am Beispiel der Kurve 8 die Ergebnisse der Meridianuntersuchung zwecks Gewinnung einer Übersicht und praktischer Schlussfolgerungen zusammengefasst.

Auf Grund des aus Tab. IV und Fig. 12 hervorgehenden Charakters des Linsenschalenmeridians können die hier dargestellten Verhältnisse als allgemein zu erwartende gelten. Der Meridian der Krümmungsfläche wird allgemein eine Parabel 4. Ordnung sein, kann sich aber je nach den Umständen mehr einer quadratischen Parabel oder einem Kreis nähern. Damit steht prinzipiell die Möglichkeit einer Steuerung im einen oder andern Sinn offen⁷⁸⁾. Sieht man davon vorläufig ab, so stellt sich das Ergebnis vom optischen Standpunkt aus wie folgt dar: Die der P^{IV} entsprechende Krümmungsfläche mit der mehr oder weniger abgeflachten Scheitelkalotte ergibt stärkere Aberration der Randstrahlen als eine sphärische Fläche und weist beim Übergang von der Abflachung zur stärkeren Krümmung der Randpartie eine Störzone auf (entsprechend S_1 in Fig. 12). In Anpassung an diese Gegebenheiten bieten sich folgende Wege zur Verwendung solcher Krümmungsflächen als Linsen:

1. Abblendung der Randzone, Benützung der Scheitelzone, soweit sie mit der innern oder äussern Schmiegekugel (entsprechend P^{II} oder P^{IV}) zusammenfällt und somit sphärischen Charakter hat.

2. Abblendung der abgeflachten Mittelzone, Benützung der anschliessenden Zwischenzone. In diesem wie im vorhergehenden Fall kann durch entsprechend grosse Ausführung der Gesamtlinse eine genügend grosse Apertur nutzbar sein.

3. Korrektur der Fehler der dynamisch geformten Linsenschale durch geeignete Flächenformen, die in fester Ausführung die zweite Schale bilden.

4. Verzicht auf grössere Beanspruchung der Schalen mit Rücksicht auf deren Kunststoffcharakter. Verteilung der Formgebung auf beide Linsenschalen: die eine bewirkt als starre Schale von bestimmter Krümmung die Grundbrechkraft der Linse, die zweite, flexible Kunststoffschale (eben oder vorgekrümmt) übernimmt nur die Variation der Brechkraft innerhalb bestimmter Grenzen. Bei Beschränkung auf schwache Krümmungen wird das Material mechanisch weniger beansprucht und die optisch ungünstige P^{IV} -Form weniger ausgeprägt. Dies dürfte wohl die dem heutigen Stand der Schalenmaterialien am besten angepasste Lösung des dynamischen Linsenproblems sein.

Zusammenfassung.

Der experimentelle Teil zeigt, dass es wohl leicht biegsame und klar durchsichtige Kunststoffe gibt (Plexiglas), die als Linsenschalen dienen können, dass aber mit den für Kunststoffe typischen Nachwirkungserscheinungen zu rechnen ist, die sich auf physikalischem Weg nur einschränken, nicht aber eliminieren lassen. Es ergibt sich:

A) elastomechanisch:

1. bei $p = \text{const.}$: Elastisches Verhalten bei kurzzeitigen Belastungen, sonst Nachdehnung und Kaltfluss. Ein $p = \text{const.}$ -Konstruktionsprinzip mit jetzigem Material unmöglich. Untersuchung bei $p = \text{const.}$ zeigt, dass Kenntnis der Relaxationszeiten λ_i zur Materialauswahl und deren Entwicklung auf das Kautschukelastizitätsverhältnis zur Materialverbesserung notwendig sind.
2. bei $\dot{y} = 0$ durch $V = \text{const.}$: Zwischen Füllvolumen V , der aufzuhalten- den äusseren Verformung der Linsenschale \dot{y} und der Wölbungsform F herrscht folgender Zusammenhang: Nur bei strenger Gültigkeit des Hooke'schen Intervalls bewirkt $V = \text{const.} \rightarrow \dot{y} = 0 \rightarrow F = \text{const.}$ In Ermangelung von kautschukelastischen Kunststoffschalen muss allgemein gerechnet werden mit $V = \text{const.} \rightarrow \dot{y} \neq 0 \rightarrow F \neq \text{const.}$ Bei Beschränkung der Beanspruchung und unter Inkaufnahme remanenter Verformungen kann erreicht werden, dass die Nachwirkungen hinreichend klein bleiben, um genügend Formkonstanz zu ermöglichen. Also $V = \text{const.} \rightarrow \dot{y} \sim 0 \rightarrow F \sim \text{const.}$

B) optisch:

Typus der Meridianlinie im allgemeinen eine Parabel 4. Ordnung, wobei aber je nach Beanspruchung auch Annäherung an quadratische Parabel oder sphärische Form vorliegen kann. Es besteht Möglichkeit der Kurvensteuerung durch Verminderung der Biegesteifigkeit oder Variation der Randbedingungen. Der Verwertung eines dynamisch geformten Linsenkörpers stehen mehrere Wege offen, die dem heutigen Stand der Kunststoffmaterialien angepasst sind. Mit Verbesserung des Materials in Richtung Kautschukelastizität wird sich der Anwendungsbereich erweitern.

Ziel der vorliegenden Arbeit war, einige Grundfragen des bereits früher von andern Autoren aufgegriffenen Problems der variablen Linse zu untersuchen und insbesondere experimentell zu prüfen, wie weit sich mit gegenwärtig zur Verfügung stehenden transparenten Kunststoffscheiben eine derartige Linsenkonstruktion mit veränderlicher Brennweite analog zur Augenlinse verwirklichen lässt. Die Untersuchungen ergaben, dass eine Vervollständigung der Linsenelemente (Füllung, Schale, Form) entwicklungsfähige optische Vorteile erschliesst, und dass es möglich ist, durch Druckveränderung auf die Linsenfüllung den Krümmungsgrad zu regulieren und die Krümmungsform durch Volumkonstanz derart zu fixieren, dass solche dynamische Linsen schon in einfacher Ausführung im Rahmen der Gebrauchsoptik messbare

Resultate liefern. Es zeigte sich dabei, dass zur Weiterentwicklung und Vervollkommnung dieser Lösung des Problems (abgesehen von rein technischen Fragen der Ausführung) vor allem die Unstabilität des Linsenschalenmaterials und die Steuerung der aus der Durchbiegung resultierenden Linsenform anzustreben sind.

In Verfolgung des ersten Zieles wird es sich hauptsächlich darum handeln, nach Methoden der Kunststoffchemie dem Schalenmaterial jene Struktur zu geben, welche die Kautschukelastizität grundlegt. Veröffentlichte Arbeiten weisen darauf hin, dass es bereits gelungen ist, speziell erwünschte Eigenschaften hochzuzüchten⁷⁹⁾. Es sollte daher nicht unmöglich sein, auch ein vollwertiges Linsenschalenmaterial zu schaffen. Auf Grundlage solchen Materials, dessen Gleichgewichtseinstellung nicht mehr oder kaum zeitabhängig ist, lässt sich die jetzt schon verwendbare Linsenapertur vergrössern, können die geometrischen, chromatischen und übrigen sogenannten Linsenfehler systematisch überwunden werden.

Physikalisches Institut
der Universität Freiburg, Schweiz.

Die Bestimmung des Molekulargewichts frei verdampfender Teilchen

von F. Metzger.

(31. V. 1943.)

Inhalt: Es wird eine elektrische Doppelwaage beschrieben, welche die gleichzeitige Messung zweier zueinander senkrechter Kräfte im Vakuum gestattet. Mit dieser Waage werden an im Hochvakuum verdampfenden Schichten Verdampfungsgeschwindigkeiten und Verdampfungsdrucke gemessen. Aus diesen Grössen ergibt sich bei bekannter Verdampfungstemperatur das Molekulargewicht der sich bei freier Verdampfung vom Festkörper ablösenden Teilchen*).

Ergebnisse: Tellur verdampft zweiatomig; für die Atomzahl der Selenmoleküle ergibt sich der Mittelwert $5,6 \pm 0,4$. Durch spektroskopische Versuche am freien Molekularstrahl werden diese Ergebnisse bestätigt. Während beim *Mercurichlorid* die Verdampfung in Form von $HgCl_2$ -Molekülen erfolgt, lösen sich beim *Kalomel* die Dissoziationsprodukte Hg und $HgCl_2$ vom Kristall ab.

Messungen am *Ammoniumchlorid* zeigen, dass NH_3 - und HCl -Moleküle den NH_4Cl -Kristall verlassen, die im Dampf festgestellte vollständige Dissoziation also schon auf der Kristalloberfläche eintritt. Der Gegensatz von freier Verdampfung und Verdampfung im Gleichgewicht tritt beim *Arsen* hervor, man findet mit der Doppelwaage eine mittlere Atomzahl von 2,6, während der gesättigte As-Dampf praktisch 4-atomig ist.

I. Einleitung.

§ 1. Die Molekulargewichtsbestimmungen am *gesättigten* Dampf geben Aufschluss über den Assoziationszustand im Gleichgewicht. Die im Dampf bei einer bestimmten Temperatur stabile Molekülart braucht aber keineswegs übereinzustimmen mit der bei der Ablösung vom Festkörper energetisch bevorzugten Form. Es ist wohl möglich, dass *nach* dem Ablösen vom Kristall Assoziation oder Dissoziation eintritt und dass umgekehrt die Dampfmoleküle erst nach einer Zwischenreaktion in den Festkörper eingebaut werden.

Die bei der Ablösung bevorzugte Form, die eng mit den Eigenschaften des Festkörpers verknüpft ist, lässt sich untersuchen, wenn die durch die Gegenwart der Dampfphase hervorgerufenen Veränderungen des Verdampfungsprozesses vermieden, Assoziation bzw. Dissoziation der abgelösten Moleküle verhindert werden. Man erreicht dies durch langsame Verdampfung im Hochvakuum,

*) Eine vorläufige Mitteilung ist erschienen: F. METZGER und E. MIESCHER, *Helv. Phys. Acta* **16**, 205, 1943.

bei der durch Abpumpen oder sofortiges Kondensieren an einer gekühlten Auffangfläche die Ausbildung einer Dampfphase, eines Gleichgewichts, verunmöglicht wird. Eine solche Verdampfung von einer freien Oberfläche unter Verhinderung von Zusammenstößen sei im folgenden *freie* Verdampfung genannt.

Die Bestimmung des Molekulargewichts der sich bei freier Verdampfung vom Kristall ablösenden Moleküle ist das Ziel der vorliegenden Arbeit.

Es ist bemerkenswert, dass trotz des grossen Unterschiedes zwischen freier Verdampfung und Verdampfung im Gleichgewicht das Verhältnis der entsprechenden Verdampfungsgeschwindigkeiten*), der Kondensationskoeffizient α , bei den bisher untersuchten Substanzen mit wenigen Ausnahmen zwischen 0,1 und 1 liegt**). Dies hat LANGMUIR¹⁾ veranlasst, aus den Verdampfungsgeschwindigkeiten schwerflüchtiger Metalle auf deren Dampfdrucke zu schliessen. Nachträgliche, direkte Messungen von HARTECK²⁾ weichen von den LANGMUIR'schen Werten nicht unerheblich ab. Sie rechtfertigen immerhin die Annahme LANGMUIR's, dass die untersuchten Metalle einatomig verdampfen. Sie zeigen weiter, dass, solange die Moleküle im gesättigten Dampf mit den sich ablösenden Teilchen übereinstimmen, aus den Dampfdrucken die Verdampfungsgeschwindigkeiten bei freier Verdampfung grössenordnungsmässig abgeschätzt werden können ($\alpha \sim 1$).

Um freie Verdampfung handelt es sich auch bei den ersten, klassischen Versuchen von STERN³⁾, der aus seinen Messungen der Molekulargeschwindigkeit schloss, dass Silber einatomig verdampft. Die späteren Messungen mit verbesserten Methoden, z. B. diejenigen von ELDRIDGE⁴⁾ am Kadmium, lieferten nur noch Aussagen über die Verhältnisse im gesättigten Dampf, da dabei in allen Fällen ein mit Spalt versehener Ofen an Stelle des mit der Substanz überzogenen Pt-Drahtes von STERN verwendet wurde.

Zur Kenntnis des Molekulargewichts frei verdampfender Teilchen trugen auf ganz anderem Wege MELVILLE und GRAY⁵⁾ durch Beobachtungen am Phosphor bei. PREUNER und BROCKMÜLLER⁶⁾ wie auch STOCK, GIBSON und STAMM⁷⁾ hatten die Gleichgewichte $P_4 \rightleftharpoons 2 P_2$ und $P_2 \rightleftharpoons 2 P$ untersucht; ihre Ergebnisse stimmen darin überein, dass der Anteil von P und P_2 unterhalb 1000° K gegenüber dem von P_4 vernachlässigt werden kann. MELVILLE und GRAY schlossen aus ihren Versuchen, dass P_2 -Moleküle immer zu rotem

*) Die Verdampfungsgeschwindigkeit im Gleichgewicht aus der Stosszahl pro Flächeneinheit gerechnet.

**) Als Zusammenfassung vgl. M. VOLMER: „Kinetik der Phasenbildung“ 1939.

Phosphor kondensieren und vermuteten, dass beim Erwärmen roter Phosphor auch umgekehrt P_2 -Moleküle abgebe. Sie bestimmten die Verdampfungsgeschwindigkeit von rotem Phosphor bei freier Verdampfung.*) Das Ergebnis war überraschend, betrug doch z. B. bei 400°C , also nahe beim Siedepunkt des roten Phosphors, die Verdampfungsgeschwindigkeit $10^{-7} \text{ g/cm}^2 \text{ sec}$, während dem Dampfdruck (630 mmHg) eine Verdampfungsgeschwindigkeit von rund $10 \text{ g/cm}^2 \text{ sec}$ entspricht. Diese beiden Werte für die Verdampfungsgeschwindigkeit können nur durch die Annahme eines Kondensationskoeffizienten von der Grössenordnung 10^{-8} in Einklang gebracht werden. Ein solcher Wert von α deutet auf eine Besonderheit im Verhalten der betreffenden Substanz hin; er zeigt, dass für das Dampfdruckgleichgewicht Vorgänge massgebend sein können, die die ungestörte Verdampfung von der freien Oberfläche im Hochvakuum gar nicht beeinflussen. Für den Phosphor entnehmen wir den Untersuchungen von MELVILLE und GRAY: Weisses Phosphor verdampft in der Form von P_4 , roter in der Form von P_2 -Molekülen; beiden Modifikationen stehen aber fast ausschliesslich P_4 -Moleküle im Dampf gegenüber.

Von MIESCHER⁸⁾ ist vor kurzem eine Methode zur Bestimmung des Molekulargewichts frei verdampfender Teilchen entwickelt worden, bei der mit Hilfe einer elektrischen Waage die für die Berechnung des Molekulargewichts notwendigen Grössen bestimmt werden (vgl. § 2). Aus Messreihen an Eis und festem Schwefel schloss er auf die Verdampfung von nichtassoziierten H_2O - bzw. von S_8 -Molekülen.

Im Anschluss an diese Messungen MIESCHER's wurde eine verbesserte Methode ausgearbeitet und wurden mit der neuentwickelten Apparatur Messungen an verschiedenen Stoffen durchgeführt. Methode, Apparatur und Messergebnisse werden im folgenden beschrieben.

II. Methode.

§ 2. Ein Festkörper verdampft im Hochvakuum. Die weggehenden Moleküle werden auf einer mit flüssiger Luft gekühlten Wand aufgefangen. Zwischen der Verdampfungsgeschwindigkeit G ($\text{g/cm}^2 \text{ sec}$), dem Druck P (dyn/cm^2) der verdampfenden Moleküle auf die Oberfläche, der Temperatur T ($^\circ \text{K}$) der Oberfläche und dem Molekulargewicht M der verdampfenden Teilchen besteht die einfache Beziehung**)

$$P = \sqrt{\frac{\pi R T}{2 M}} G \quad (1)$$

*) loc. cit. S. 1026.

**) Vgl. die zitierte Arbeit von E. MIESCHER⁸⁾, Seite 508.

oder

$$M = \frac{\pi R T}{2} \cdot \left(\frac{G}{P} \right)^2. \quad (2)$$

Misst man G in $\text{mg}/\text{cm}^2 \text{ sec}$ und P in mg^*/cm^2 , so ergibt sich, wenn für die Konstanten ihre Zahlenwerte eingesetzt werden,

$$M = 135,6 \cdot T \cdot \left(\frac{G}{P} \right)^2. \quad (3)$$

Die Bestimmung des Molekulargewichts der die Oberfläche verlassenden Teilchen kann also durch eine Temperaturbestimmung und die gleichzeitige Messung einer Kraft (P) und einer Kraftänderung erreicht werden, wenn die Verdampfungsgeschwindigkeit G durch den ihr entsprechenden Gewichtsverlust $g \cdot G$ ($g = 981 \text{ cm}/\text{sec}^2$) gemessen wird. Die sich ändernde Kraft ist in ihrer Richtung (g) festgelegt, die Richtung der anderen (P) wird erst durch die noch beliebige Orientierung der Oberfläche bestimmt. MIESCHER (loc. cit.) arbeitete mit einer horizontalen Oberfläche und daher mit antiparallelen Kräften. Die resultierende Kraft konnte er mittels eines zur Waage ausgebildeten Drehspulinstrumentes messen. Bei konstanter Verdampfung (konstantem P) gab ihm der zeitliche Verlauf der resultierenden Kraft Aufschluss über die Gewichtsänderung und damit über G . Den Wert von P erhielt er am Schluss des Versuchs durch folgenden Kunstgriff: Durch plötzliches Einlassen von Luft wird die Verdampfung momentan gestoppt, P wird null, d. h. die Waage wird um den Betrag von P erleichtert. Durch erneutes Austarieren ergibt sich P .

Mit dem Einlassen von Luft in das Versuchsgefäß sind Störungen verbunden, die die Ergebnisse stark fälschen können. Neben den Radiometerkräften, die in ihrer Grössenordnung allerdings abgeschätzt werden können (vgl. Fig. 3, § 7) treten noch, namentlich beim Arbeiten bei höheren Temperaturen, Reaktionen der eingelassenen Luft mit der auf der Waagschale zurückgebliebenen Substanz auf.

Es liegt nahe, diese Fehlerquellen durch Änderung der Methode des Verdampfungsabbruchs oder durch Trennung der beiden Grössen G und P von Anfang an auszuschalten. In der zu beschreibenden Apparatur ist die zweite Möglichkeit verwirklicht. Die Oberfläche ist vertikal gestellt, P und $g \cdot G$ stehen senkrecht aufeinander und sind während des ganzen Versuches getrennt messbar.

Die Messung der beiden zueinander senkrechten Kräfte geschieht mit einer zu diesem Zwecke gebauten elektrischen Doppel-

waage, die im nächsten Abschnitt beschrieben wird. Zur Festlegung der Temperatur der Oberfläche wird die Verdampfungsgeschwindigkeit herangezogen, sofern entsprechende Messungen vorliegen. Wenn das nicht der Fall ist, liefern Heizstrom und Verdampfungsdruck P verhältnismässig gute Anhaltspunkte (max. $\pm 20^\circ$) zur Festlegung der Temperatur.

Sind P , G und T ermittelt, so ist nach Formel (3) die Grösse M , die dort kurz als das Molekulargewicht der verdampfenden Teilchen bezeichnet wurde, bestimmt. Solange nur eine einzige Teilchensorte verdampft, ist diese Bezeichnung berechtigt. Verdampfen jedoch von der Oberfläche gleichzeitig mehrere Teilchen verschiedener Masse, so stellt die errechnete Grösse M nurmehr ein mittleres Molekulargewicht dar. Die einzelnen Teilchensorten leisten dazu je nach Masse und Häufigkeit einen verschiedenen Beitrag.

Die Art der Mittelung ist leicht zu übersehen: Von den m Teilchensorten mit den Molekulargewichten M_1, M_2, \dots, M_m verdampfen in der Zeiteinheit n_1, n_2, \dots, n_m Mole. Der Messung zugänglich ist der totale Rückstoss (vgl. (1)):

$$P = \sum_{v=1}^m \sqrt{\pi \frac{RT}{2 M_v}} \cdot n_v M_v = \sqrt{\pi \frac{RT}{2}} \cdot \sum_{v=1}^m n_v \sqrt{M_v}$$

und die totale Verdampfungsgeschwindigkeit

$$G = \sum_{v=1}^m n_v M_v;$$

daraus ergibt sich

$$M = \pi \frac{RT}{2} \cdot \left(\frac{G}{P} \right)^2 = \left(\frac{\sum n_v M_v}{\sum n_v \sqrt{M_v}} \right)^2. \quad (4)$$

III. Die Apparatur.

§ 3. Die *Doppelwaage*. Es sind zwei aufeinander senkrechte Kräfte zu messen. Dazu sind zwei aufeinander senkrechte Achsen notwendig. Als erste Achse (A_1 in Fig. 1) dient diejenige eines Drehspulinstruments. Sie trägt in einem Aluminiumring, in Stein gelagert, die zweite Achse A_2 . Mit A_2 fest verbunden ist der Waagbalken W , ein Al-Draht von 1 mm Durchmesser. Die beiden Achsen und damit der Waagbalken werden durch die zwei Zuleitungsfedern der Drehspule und eine Spiralfeder um A_2 in einer definierten Nullage festgehalten.

Das eine Ende des Waagbalkens trägt das Plättchen T mit der Substanz, der andere Arm läuft in eine Spitze aus. Auf ihm ist, ca. 1 cm von der Spitze entfernt, senkrecht zu W ein 8 mm langer Messingstreifen befestigt, der seinerseits das ebenso lange Weich-eisenstück Fe trägt. Dieses Weich-eisenstück taucht in eine Spule S , an der noch der Gegenzeiger Z angebracht ist.

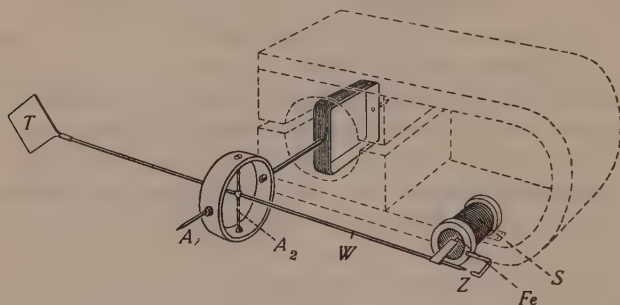


Fig. 1.

Die Doppelwaage.

Die Kraftmessung geschieht folgendermassen: Ein Drehmoment in bezug auf die Achse A_1 wird durch Änderung des Drehspulstromes kompensiert; ein Drehmoment um A_2 durch Änderung des Wechselstromes in der Spule S . Der Strom des Drehspulinstruments kann von -30 bis $+30$ mA, derjenige der Spule S von 0 — 50 mA verändert werden. Einem Strom von 1 mA in der Drehspule entspricht eine Kraft von $1,1$ mg* am Plättchen, während erst ca. 28 mA in der Spule S die gleiche Wirkung hervorrufen. Das Direktionsmoment der verwendeten Federn beträgt je 5 mg* cm pro Grad*). Die Eichung wird für jede Achse gesondert durchgeführt, die nicht benutzte Achse wird dabei blockiert.

Als Substanzträger eignen sich Mikroskopdeckgläschen ($0,15 \times 18 \times 18$ mm); sie vereinigen den Vorzug grosser Indifferenz gegenüber vielen chemischen Verbindungen mit dem Vorteil geringer Masse. Die Befestigung am Waagbalken geschieht mittels einer angeschmolzenen Glaskapillare, die bis zu festem Sitz auf den Al-Draht ($-$ Waagbalken) aufgeschoben wird. Der Hebelarm der wirkenden Kräfte wird durch das Aufbringen des Substanzträgers von Versuch zu Versuch etwas verändert, zudem tritt beim Anheizen eine Verlängerung des Waagbalkens ein. Aus Formel (2) folgt aber, dass solche Veränderungen nicht berücksichtigt werden

*) E. MIESCHER, loc. cit. Seite 511, gibt für das Direktionsmoment seiner Federn irrtümlicherweise $0,07$ statt $7,0$ dyn/cm/Grad an.

müssen, weil P und G im gleichen Verhältnis verkleinert oder vergrößert werden und nur der Quotient G/P in die Rechnung eingeht.

§ 4. *Übrige Apparatur.* Die auf einer Cibanitplatte C befestigte Doppelwaage ist in einem seitlichen Ansatz der Glasapparatur (Pyrex) untergebracht (Fig. 2). Die Blende B schützt die empfindlichen

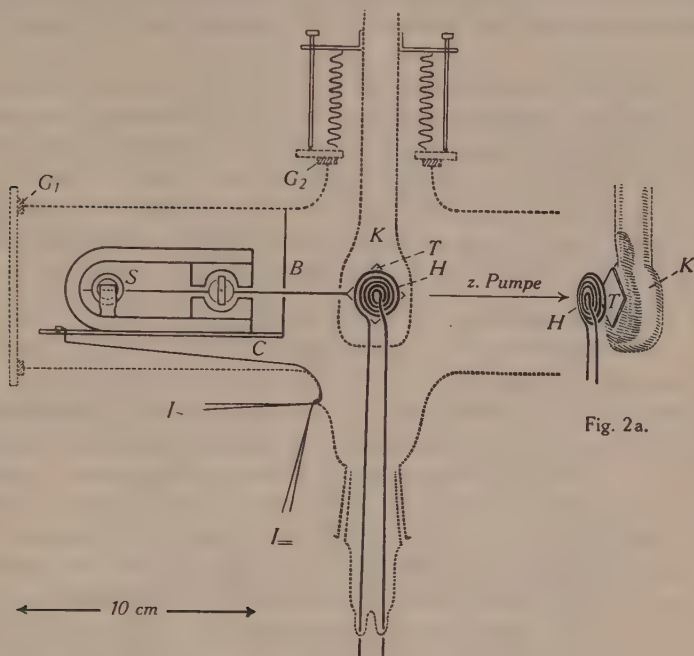


Fig. 2.

Schema der Apparatur.

G_1, G_2 = Gummidichtung.

Teile gegen die vom Substanzträger T weggehenden Moleküle. I_- und I_+ sind die Stromzuführungen zur Meßspule S bzw. zur Drehspule. Der rückseitig berusste Substanzträger T befindet sich zwischen der Heizspirale H aus Megapyrdrabt und der Kühlfläche K (vgl. Fig. 2a). Als Pumpe dient eine Leybold'sche Hg-Diffusionspumpe aus Stahl Mod. E.

IV. Das Messverfahren.

§ 5. *Schichtherstellung.* Die Substanz wird im Vakuum mittels einer besonderen Vorrichtung auf die bereits einseitig berusteten Deckgläschen aufgedampft. Der dabei verwendete Plättchenhalter deckt einen Teil der Plättchenoberfläche zu und lässt nur eine

Kreisfläche von 17 mm Durchmesser frei. Die aufgedampfte Schicht hat somit $\sim 2,2 \text{ cm}^2$ Oberfläche und ist bei einer Substanzmenge von 25 mg ca. 10^{-2} mm dick. Fassen wir die Schicht als Kreiszylinder, der auf dem Plättchen senkrecht steht, auf, so beträgt die Mantelfläche, die sich auf das Versuchsergebnis im Sinne zu grossen Molekulargewichts auswirkt (weil P parallel statt senkrecht zur Plättchenoberfläche gerichtet ist), weniger als $1/2\%$ der Deckfläche.

Ist die Schicht aufgedampft, so wird die Glaskapillare an den Substanzträger angeschmolzen und das Ganze auf den Waagbalken aufgesteckt. Dabei kann durch Visieren mit blossen Auge leicht festgestellt werden, ob die Schichtoberfläche richtig orientiert ist, d. h. ob sie in der durch A_2 und den Waagbalken W festgelegten Ebene liegt. Die Waage wird nun in die Hochvakuumapparatur (Fig. 2) gebracht und durch Gummiunterlagen im Pyrexrohr fixiert.

§ 6. *Die Justierung.* Die Oberfläche der Schicht liege bereits in der durch W und A_2 bestimmten Ebene. Damit P und $g \cdot G$ voneinander getrennt sind, muss man noch erreichen, dass A_2 in der Drehspeulebene vertikal steht. Dies gelingt durch folgendes einfache Verfahren: Durch Auflegen eines Reiters wird die Waage in bezug auf A_1 beim Drehspulstrom 0 ins Gleichgewicht gebracht und durch geeignete Wahl des Stromes I_{\sim} (in S) auch in bezug auf A_2 eingespielt. Die Nullage (I^0_{\sim}) für das Übergewicht $U=0$ ist dadurch festgelegt. Verschiebt man den Reiter und kompensiert man mit der Drehspeule das entstehende Übergewicht in bezug auf A_1 , so wird sich, falls A_2 nicht vertikal steht, bei gleichem Strom (I^0_{\sim}) in S die Waage um A_2 herum aus der Nullage herausdrehen, und zwar um so stärker, je grösser der Fehlerwinkel ist. Man dreht nun die ganze Apparatur um die Richtung von W so lange, bis die Waage auch in bezug auf A_2 austariert ist.

Der Reiter wird endgültig so verschoben, dass der Waagarm mit der Substanz ein Übergewicht von ca. 10 mg* erhält. Die Apparatur wird geschlossen und an die Pumpe gesetzt.

§ 7. *Prüfung des Vakuums.* Zwischen Pumpe und Ausfrier-tasche kann ein Mac-Leod-Manometer eingeschaltet werden. Es zeigte sich aber, dass die Beobachtung der auftretenden Radiometerkräfte eine bessere Vakuumkontrolle ermöglicht. Das Ergebnis einer Messung dieser Kräfte ist in Fig. 3 festgehalten; sie zeigt, dass für Drucke unterhalb 10^{-4} mmHg die Störung verschwindet.

Ist das Vakuum gut, so verursachen weder das Einfüllen der flüssigen Luft in das Kühlgefäss K noch das Anheizen der Megapyrspirale H eine Nullpunktsänderung.

§ 8. *Die Verdampfung.* Zwei bis fünf Minuten nach Einschalten der Heizung setzt die Verdampfung ein und erreicht nach einer weiteren Minute einen konstanten Wert, d. h. P und G bleiben konstant. Bis auf kleine Korrekturen muss nur der Drehspulstrom linear verändert werden. Von Minute zu Minute werden die beiden Spulenströme abgelesen. Nach 4—8 Minuten konstanter Verdampfung fallen P und G rasch ab und zeigen an, dass die Oberfläche der Schicht sich verkleinert. Zum Abschluss wird die Nullstellung nochmals kontrolliert.

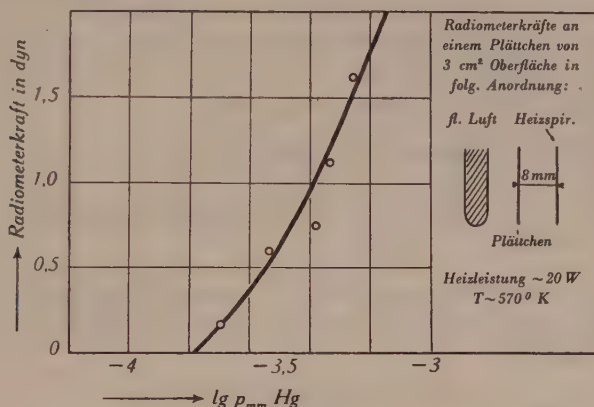


Fig. 3.

Radiometerkräfte in Abhängigkeit vom Druck.

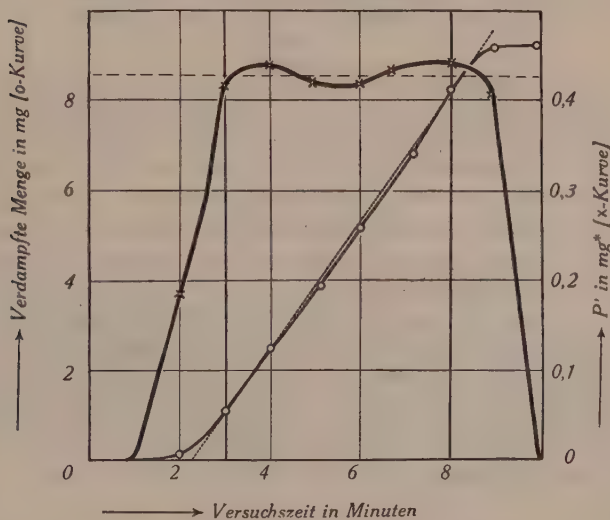


Fig. 4.

Verdampfungsgeschwindigkeit und Verdampfungsdruck bei einem Versuch an Tellur.

§ 9. *Die Auswertung.* Fig. 4 gibt den Verlauf von P und $G \cdot t$ bei einem Versuch mit Tellur wieder. Für die Berechnung wird nur das Intervall benutzt, das in der Figur durch zwei stark ausgezogene Ordinaten eingeschlossen ist. Für dieses Gebiet beinahe konstanter Verdampfung entnimmt man der Fig. 4:

$$P' = 42,8 \cdot 10^{-2} \text{ mg}^*$$

$$G' = 24,9 \cdot 10^{-3} \text{ mg/sec}$$

Die Werte P' und G' beziehen sich nicht auf die Flächeneinheit, sondern auf die ganze Schichtoberfläche. Eine Reduktion ist unnötig, weil nur der Quotient G'/P' in die Rechnung (Formel 3) eingeht (vgl. auch die Bemerkung § 3).

Der Verdampfungsgeschwindigkeit von

$$\frac{G'}{\text{Fläche}} = \frac{24,9 \cdot 10^{-3}}{2,2} = 11,3 \cdot 10^{-3} \text{ mg/cm}^2 \text{ sec}$$

entspricht nach Messungen, die in unserem Institut ausgeführt wurden*) und die in Fig. 6 zusammengestellt sind, eine Temperatur $T = 589^\circ \text{ K}$.

Setzt man die Werte für $P'/G' = P/G$ und T in Formel (3) ein, so ergibt sich

$$M = 135,6 \cdot 589 \cdot \left(\frac{24,9}{42,8} \right)^2 \cdot 10^{-2} = 270.$$

Dieser Wert entspricht der Verdampfung von Te_2 -Molekülen.

Stehen keine Messungen der Verdampfungsgeschwindigkeit als Funktion der Temperatur zur Verfügung, so wird die Verdampfungstemperatur aus dem Heizstrom bestimmt. Der Zusammenhang dieser beiden Größen ist in Fig. 5 dargestellt. Der Verlauf der Kurven wurde durch Messungen an einem Plättchen ohne Substanz mittels eines aufgeschmolzenen Thermoelements festgelegt. Die hervorgehobenen Punkte beziehen sich auf Stoffe, deren Verdampfungstemperatur aus anderen Messungen (Verd.geschw.) genau bekannt war. Die Temperaturerniedrigung durch die Verdampfungswärme ist gering, eine Vergrößerung der Verdampfungswärme um 25 kcal/Mol verursacht bei gleichem G z. B. bei 500° K eine T -Abnahme von nur 5° .

*) Ich verdanke diese Angaben der Freundlichkeit von Herrn cand. phil. K. TSCHUDIN.

Eine untere Grenze für die Verdampfungstemperatur folgt aus der Beziehung (vgl. MIESCHER loc. cit., Seite 508)

$$\frac{\alpha p_s}{2} = P \quad (p_s = \text{Sättigungsdruck}) \quad (5)$$

wenn man $\alpha = 1$ setzt und in die Dampfdruckkurve eingeht.

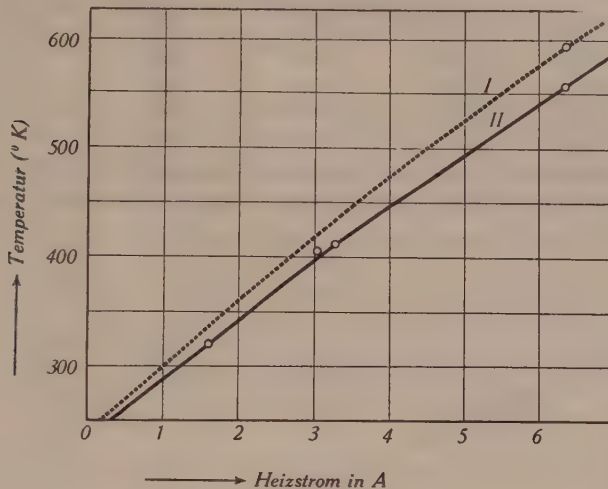


Fig. 5.

Heizstrom und Plattchentemperatur.

Kurve I mit, Kurve II ohne Reflektor hinter der Heizspirale.

V. Ergebnisse.

In den folgenden Tabellen sind die auf die ganze Schichtfläche bezogenen Grössen G' und P' aufgeführt. Der Ausdruck

$$\frac{\pi R}{2} \cdot \left(\frac{G'}{P'} \right)^2$$

ist mit F bezeichnet; er ergibt, mit der Temperatur multipliziert, das Molekulargewicht (vgl. Formel (2)).

Zu den Fehlerabschätzungen ist zu bemerken, dass der Fehler von P' der bedeutendste ist und bei allen Versuchen absolut genommen gleich bleibt ($\sim 0,01 \text{ mg}^*$); demgemäss schwankt der relative Fehler bei den verschiedenen Stoffen weitgehend mit P' .

§ 10. *Tellur*. Für das Molekulargewicht des frei verdampfenden Tellurs zwischen 584 und 602° K ergibt sich aus Tabelle 1 der Mittelwert

$$M = 261 \pm 16.$$

Die Abweichung vom Werte 255,22 für Te_2 liegt innerhalb der Fehlergrenzen.

Tabelle 1 (Tellur).

G' mg/sec	P' mg*	F	T °K	M
0,0175	0,32	0,41	584	239
0,0248	0,43	0,46	589	271
0,0257	0,45	0,45	590	266
0,0267	0,47	0,44	591	260
0,0505	0,88	0,45	602	271

Die T -Werte sind Fig. 6 (nach TSCHUDIN) entnommen; die eingezeichneten Ordinaten geben die Lage der Versuchstemperaturen an.

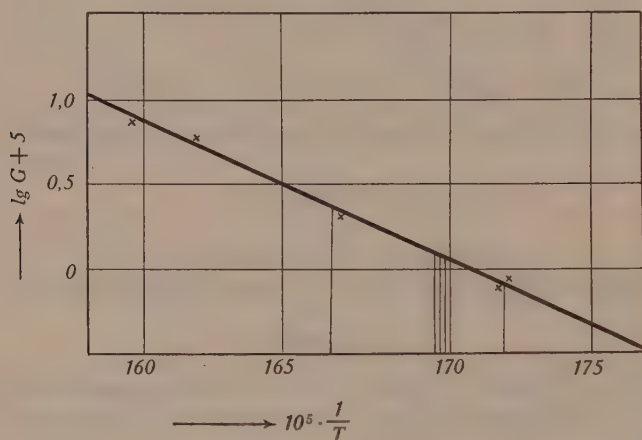


Fig. 6.

Verdampfungsgeschwindigkeit von Tellur [$\text{gcm}^{-2} \text{sec}^{-1}$].

Nach Messungen von Niwa⁹⁾ ist Tellur im gesättigten Dampf zweiatomig ($2,00 \pm 0,05$ im Intervall 590—680° K) und weist bei 590° einen Dampfdruck von $0,75 \cdot 10^{-3}$ mmHg auf. Aus Tabelle 1 entnimmt man $P = P'/2,2 = 0,20 \text{ mg}^*/\text{cm}^2 = 0,15 \cdot 10^{-3}$ mmHg. Daraus folgt nach Formel (5) $\alpha \sim 0,4$. Wenn auch dieser Wert unsicher ist, so liegt er jedenfalls zwischen 0,1 und 1, was für „normale“ Verdampfung spricht.

Überwiegend zweiatomige Verdampfung folgt auch aus spektroskopischen Untersuchungen, die an Tellur und Selen durchgeführt worden sind. Das Verfahren, das ursprünglich mit wesent-

lich erweiterter Zielsetzung versucht worden ist, sei hier kurz beschrieben.

Das Absorptionsspektrum der betreffenden Substanz wird im freien Molekular- bzw. Atomstrahl untersucht. Anordnungen dieser Art sind vielfach zu Hyperfeinstrukturmessungen benützt worden, doch haben einzig JACKSON und KUHN¹⁰⁾ dieses Verfahren über das rein spektroskopische Problem hinaus verwertet, in ihrem Fall zur Temperaturbestimmung bei der freien Verdampfung von Kalium.

Handelt es sich, wie in den vorliegenden Untersuchungen, um Molekülspektren, so sind entsprechend der geringeren Absorptionsstärke grössere optische Weglängen im Molekularstrahl erforderlich. Fig. 7 zeigt einen Längsschnitt durch das verwendete Absorp-

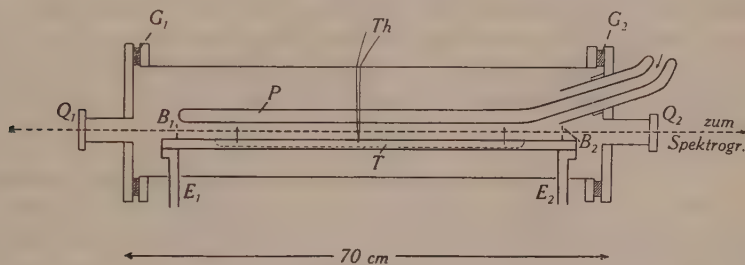


Fig. 7.

Längsschnitt durch das Absorptionsgefäß.

G_1, G_2 = Gummidichtungen. Q_1, Q_2 = Quarzfenster.

tionsgefäß, ein an die Hochvakuumpumpe angeschlossenes Stahlrohr von 8 cm Durchmesser mit angeschweissten, plangedrehten Flanschen. Durch zwei isolierte, wassergekühlte Einführungen E_1 und E_2 wird der Heizstrom (ca. 400 A) für den Substanzträger T , einen 60 cm langen Eisenstab von $4 \times 12 \text{ mm}^2$ Querschnitt mit einer 45 cm langen, 6 mm breiten und 3 mm tiefen Längsnut, zugeführt. Die Längsnut ist für die Aufnahme der zu untersuchenden Substanz bestimmt, sie fasst rund 8 cm^3 . 2 cm über der verdampfenden Oberfläche verläuft durch das ganze Absorptionsgefäß ein Pyrexrohr P , das während des Versuchs mit flüssiger Luft gefüllt wird. Auf dem Substanzträger selbst sind zwei Blenden B_1 und B_2 angebracht; das durch sie begrenzte Lichtbündel hat $3 \times 6 \text{ mm}^2$ Querschnitt und ca. 1 mm Abstand von der verdampfenden Schicht. Mit dem Thermoelement Th , das federnd auf der Schicht aufliegt, wird die Temperatur kontrolliert.

Die grosse Schwierigkeit dieser Methode liegt darin, die Absorption genügend stark zu machen. Die Forderung freier Ver-

dampfung führt zu kleinen Verdampfungsgeschwindigkeiten und damit zu schwacher Absorption. Die beschränkte Substanzmenge, die pro Versuch zur Verfügung steht, verunmöglicht längere Exposition (≥ 3 Minuten). Gitteraufnahmen grosser Dispersion, die geeignet gewesen wären, feinere Unterschiede zwischen dem Absorptionsspektrum bei freier Verdampfung und demjenigen im gesättigten Dampf aufzuzeigen, waren deshalb nicht möglich. Auch mit dem Prismenspektrographen konnten nur die stärksten Banden aufgenommen werden.

Die Aufnahmen an Tellur zeigen das Bandenspektrum des zweiatomigen Moleküls; die Intensitätsverteilung entspricht jener des gesättigten Dampfes. Atomlinien (Te) oder Absorptionen, die auf ein höheratomares Molekül (Te_4) hinweisen, sind nicht zu finden. Die spektroskopische Methode, die die Möglichkeit viel tiefer gehender Erkenntnis des Verdampfungsprozesses in sich birgt, bestätigt in diesem Falle das mit der Doppelwaage gefundene Ergebnis der zweiatomigen Verdampfung des Tellurs, leistet aber nicht mehr.

§ 11. *Selen.* Selen ist in mehreren Modifikationen bekannt. NEUMANN¹¹⁾ hat jedoch gezeigt, dass oberhalb 120°C alle Modifikationen rasch in die bei höherer Temperatur allein beständige, hexagonale, metallische Form übergehen. Auf diese Modifikation beziehen sich auch die vorliegenden Messungen, betrug doch die Versuchstemperatur um 180°C .

Unangenehm wirkt sich die Eigenschaft des Selen aus, weit unterhalb seines Schmelzpunktes ($220,5^\circ \text{C}$) plastisch zu werden. Selen-schichten von mehr als 0,01 mm Dicke zeigen beim Erwärmen Blasenbildung und damit Zerstörung der einheitlichen Oberfläche. Mit der Verwendung dünnerer Schichten ist wegen der geringeren Substanzmenge (max. 10 mg) Verkleinerung der Versuchszeit und damit auch der Genauigkeit verbunden.

Die Ergebnisse an Selen sind in Tabelle 2 zusammengestellt. Zur Festlegung der Temperatur mussten in diesem Falle der Heizstrom und der Sättigungsdampfdruck ($p_s = p_s(T)$) herangezogen werden. Einem Heizstrom von 3,8 A entspricht (vgl. Fig. 5) eine Temperatur der Selenoberfläche von 440°K ; andererseits erhält man unter Verwendung der Dampfdruckmessungen von NEUMANN¹¹⁾, NIWA und SHIBATA¹²⁾ mittels der Beziehung (5) als minimale ($\alpha = 1$ gesetzt) Verdampfungstemperaturen $449\text{--}452^\circ \text{K}$. Diese Werte sind in der Tabelle verwendet. Der Vergleich mit der aus dem Heizstrom gewonnenen Temperatur zeigt, dass der Kondensationskoeffizient nicht stark von 1 verschieden sein kann,

da kleinere α -Werte (Formel 5) zu noch höheren Verdampfungstemperaturen führen würden.

Tabelle 2 (Selen).

G' mg/sec	P' mg*	F	T ° K	M
0,0215	0,25	1,00	449	449
0,0231	0,274	0,96	450	432
0,0298	0,35	1,01	451	456

Zieht man nur Se_2 - und Se_6 -Moleküle ($M_2 = 157,92$; $M_6 = 473,76$) in Betracht, so entspricht dem aus Tabelle 2 gewonnenen Bruttomolekulargewicht (vgl. Bemerkung § 2)

$$M = 444 \pm 30$$

eine Beteiligung von 90 % Se_6 - und 10 % Se_2 -Molekülen an der Verdampfung von einer freien Selenoberfläche bei 450° K. Die mittlere Atomzahl v pro Molekül ist also $v = 5,6 \pm 0,4$. Im gesättigten Dampf findet NEUMANN (loc. cit.) $6,0 \pm 0,3$, während NIWA (loc. cit.) mit der gleichen Methode $v = 5,4 \pm 0,3$ ermittelt.

Die spektroskopischen Aufnahmen enthalten keine Andeutungen von Se_2 -Banden, schliessen aber eine geringe Beteiligung von Se_2 -Molekülen an der Verdampfung nicht aus.

§ 12. HgCl_2 . Versuche an HgCl_2 wurden als Kontrolle und zum Vergleich mit den Messungen an Hg_2Cl_2 (vgl. § 13) durchgeführt. Frühere Messungen der Verdampfungsgeschwindigkeit von HgCl_2^* geben Auskunft über die Verdampfungstemperatur (Fig. 8).

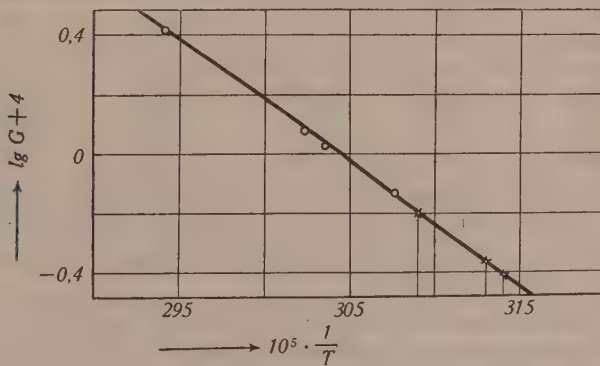


Fig. 8.

Verdampfungsgeschwindigkeit von HgCl_2 [$\text{gcm}^{-2} \text{sec}^{-1}$].

*) Im Zusammenhang mit der Bestimmung des Kondensationskoeffizienten von HgCl_2 ; F. METZGER und E. MIESCHER, Nature 142, 572 (1938).

Der Mittelwert $M = 268 \pm 8$ stimmt mit dem Molekulargewicht von HgCl_2 (271,52) gut überein.

Tabelle 3 (HgCl_2).

G' mg/sec	P' mg*	F	T ° K	M
0,075	0,96	0,83	320	266
0,071	0,90	0,84 ₅	319	270
0,110	1,41	0,83	324	268

§ 13. Hg_2Cl_2 . Ist bei HgCl_2 die Art der Verdampfung leicht vorauszusagen, so fällt dies beim Hg_2Cl_2 schwerer, bestehen doch auch über die Verhältnisse im gesättigten Dampf widersprechende Ansichten¹³⁾.

Die in Tabelle 4 zusammengestellten Ergebnisse zeigen eindeutig, dass von festem Hg_2Cl_2 sicher nicht Hg_2Cl_2 -Moleküle verdampfen, sondern Moleküle mit rund der halben Masse (236). Ob es sich um HgCl oder ein Gemisch von Hg und HgCl_2 handelt, könnte, wie man sich nach Formel (4) leicht überzeugt, mit unserer Methode erst bei erheblicher Steigerung der Messgenauigkeit entschieden werden. Zugunsten der Verdampfung von Hg - und HgCl_2 -Molekülen spricht die Beobachtung eines dunkel- bis schwarzbraunen Beschlags auf der Kühlfläche, wie er auch entsteht, wenn durch das Weglassen der Ausfrier tasche Hg von der Diffusionspumpe ins Versuchsgefäß gelangt.

Tabelle 4 (Hg_2Cl_2).

G' mg/sec	P' mg*	F	T ° K	M
0,043	0,65	0,60	~ 370	222
0,046	0,67	0,64	~ 370	237
0,055	0,82	0,61	~ 375	229

Die Temperatur ist aus dem Heizstrom (2,35—2,65 A) bestimmt worden. Mittel: $M = 229 \pm 16$ (Fehlerschranken durch Unsicherheit von T bedingt).

Eine unlängst publizierte Arbeit von NEUMANN¹³⁾ hat über das Molekulargewicht des gesättigten Dampfes Klarheit geschaffen ($M = 236$), doch reicht auch die mit der Torsionswaage erreichte Genauigkeit nicht zur Entscheidung zwischen den beiden Möglichkeiten HgCl oder HgCl_2 und Hg aus. NEUMANN zeigt dann, dass die bis jetzt bekannten thermodynamischen Daten sich mit seinen

Ergebnissen nur vereinbaren lassen, wenn man annimmt, dass der gesättigte Dampf sich aus Hg und HgCl_2 -Molekülen zusammensetzt.

§ 14. NH_4Cl . Nach BRAUNE und KNOKE¹⁴⁾ sowie RODEBUSH und MICHALEK¹⁵⁾ ist NH_4Cl in der Gasphase vollständig in NH_3 und HCl dissoziiert. SPINGLER¹⁶⁾ stellte sich die Frage, ob die Dissoziation auf der Oberfläche des Festkörpers oder erst im Dampf vor sich gehe. Er bestimmte die T -Abhängigkeit des Kondensationskoeffizienten, verglich sie mit jener des Dampfdrucks und kam auf Grund seiner Betrachtungen zum Schluss, dass die Dissoziation bereits auf der Oberfläche stattfindet.

Mit der Doppelwaage ist ein direkter Entscheid möglich. Die beiden durchgeführten Versuche (Tab. 5) zeigen eindeutig, dass nicht NH_4Cl -Moleküle ($M = 53,5$), sondern die Dissoziationsprodukte NH_3 und HCl , die Oberfläche verlassen.

Tabelle 5 (NH_4Cl).

G' mg sec	P' mg*	F	T ° K	M
0,0217	0,97	0,068	405	27,6
0,0236	1,07	0,066 ₃	409	27,2

Der Mittelwert $M = 27,4 \pm 0,8$ stimmt gut mit dem Wert (27,5) überein, der sich aus Gleichung (4) ergibt, wenn man gleiche Verdampfung ($n_1 = n_2$) von HCl und NH_3 voraussetzt. Die Zuordnung der Temperaturen erfolgte unter Verwendung der Messungen SPINGLER's. Fig. 9 gibt den zeitlichen Verlauf der Grössen G' und P' des zweiten Versuches (Tab. 5) wieder.

§ 15. *Arsen*. Wegen der Existenz mehrerer Modifikationen werden die Verhältnisse beim Arsen kompliziert. Wir beschränken uns darauf, das Verhalten der in der üblichen Weise hergestellten Arsenschichten zu beschreiben. Ihre Oberfläche ist pulvrig, vom Substanzträger lösen sie sich oft ab. Die Verdampfung erfolgt stufenweise. Ein kleiner Teil des aufgebrachtens Arsens verdampft schon bei niedriger Temperatur (Heizstrom bei Verwendung eines Reflektors 2,6—2,9 A), die weitere Verdampfung setzt erst bei beträchtlicher Steigerung der Heizstromstärke (5,25—5,7 A) ein. Das Molekulargewicht der leichtflüchtigen Komponente kann aus den sehr kurzen Messungen nurmehr abgeschätzt werden; es ist grösser als das der zweiten Komponente (200) und könnte As_4 -Molekülen zugeschrieben werden in Analogie zum weissen Phosphor (P_4). Tatsächlich konnte bei der Schichtherstellung die Bildung eines gelben Überzuges festgestellt werden; allerdings wandelte er sich schon im Licht um.

Dem Mittelwert entspricht, wenn wir nur As_4 - und As_2 -Moleküle zulassen, eine Verdampfung von rund 70% As_2 - und 30% As_4 -Molekülen. Ob dabei die As_4 -Moleküle nicht teilweise nachträglich verdampfendem, gelbem Arsen zuzuordnen sind, bleibe dahingestellt. Die schwerflüchtige Komponente bildet auf der Kühlfläche einen braunen bis dunkelbraunroten Niederschlag, der sich rasch in metallisches Arsen umwandelt.

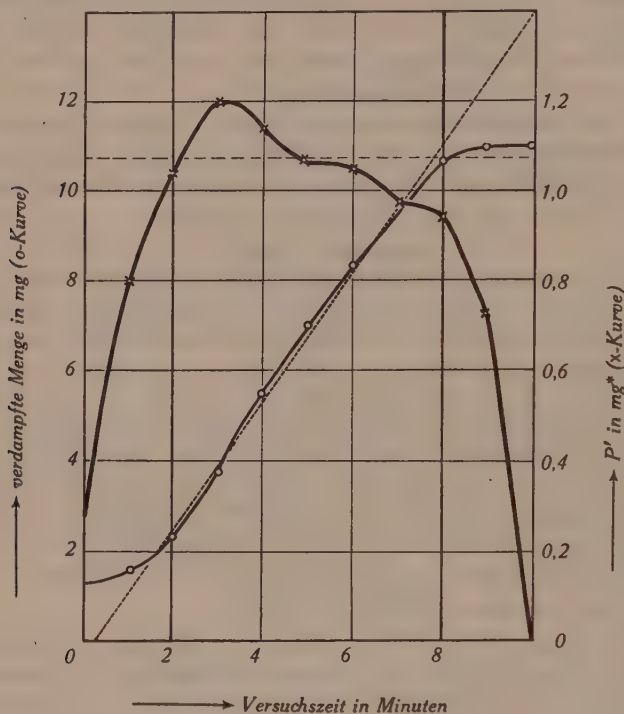


Fig. 9.

Verlauf eines Versuchs an NH_4Cl .

Tabelle 6 (Arsen).

G' mg/sec	P' mg*	F	T ° K	M
0,013	0,23	0,41	~ 535	219
0,015	0,30	0,34	~ 535	182
0,017	0,34	0,34	~ 535	182
0,021	0,38	0,41	~ 535	220
0,025	0,49	0,35	~ 540	189
0,026	0,51	0,35	~ 540	189

Mittel: $M = 197 \pm 20$ (Fehlerschranken durch Unsicherheit von T bedingt).

Der gesättigte Dampf besteht nach PREUNER und BROCK-MÜLLER⁶⁾ unterhalb 800° K praktisch nur aus As₄-Molekülen. Der Unterschied der Atomzahl im gesättigten Dampf und bei freier Verdampfung ist also beim Arsen wie beim Phosphor (rot) besonders hervorstechend. Die direkte Nachprüfung der Aussagen MELVILLE's (loc. cit.) über die Verdampfung des roten Phosphors ist wegen der erforderlichen hohen Temperatur (ca. 600° C) mit der jetzigen Anordnung nicht möglich.

VI. Zusammenfassung und Schluss.

§ 16. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit sind in Tab. 7 zusammengestellt. Zum Vergleich sind auch die Angaben über den gesättigten Dampf aufgeführt. Die letzte Kolonne enthält die Kondensationskoeffizienten, wobei der Wert für NH₄Cl der Arbeit SPINGLER's¹⁶⁾ entnommen ist, die übrigen mit Hilfe von Formel (5) abgeschätzt sind.

Tabelle 7

Substanz	Molekulargewicht bzw. Molekular-Form		Kond. Koeff.
	freie Verdampfung	gesättigter Dampf	
Tellur . .	261 ± 16	255 ± 6 ⁹⁾	0,4
Selen . . .	444 ± 30	475 ± 24 ¹¹⁾ 427 ± 24 ¹²⁾	1
HgCl ₂ . .	268 ± 8	271,52	0,8
Hg ₂ Cl ₂ . .	229 ± 16	236 ¹³⁾	0,1*)
NH ₄ Cl . .	NH ₃ , HCl	NH ₃ , HCl ¹⁴⁾ 15)	10 ⁻² —10 ⁻⁴
Arsen. . .	197 ± 20	280 ⁶⁾	0,05

Die Messungen, über die hier berichtet wurde, erstrecken sich nur auf eine kleine Anzahl von Stoffen; in zahlreichen andern Fällen ist der Verdampfungsmechanismus im einzelnen noch durchaus ungeklärt, da direkte Untersuchungen fast gänzlich fehlen. So ist z. B. unbekannt, wie weit an der freien Verdampfung der Alkalimetalle neben Atomen auch zweiatomige Moleküle beteiligt sind; im Falle des Lithiums hat neuerdings LORD¹⁷⁾ aus theoretischen Überlegungen einen Aufbau aus Li₂⁺-Ionen postuliert. Li₂-Absorptionsbanden im gesättigten Lithiumdampf sind wohlbekannt; spektroskopische Versuche ähnlich den in § 10 am Tellur und Selen beschriebenen, ergaben über verdampfendem Lithium neben des Li-Resonanzlinie tatsächlich auch Li₂-Banden, doch bietet es grösste Schwierigkeiten, die Lithiumoberfläche sauber zu halten.

*) Bei sorgfältig gereinigten Proben fand NEUMANN¹³⁾ Kondensationskoeffizienten von der Grössenordnung 10⁻⁴.

Zu hohe Verdampfungstemperaturen haben Messungen nach der Doppelwaagenmethode z. B. an Ga, Bi, Sb, Stoffen, die voraussichtlich mindestens zu einem Anteil in höheratomarer Form verdampfen werden, bis jetzt nicht erlaubt, doch steht einem Ausbau der Methode grundsätzlich nichts im Wege. Ausser bei zahllosen organischen Stoffen steht die Frage nach der Art des Verdampfens auch bei vielen leichter flüchtigen anorganischen Verbindungen durchaus offen, so z. B. Halogeniden, die vielfach zur Bildung von Doppel- oder Mehrfachmolekülen im Dampf neigen. Orientierende Messungen an Kupferchlorür zeigten, dass sicher nicht einfache CuCl -Moleküle verdampfen, fanden sich doch Molekulargewichte zwischen 200 und 300. Messungen dieser Art in weiteren Fällen beanspruchen um so mehr Interesse, als sie geeignet sein dürften, auf die noch wenig geklärten Vorgänge an der Oberfläche Licht zu werfen, für die ausser der Struktur des Festkörpers auch die Bindungsenergien massgebend sind.

Den Herren Proff. A. HAGENBACH und P. HUBER danke ich für die Überlassung der Institutsmittel. Mein herzlichster Dank gilt Herrn Prof. Dr. E. MIESCHER, auf dessen Anregung und unter dessen Leitung die vorliegende Arbeit entstanden ist.

Basel, Physikalische Anstalt der Universität.

Literatur.

- ¹⁾ I. LANGMUIR, Phys. ZS. **14**, 1273, 1913; Phys. Rev. **30**, 201, 1927.
- ²⁾ P. HARTECK, ZS. f. phys. Chem. A **134**, 1, 1928.
- ³⁾ O. STERN, ZS. f. Phys. **2**, 49, 1920 und **3**, 417, 1920.
- ⁴⁾ I. A. ELDRIDGE, Phys. Rev. **30**, 931, 1927.
- ⁵⁾ H. W. MELVILLE und S. C. GRAY, Trans. Faraday Soc. **32**, 271 u. 1026, 1936.
- ⁶⁾ G. PREUNER und J. BROCKMÜLLER, ZS. f. phys. Chem. **81**, 129, 1912.
- ⁷⁾ A. STOCK, G. E. GIBSON und E. STAMM, Ber. Dtsch. Chem. Ges. **45**, 3527, 1912.
- ⁸⁾ E. MIESCHER, Helv. Phys. Acta **14**, 507, 1941.
- ⁹⁾ K. NIWA, Journ. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Japan Ser. III, Vol. III, Nr. 2, S. 75, 1940.
- ¹⁰⁾ D. A. JACKSON und H. KUHN, Proc. Roy. Soc. London A **148**, 335, 1935.
- ¹¹⁾ K. NEUMANN und E. LICHTENBERG, ZS. f. phys. Chem. A **184**, 89, 1939.
- ¹²⁾ K. NIWA und Z. SHIBATA, Journ. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Japan, Ser. III, Vol. III, Nr. 2, S. 53, 1940.
- ¹³⁾ K. NEUMANN, ZS. f. phys. Chem. A **191**, 284, 1942.
- ¹⁴⁾ H. BRAUNE und S. KNOKE, ZS. f. phys. Chem. A **135**, 49, 1928.
- ¹⁵⁾ W. H. RODEBUSH und I. C. MICHALEK, Proc. Nat. Acad. Amer. **14**, 131, 1928.
- ¹⁶⁾ H. SPINGLER, ZS. f. phys. Chem. B **52**, 90, 1942.
- ¹⁷⁾ R. C. LORD, Journ. Chem. Phys. **9**, 700, 1941.

Ultrarotspektren kristalliner und geschmolzener Dicarbonsäuren¹⁾

von Ernst Schönmann.

(4. VI. 1943.)

Inhalt: Als Fortsetzung früherer Untersuchungen werden mit einem Prismenspektrometer im Wellenzahlbereich 600 cm^{-1} bis 4000 cm^{-1} die Absorptionsspektren der Dicarbonsäuren $\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_n-\text{COOH}$ mit $n = 3, 4, 5, 6$ und 7 vermessen. Durch Verwendung von im Hochvakuum aufgedampften Kristallschichten an Stelle der aus Lösungen auskristallisierten, ergibt sich eine erhöhte Messgenauigkeit. Um die Ultrarotspektren der dünnen Absorptionsschichten ober- und unterhalb des Schmelzpunktes untersuchen zu können, wird eine spezielle Methodik ausgearbeitet und auf die Glutarsäure (Smp. $97,5^\circ$) angewandt.

Ergebnisse: Die von FICHTER & WEHRLI bei den ersten vier Dicarbonsäuren gefundenen Gruppenschwingungsfrequenzen werden auch bei den längeren Kettenmolekülen festgestellt und analog gedeutet. Für Korksäure ($n = 6$) wird eine numerische Berechnung der Kettenschwingungsfrequenzen nach der Theorie von BARTHOLOMÉ & TELLER durchgeführt und eine befriedigende Übereinstimmung mit den Experimenten gefunden.

Die Verschiebungen und Intensitätsänderungen der Banden beim Schmelzen der Glutarsäure ($n = 3$) zeigen, dass die Wasserstoffbrücken zwischen den Molekülen stark gelockert werden. Die O—H-Gruppenfrequenz bleibt im Temperaturintervall von 20° bis 90° C konstant, während sie beim Schmelzen von 3040 cm^{-1} nach 3190 cm^{-1} verschoben wird. Die OCO-Gruppe des Carboxylradikals ist im Kristall symmetrischer als in der Flüssigkeit.

§ 1. Die Ultrarotspektren homologer organischer Substanzen zeigen oft gewisse Gesetzmässigkeiten, und es ist deshalb von Interesse, ganze homologe Reihen zu untersuchen. So haben FICHTER²⁾ und WEHRLI³⁾ die ersten vier Glieder aus der Reihe der Dicarbonsäuren $\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_n-\text{COOH}$ $n = 0, 1, 2, 3$ im festen Zustand untersucht. Sie finden dabei eine auffallende Oszillation der Kettenschwingungsfrequenzen mit steigender Zahl der Kettenglieder. Auch andere Frequenzen, die Gruppenschwingungen zugeordnet werden, zeigen ein eigenartiges Hin- und Herpendeln mit wachsender Zahl der Kohlenstoffatome. Da das erste Glied

¹⁾ Über einen Teil dieser Arbeit ist ein kurzer Bericht erschienen: M. WEHRLI und E. SCHÖNMANN, H. P. A. **15**, 317, 1942.

²⁾ R. FICHTER, H. P. A. **13**, 309 und 342, 1940. R. FICHTER und M. WEHRLI, H. P. A. **14**, 189, 1941.

³⁾ M. WEHRLI, H. P. A. **14**, 516, 1941.

der Reihe, die Oxalsäure, als Dihydrat untersucht worden ist, und deshalb etwas aus der Reihe heraustritt, genügen die drei übrigen Säuren nicht, um die erwähnten Oszillationen eindeutig festzulegen. Erstes Ziel dieser Arbeit soll nun sein, die vier nächst höheren Dicarbonsäuren, die Adipin-, Pimelin-, Kork- und Azelainsäure mit $n = 4$ bis 7 zu untersuchen, um an Hand einer längeren Reihe die Ultrarotspektren besser deuten zu können. Im Verlaufe dieser Messungen ist eine kurze Mitteilung von LECOMTE¹⁾ über Ultrarotspektren von Dicarbonsäuren erschienen. Die Ergebnisse werden in § 4 ausführlich besprochen.

Der Vergleich der Spektren der Säuren im flüssigen und festen Zustand verspricht eine weitere Klärung der Vorgänge beim Schmelzprozess. Ein zweites Ziel dieser Arbeit ist deshalb die Untersuchung der Glutarsäure $\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_3-\text{COOH}$ in der Umgebung des Schmelzpunktes. Über das Verhalten der Ultrarotspektren organischer Moleküle in der Nähe des Schmelzpunktes ist noch wenig bekannt. Die einzigen Untersuchungen dieser Art scheinen die von TASCHEK und WILLIAMS²⁾ an einigen aromatischen Verbindungen zu sein. Ihre Spektren zeigen beim Übergang vom festen zum flüssigen Zustand deutliche Frequenzverschiebungen und bemerkenswerte Änderungen in der Intensität einzelner Banden.

I. Ultrarotspektren kristalliner Dicarbonsäuren.

§ 2. Versuchsanordnung und Messmethodik.

Apparatur.

Zur Ausmessung der Spektren diente das früher beschriebene³⁾, im hiesigen Physikalischen Institut hergestellte Ultrarotspektrometer. Die Spiegel wurden im Hochvakuum frisch veraluminisiert. Für den Wellenzahlbereich von 600 cm^{-1} bis 2500 cm^{-1} kam ein neues Steinsalzprisma⁴⁾ von $60^\circ 0'$, 70 mm Seitenlänge und 55 mm Höhe in Anwendung, welches im Gegensatz zu früher das ganze Öffnungsverhältnis des Spektrometers von 1:6 auszunützen gestattete. Für das Gebiet von 2500 cm^{-1} bis 4000 cm^{-1} stand ein Quarz-Cornu-Prisma von $60^\circ 0'$, 54 mm Seitenlänge und 32 mm Höhe zur Verfügung.

Als Strahlungsquelle kam ein Nernstbrenner in wassergekühltem Gehäuse, als Strahlungsempfänger ein Radiomikrometer

¹⁾ J. LECOMTE, Comptes Rend. **211**, 776, 1940.

²⁾ R. TASCHEK und D. WILLIAMS, J. chem. phys. **6**, 546, 1938 und **7**, 11, 1939

³⁾ R. FICHTER und M. WEHRLI (l. c.).

⁴⁾ Von der Firma STEEG und REUTER, Bad Homburg.

zur Anwendung. Die Temperatur des Nernstbrenners wurde durch Regulierung der Stromstärke mittels Eisen-Wasserstoffwiderständen auf ca. 2000° K konstant gehalten. Die ganze Anordnung befand sich auf einem erschütterungsfrei aufgestellten Spezialtisch, um jede mechanische Störung des Radiomikrometers zu vermeiden.

Die Dispersionskurven der Prismen wurden aus den Brechungsindizes von Steinsalz respektive Quarz berechnet und empirisch mit Hilfe der bekannten Banden von Benzol und Tetrachlorkohlenstoff kontrolliert. Bei beiden Prismen fügten sich die experimentell gefundenen Werte gut in die berechneten Dispersionskurven ein. Im Übergangsgebiet zwischen Quarz und Steinsalz, d. h. zwischen $4\ \mu$ und $5\ \mu$ ist das Auflösungsvermögen der Apparatur nur sehr gering. Die absoluten Spaltöffnungen variierten zwischen 0,1 mm und 1 mm. Umgerechnet auf die spektralen Spaltbreiten, die jeweils in den Figuren eingezeichnet sind, ergab sich für alle Werte dieselbe Grössenordnung von $10\ \text{cm}^{-1}$ bis $20\ \text{cm}^{-1}$ ¹⁾. Nur im Übergangsgebiet zwischen $4\ \mu$ und $5\ \mu$ war sie etwas ungünstiger, sie betrug dort bis $30\ \text{cm}^{-1}$. Die absorbierenden Kristallschichten befanden sich auf Steinsalzplatten und wurden direkt vor den Eintrittsspalt des Spektrometers gebracht.

Versuchsmethodik.

Bei den Messungen wurde folgendermassen vorgegangen. Zur Bestimmung eines Messpunktes mussten am Radiomikrometer folgende Ablesungen gemacht werden: Nullpunkt — polierte Steinsalzplatte ohne Schicht — polierte Steinsalzplatte mit Kristallschicht — Nullpunkt. Diese Reihenfolge wurde immer im gleichen Sinn durchlaufen. Um jede Reflexion und jede Absorption des Steinsalzes selbst zu eliminieren, wurden jeweils zwei möglichst gleiche Steinsalzplatten gewählt, indem eine planparallel geschliffene und fertig polierte grosse Platte halbiert wurde. Die immer vorhandene langsame, konstante Nullpunktswanderung des Radiomikrometers, welche normalerweise 2 bis 4 Skalenteile während einer Messung betrug, wurde durch Interpolation berücksichtigt.

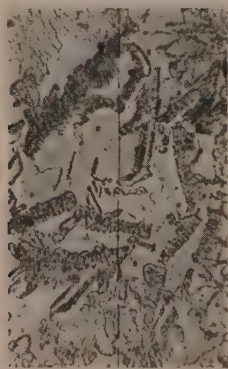
¹⁾ Unter der spektralen Spaltbreite versteht man das vom Spalt hindurchgelassene Wellenzahlenintervall $\Delta\nu$, dessen Grösse von der Dispersion abhängt. Sie wird mit ausreichender Genauigkeit gemessen, indem man z. B. die Na β -Linie durch Drehung des Prismas nacheinander auf die beiden Ränder des Spalts einstellt. Der gemessenen Winkeldifferenz entspricht ein $\Delta\nu$, welches man aus der Dispersionskurve entnehmen kann.

§ 3. Herstellung der Schichten.

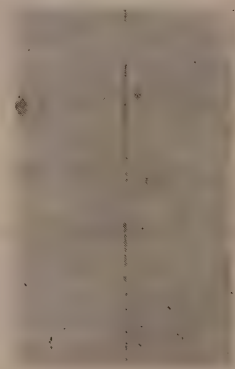
Es wurden folgende Substanzen untersucht:

Adipinsäure	$\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_4-\text{COOH}$	Smp. 153°
Pimelinsäure	$\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_5-\text{COOH}$	„ $105,5^\circ$
Korksäure	$\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_6-\text{COOH}$	„ 140°
Azelainsäure	$\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_7-\text{COOH}$	„ 108°

Die beiden ersten waren Reinstpräparate von HEYL, die zwei andern Reinstpräparate von SCHEERING-KAHLBAUM. Die Herstellung der sehr dünnen Absorptionsschichten wurde wesentlich verbessert. An Stelle der Auskristallisierung aus organischen Lösungsmitteln tritt nun die Methode der Aufdampfung auf Steinsalzplatten im Hochvakuum. Die Substanzen werden im Hochvakuum elektrisch erhitzt und schlagen sich auf einer gegenüberliegenden Na · Cl-Platte nieder. Eine Zersetzung der Substanz durch das Erhitzen findet nicht statt.



auskristallisiert
Vergr. = 100



aufgedampft (Vergr. = 600)
Schichtdicke $\sim 5 \mu$

Fig. 1.

Absorptionsschichten.

Figur 1 gibt einen Vergleich zwischen einer auskristallisierten und einer aufgedampften Schicht. Die auskristallisierte Schicht zeigt zwischen den Kristallen relativ grosse Lücken, wodurch natürlich, wie Figur 2 sehr deutlich beweist, die Absorptionskurven stark verflacht werden. Die durch Aufdampfung erzeugten, viel homogenen Schichten ergeben schärfere Banden, was die Schwingungsfrequenzen genauer zu bestimmen gestattet. Die neuen Kurven geben mehr Details und lassen auch ganz schwache Banden erkennen. Zur Kontrolle wird jedoch für jede Substanz auch

eine auskristallisierte Schicht durchgemessen. Es ergeben sich in jedem Falle für beide Methoden dieselben Banden, von sehr schwachen abgesehen, welche nur an den aufgedampften Schichten gemessen werden können. In Figur 2 sind zwei entsprechende Kurven einander gegenübergestellt.

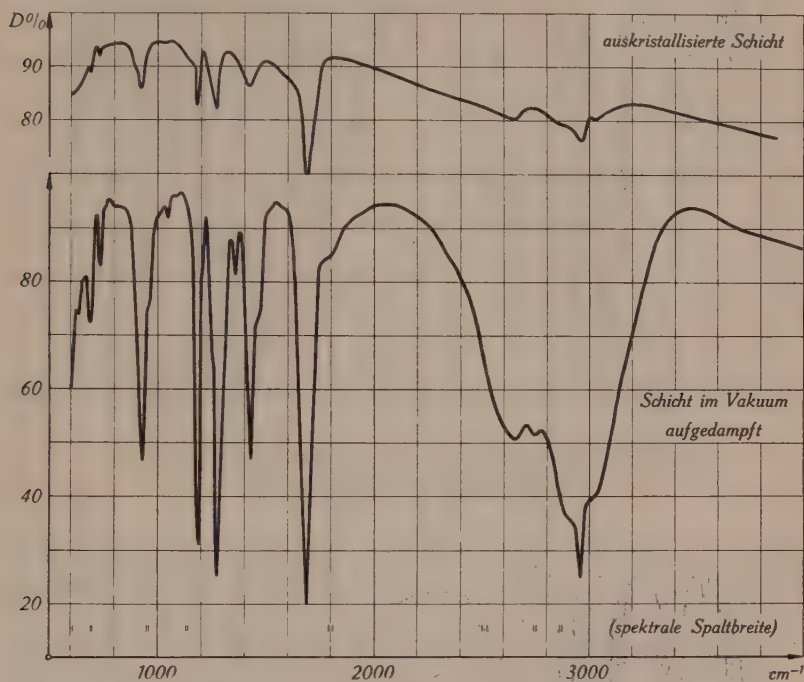


Fig. 2.

Durchlässigkeit D der Adipinsäure $\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_4-\text{COOH}$ als Funktion der Wellenzahlen.

§ 4. Experimentelle Ergebnisse.

In den Figuren 2 bis 5 sind die Durchlässigkeitskurven der vier gemessenen Dicarbonsäuren als Funktion der Wellenzahlen (cm^{-1}) dargestellt. Für jede Verbindung wurden zwei verschiedenen dicke, aufgedampfte und eine auskristallisierte Schicht vermessen. In Tabelle 1 sind die gemessenen Wellenzahlen ν in cm^{-1} und die relativen Intensitäten i der Banden zusammengestellt. Sie enthält nur solche Frequenzen, welche an zwei verschiedenen aufgedampften Schichten erhalten wurden.

Drei der Säuren hat schon LECOMTE vermessen. Für Adipin-, Pimelin- und Azelainsäure gibt er folgende ungefähren Absorptionsstellen an: Eine schwache Bande um 680 cm^{-1} für alle drei

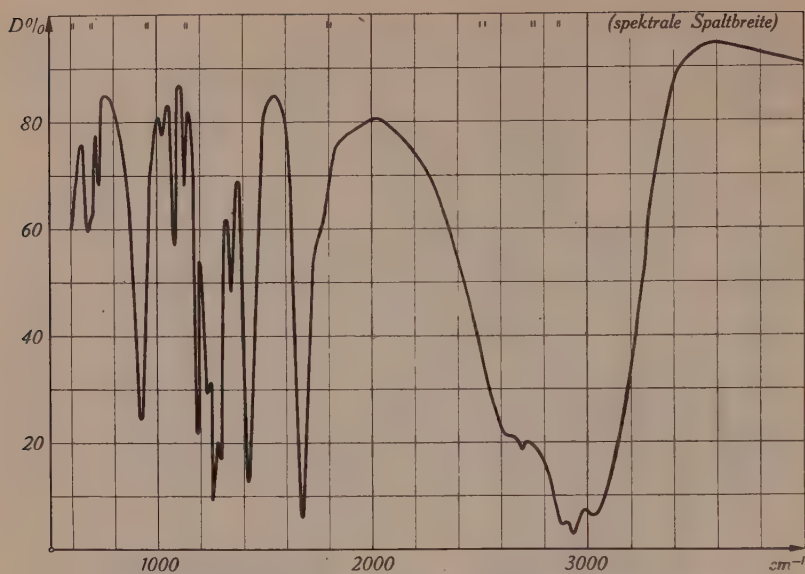


Fig. 3.

Durchlässigkeit D der Pimelinsäure $\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_5-\text{COOH}$
als Funktion der Wellenzahlen.

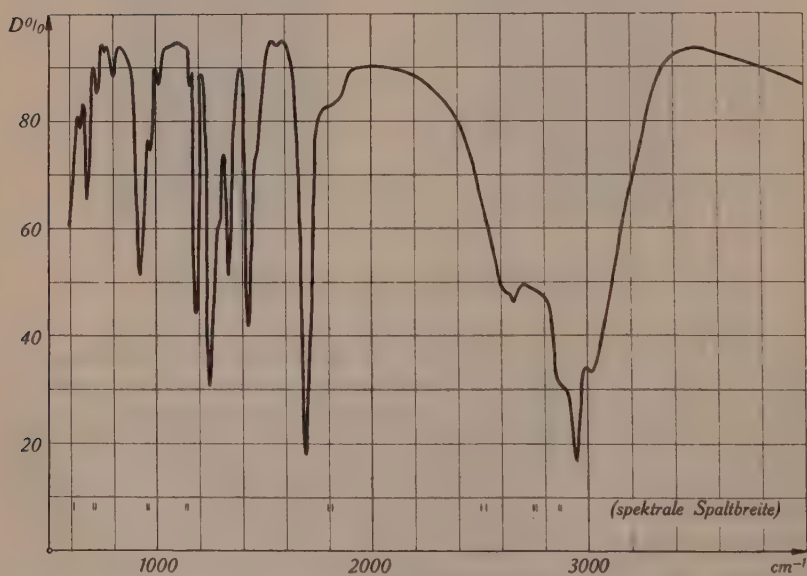


Fig. 4.

Durchlässigkeit D der Korksäure $\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_6-\text{COOH}$
als Funktion der Wellenzahlen.

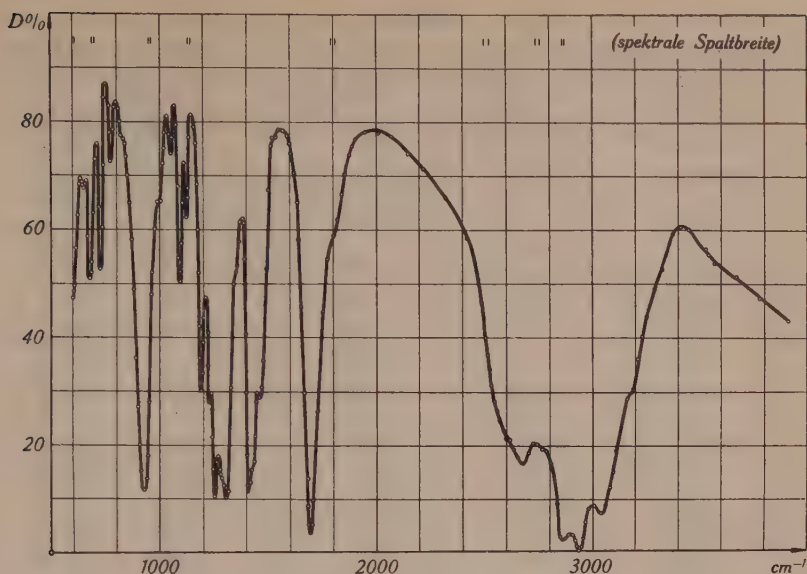


Fig. 5.

Durchlässigkeit D der Azelainsäure $\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_7\text{-COOH}$
als Funktion der Wellenzahlen.

Säuren; eine Bande bei 735 cm^{-1} für die Adipinsäure und je eine zwischen 720 cm^{-1} und 724 cm^{-1} für die beiden andern und schliesslich eine sehr intensive für alle drei Säuren zwischen 900 cm^{-1} und 920 cm^{-1} . In Tabelle 1 sind diejenigen Frequenzen, die wahrscheinlich den von LECOMTE (l. c.) gemessenen entsprechen, durch einen Stern bezeichnet. Die Zuordnung ist etwas schwierig, weil er nur die ungefähre Lage der Banden angibt.

Die Berechnung der relativen Intensitäten in Tabelle 1 erfolgt nach einem von SCHÄFER und KERN¹⁾ angegebenen Verfahren. Für die absoluten Intensitäten gilt:

$$I = \lg \frac{D_{\max}}{D_{\min}} \cdot \Delta \nu.$$

Die relativen Intensitäten i beziehen sich auf die willkürlich mit 10 angenommene Intensität der Bande um 1700 cm^{-1} . D_{\min} bedeutet den Minimalwert der Durchlässigkeit in der Bande und D_{\max} das Durchlässigkeitsmaximum in unmittelbarer Umgebung der Bande; $\Delta \nu$ ist die Breite der Bande bei der Durchlässigkeit $D = \sqrt{D_{\min} \cdot D_{\max}}$.

¹⁾ CL. SCHÄFER und R. KERN, ZS. f. Phys. **78**, 609, 1932.

Tabelle 1.

Wellenzahlen ν der Absorptionsmaxima und relative Intensitäten i der Banden.

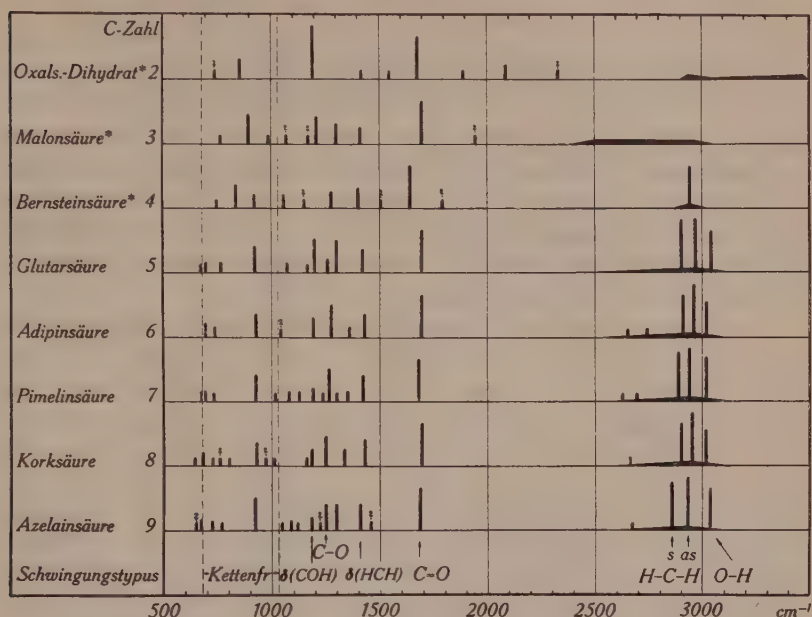
Adipinsäure $\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_4-\text{COOH}$		Pimelinsäure $\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_5-\text{COOH}$		Korksäure $\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_6-\text{COOH}$		Azelaensäure $\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_7-\text{COOH}$	
$\nu_{\text{cm}^{-1}}$	i	$\nu_{\text{cm}^{-1}}$	i	$\nu_{\text{cm}^{-1}}$	i	$\nu_{\text{cm}^{-1}}$	i
		676	1d	645	0	652	0?
690*	1	692*		680	1	677*	$\frac{1}{2}$
735*	$\frac{1}{2}$	729*	0	725	0	724*	$\frac{1}{2}$
				760	0?	772	0
				802	0		
926*	4	924*	5	930	4	926*	7
				971	0?		
1040	0?	1017	0	1010	0	1048	0
		1080	$\frac{1}{2}$			1091	$\frac{1}{2}$
		1125	$\frac{1}{2}$	1162	0	1122	0
1190	3	1190	1	1186	2	1186	1
		1235	0			1223	0?
1275	7	1265	7	1250	6	1250	10d
		1300	0			1300	
1362	$\frac{1}{2}$	1350	$\frac{1}{2}$	1334	2		
1430	4	1420	5	1430	5	1410	5
						1461	0?
1695	10**	1682	10**	1695	10**	1690	10**
2650	50b	2625	77b	2660	62b	2675	55b
2740		2695					
2910		2890		2900		2860	
2960		2940		2950		2935	
3020		3020		3015		3040	

d = Doppelbande; b = breit; ? = sehr schwach, unsicher; ** = Intensität angenommen; * = schon von LECOMTE (l. c.) gemessen; 0 = schwach, Intensität kleiner als $\frac{1}{2}$.

§ 5. Diskussion.

In organischen Kettenmolekülen unterscheidet man Gruppen- und Kettenschwingungen. Bei den ersteren schwingen hauptsächlich die Atome gewisser Gruppen (z. B. der CH_2 -Gruppe) in erster Näherung unabhängig vom Rest des Moleküls. Bei den Kettenschwingungen schwingt das ganze Kohlenstoffgerüst, wobei annäherungsweise die CH_2 - und Carboxylgruppen als einheitliche Massen betrachtet werden dürfen. Da gewisse Atomgruppen in verschiedenen Molekülen immer wieder vorkommen, treten in den Spektren auch immer wieder dieselben Frequenzen, die sogenannten

Gruppenschwingungsfrequenzen auf. Die Kettenschwingungsfrequenzen hingegen sind typisch für ein Molekül. Sie sind abhängig von der Kettenlänge, der Gestalt und den Symmetrieeigenschaften des Moleküls.



* nach FICHTER (l. c.)

Fig. 6.

Ultrarotbanden der Dicarbonsäuren.

In Figur 6 sind die Spektren der hier vermessenen Dicarbonsäuren schematisch aufgezeichnet. Es fällt sofort auf, dass oberhalb 1000 cm^{-1} in allen Spektren zur Hauptsache die gleichen Banden vorkommen, welche deshalb bestimmten Gruppenschwingungen zugeordnet werden. Unterhalb 1000 cm^{-1} befindet sich das Gebiet der Kettenschwingungsfrequenzen. Hier liegen die Verhältnisse etwas anders. Mit steigender Zahl der Kohlenstoffatome ändern sich die Spektren, und zwar wächst die Anzahl der Frequenzen mit wachsender Kettenlänge. Diese Tatsache ist theoretisch zu erwarten.

Zu den einzelnen Säuren ist folgendes zu sagen:

a) Adipinsäure ($\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_4-\text{COOH}$).

Für die Adipinsäure liegt eine vollständige Röntgen-Fourier-Analyse von MAC GILLAVRY¹⁾ vor. Sie ergibt folgendes Bild:

¹⁾ C. H. MAC GILLAVRY, Rec. trav. chim. Pays-Bas **60**, 605 1941.



Fig. 7.

Strukturelement der Adipinsäure (nach MAC GILLAVRY).

o = C, • = O, ----- = Wasserstoffbrücken, Atomabstände in AE.

Das Molekül ist nicht ganz eben, vielmehr sind die Enden um C₂ respektive C₅ (siehe Fig. 7) um einige Grade aus der Ebene der mittleren C-Atome (C₂...C₅) herausgedreht. Die Abstände und Valenzwinkel sind aus der Figur ersichtlich. Die Carboxylgruppen aneinanderstossender Moleküle sind complanar und durch Wasserstoffbrücken O....H—O gebunden¹⁾.

Das Ultrarotspektrum der Adipinsäure ist in Fig. 6 dargestellt. Um 3000 cm⁻¹ befindet sich ein breites Absorptionsgebiet mit drei scharf ausgeprägten Maxima. Für die Banden bei 2910 cm⁻¹ und 2960 cm⁻¹ müssen die symmetrische und die antisymmetrische H—C—H-Schwingung verantwortlich gemacht werden. Da wie bei den ersten vier Dicarbonsäuren die normale O—H-Bande bei ca. 3500 cm⁻¹ vollständig fehlt, ist anzunehmen, sie sei wegen der Wasserstoffbrücken nach 3020 cm⁻¹ verschoben. Die Röntgenanalyse hat gezeigt, dass solche Wasserstoffbindungen vorhanden sind, und es ist bekannt, dass diese die O—H-Bande nach kleineren Frequenzen verschieben.

Das Modell $\text{O}=\text{C}-\text{O}$ besitzt zwei Valenzschwingungsfrequenzen ν_1 und ν_2 und eine Deformationsschwingungsfrequenz ν_δ . Bei der Vereinfachung auf zweiatomige Gruppen entspricht ν_1 der C=O- und ν_2 der C—O-Valenzschwingung. Die C=O-Valenzschwingung kann man eindeutig der intensiven Bande bei 1695 cm⁻¹ zuordnen. Die ebenfalls starke Bande bei 1275 cm⁻¹ muss als C—O-Schwingung aufgefasst werden, während die schwächere bei 1190 cm⁻¹ der Deformationsschwingung $\delta(\text{COH})$ zuzuschreiben ist. Die Deutung dieser beiden Frequenzen wird nicht von allen Autoren übereinstimmend vorgenommen. FICHTER (l. c.) deutet bei den niedrigeren Dicarbonsäuren ebenfalls eine Bande zwischen 1200 cm⁻¹ und 1300 cm⁻¹ (1278 cm⁻¹ bei Glutarsäure)

¹⁾ In der gleichen Arbeit ist auch die Bernsteinsäure $\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_2-\text{COOH}$ analysiert. Bei ihr ist die C-Kette vollständig eben, hingegen sind die Carboxylgruppen um einige Grade aus dieser Ebene herausgedreht. Ersteres widerspricht der Ansicht von YARDLEY (Proc. Roy. Soc. **105 A**, 451, 1924), die auch von FICHTER und WEHRLI (l. c.) übernommen wurde, wonach die vier C-Atome auf einem schiefen Tetraeder liegen sollen.

als C—O-Schwingung. Hingegen fällt bei ihm die Deformationsschwingung mit der C—O-Schwingung zusammen. Die hier vertretene Auffassung entspricht derjenigen von HERMANN und HOFSTADTER¹⁾. Es wird dort bei Essigsäure ($\text{CH}_3\text{—COOH}$) eine Frequenz von 1282 cm^{-1} der C—O-Schwingung und von 1176 cm^{-1} der $\delta(\text{O—H})$ -Schwingung zugeschrieben. Eine andere, hiervon stark abweichende Deutung geben DAVIES und SUTHERLAND²⁾, die bei Monocarbonsäuren eine Bande um 1430 cm^{-1} der C—O-Schwingung zuordnen. Dazu ist zu bemerken, dass bei den Paraffinen ($\text{C}_n\text{H}_{2n+2}$) im Ramaneffekt eine sehr intensive Bande in dieser Gegend beobachtet und der Deformationsschwingung $\delta(\text{HCH})$ zugeschrieben wird. Die Frequenz 1430 cm^{-1} der Adipinsäure wird deshalb auch hier als $\delta(\text{HCH})$ -Schwingung gedeutet. Die Banden bei 735 cm^{-1} und 926 cm^{-1} können als Kettenschwingungsfrequenzen gedeutet werden.

b) Pimelinsäure ($\text{HOOC—(CH}_2)_5\text{—COOH}$).

Über die Kristallstruktur der Pimelinsäure ist röntgenographisch nichts bekannt. Im Ultrarotspektrum (Fig. 6) fehlt wiederum die normale O—H-Bande. Sie ist um ca. 500 cm^{-1} verschoben, was die Bindung der Moleküle im Kristall durch Wasserstoffbrücken von neuem bestätigt. Die O—H-Bande liegt an der gleichen Stelle wie bei der Adipinsäure bei 3020 cm^{-1} . Die Banden bei 2890 cm^{-1} und 2940 cm^{-1} werden wie im Spektrum der Adipinsäure der symmetrischen und antisymmetrischen H—C—H-Schwingung zugeordnet. Beide Frequenzen sind gegenüber den entsprechenden der Adipinsäure schwach nach kleineren Wellenzahlen verschoben. Die C=O-Bande ist gegenüber der Adipinsäure um 13 cm^{-1} nach kleineren Wellenzahlen verschoben und liegt nun bei 1682 cm^{-1} . Im gleichen Sinn leicht verschoben sind auch die C—O-Valenzschwingungsfrequenz bei 1265 cm^{-1} und die Deformationsschwingung $\delta(\text{HCH})$ bei 1420 cm^{-1} . Die der Deformationsschwingung $\delta(\text{COH})$ zugeordnete Frequenz liegt wieder bei 1190 cm^{-1} . Eine Anzahl ganz schwacher Banden wie z. B. 1300 , 1235 , 1125 , 1080 , 1017 cm^{-1} usw., die hier nicht gedeutet worden sind, dürften zu Kombinations- oder Oberschwingungen gehören.

¹⁾ R. C. HERMAN und R. HOFSTADTER, J. chem. phys. **6**, 537, 1938.

²⁾ M. M. DAVIES und G. B. B. M. SUTHERLAND, J. chem. phys. **6**, 755, 1938.

c) Korksäure ($\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_6-\text{COOH}$).

Die Struktur der Korksäure ist röntgenographisch nicht näher untersucht. Es ist jedoch anzunehmen, dass sie nicht wesentlich von derjenigen der Adipinsäure abweicht, da die Glieder mit gerader C-Zahl in der homologen Reihe nach MAC GILLAVRY (l. c.) ein sehr ähnliches Verhalten zeigen. Aus Fig. 6 ist zu ersehen, dass die Frequenz-Zuordnungen denen bei den vorhergehenden Säuren entsprechen.

Im Folgenden soll die Berechnung der Kettenschwingungsfrequenzen durchgeführt werden. Über die Theorie der Kettenschwingungen liegen verschiedene Abhandlungen vor. Die Arbeiten von BARTHOLOMÉ und TELLER¹⁾ und von MECKE²⁾ widmen sich speziell den Eigenschwingungen organischer Kettenmoleküle. Die Rechnung von MECKE (l. c.) für die Paraffine ist von WEHRLI (l. c.) auf die Dicarbonsäuren übertragen worden, und für die ersten vier Glieder der homologen Reihe scheint die Theorie befriedigend mit dem Experiment übereinzustimmen. Dehnt man die Rechnung auf die höhern Dicarbonsäuren aus, so kann man wiederum allen gemessenen Banden berechnete zuordnen. Dagegen können nicht alle berechneten Frequenzen experimentell festgestellt werden, die mittleren scheinen zu fehlen. Dabei ist zu beachten, dass in der Rechnung von WEHRLI zunächst die schweren Endmassen der Kette nicht berücksichtigt worden sind d. h. es ist so gerechnet worden, als ob alle Massen gleich schwer wären. Zur Berechnung der Bindungskonstanten werden dann die schweren Endmassen berücksichtigt.

In den Untersuchungen von BARTHOLOMÉ und TELLER (l. c.) ist die Rechnung für Ketten mit schwereren Endatomen streng durchgeführt. Die Berechnung geht von folgenden Voraussetzungen aus: Das Molekül sei eine ebene Zickzackkette mit dem Valenzwinkel β (siehe Fig. 7). Die mittleren Atomgruppen seien alle gleich schwer ($m_{\text{CH}_2} = 14$), die Endgruppen ($M_{\text{COOH}} = 45$) dagegen wesentlich schwerer. Zur Vereinfachung des Modells werden statt der Atomgruppen Massenpunkte mit der Masse der Gesamtgruppe eingeführt und nur die Valenzschwingungen betrachtet.

Die Schwingungsfrequenzen ω_i der Kette ohne schwere Endatome lassen sich nach folgender Formel berechnen:

$$\omega_i^2 = \frac{2k}{m_c} \left(1 - \cos \beta \cos \frac{i\pi}{N} \right). \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (1)$$

¹⁾ E. BARTHOLOMÉ und E. TELLER, ZS. f. phys. Chem. B **19**, 366, 1932.

²⁾ R. MECKE, ZS. f. phys. Chem. B **36**, 347, 1937.

Die Frequenzen liegen zwischen einer obern und einer untern Grenze und zwar nach (1) zwischen

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{2k}{m_c} (1 + \cos \beta)} \text{ und } \omega_{\min} = \sqrt{\frac{2k}{m_c} (1 - \cos \beta)} \quad (2)$$

Es bedeuten: k die Bindungskonstante zwischen zwei Kettengliedern, m_c die Masse der CH_2 -Gruppen, β den Valenzwinkel (Aussenwinkel), N die Zahl der Kettenglieder und i die Laufzahl der $N-1$ Valenzschwingungen.

Werden nun die schweren Endatome an die Kette gehängt, so lassen sich die Valenzschwingungen der Kette durch eine der Gleichung (1) entsprechende Formel berechnen. Es gilt

$$\omega_i^2 = \frac{2k}{m_c} \left(1 - \cos \beta \cos \frac{2\pi}{\lambda_i'} \right), \quad (3)$$

wobei λ_i' eine nicht mehr ganzzahlige Laufzahl bedeutet. Die λ_i' müssen ferner folgende Gleichungen erfüllen:

$$\frac{\sin \frac{2\pi(n+1)}{\lambda_i'}}{\sin \frac{2\pi n}{\lambda_i'}} = - \frac{\frac{k}{m_c} \cos \beta}{\omega_i^2 - k \left(\frac{1}{m_c} + \frac{1}{M} \right)} \quad (4)$$

$$\frac{\cos \frac{2\pi(n+1)}{\lambda_i'}}{\cos \frac{2\pi n}{\lambda_i'}} = - \frac{\frac{k}{m_c} \cdot \cos \beta}{\omega_i^2 - k \left(\frac{1}{m_c} + \frac{1}{M} \right)}. \quad n = \frac{N}{2} - 2 \quad (5)$$

Aus (3) und (4) resp. (3) und (5) lassen sich die λ_i' graphisch bestimmen¹⁾. Setzt man die so erhaltenen λ_i' -Werte in Gleichung (3) ein, so erhält man die gesuchten Frequenzen ω_i . Solange die Frequenzen $\omega_E = \sqrt{\frac{k}{M}}$ der Endmassen M im angegebenen Intervall liegen, liefert (3) die richtige Anzahl Lösungen. Liegt jedoch die Frequenz ω_E unterhalb des angegebenen Intervalls, so kann sich diese Schwingung nicht in die Kette hinein fortpflanzen. Es schwingen im wesentlichen nur die angehängten Massen M , und es gibt Normalschwingungen, die von der Kettenlänge kaum abhängen. In diesem Falle liefert (3) zu wenig Lösungen. Die fehlenden ω_i -Werte ergeben sich aus dem Ansatz:

$$\omega_i^2 = \frac{2k}{m_c} \left(1 - \cos \beta \cos h \frac{2\pi}{\lambda_i''} \right). \quad (6)$$

¹⁾ Über die graphische Auflösung der Gleichungen siehe BARTHOLOMÉ und TELLER (l. c.) Seite 382.

Die Bedingungen für die λ_i'' lauten ganz ähnlich wie (4) und (5). Es gilt jetzt:

$$\frac{\sin h \frac{2\pi(n+1)}{\lambda_i''}}{\sin h \frac{2\pi n}{\lambda_i''}} = - \frac{\cos \beta \cdot \frac{k}{m_c}}{\omega_i^2 - k \left(\frac{1}{m_c} + \frac{1}{M} \right)} \quad (7)$$

$$\frac{\cos h \frac{2\pi(n+1)}{\lambda_i''}}{\cos h \frac{2\pi n}{\lambda_i''}} = - \frac{\cos \beta \cdot \frac{k}{m_c}}{\omega_i^2 - k \left(\frac{1}{m_c} + \frac{1}{M} \right)} \quad (8)$$

Aus (6) und (7) resp. (6) und (8) müssen die λ_i'' wieder graphisch bestimmt werden. λ_i'' in Gleichung (6) eingesetzt, ergibt die fehlenden Lösungen ω_i . Sie sind praktisch unabhängig von der Kettenlänge, also eine Art Gruppenfrequenzen, und kleiner als ω_{\min} .

Diese Rechnung soll nun auf das Beispiel der Korksäure ($N = 8$) angewandt werden. Es gelten folgende Daten: Als Valenzwinkel wird der bei der Adipinsäure aus Röntgenuntersuchungen bestimmte Winkel $\beta = 67^\circ$ (Aussenwinkel) genommen. Die Bindungskonstante k wird so gewählt, dass die berechneten Frequenzen möglichst mit den Experimenten übereinstimmen. Ihr Zahlenwert ergibt sich zu $3,1 \cdot 10^5 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-1}$, was mit den aus andern Messungen bekannten Werten der C—C-Bindung befriedigend übereinstimmt. Daraus berechnen sich die Grenzen des Kettenschwingungsintervalls zu $\omega_{\min} = 682 \text{ cm}^{-1}$ und $\omega_{\max} = 1030 \text{ cm}^{-1}$. Die Gleichung (3) liefert nur fünf statt sieben Valenzschwingungen. Die zwei fehlenden Lösungen erhält man aus dem

Tabelle 2.

Beobachtete und berechnete Kettenfrequenzen ω_i der Korksäure ($\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_8-\text{COOH}$).

beobachtet		berechnet	Differenz
$\omega_{\text{cm}^{-1}}$	i	$\omega_{\text{cm}^{-1}}$	cm^{-1}
645	0	641	- 4
		648	3
725	0	734	9
760	0?	—	—
802	0	816	14
930	4	897	- 33
971	0?	970	- 1
1010	0	1015	5

0 = schwach, Intensität kleiner als $\frac{1}{2}$; 0? = sehr schwach, unsicher.

Ansatz (6), und zwar sind diese beiden Frequenzen kleiner als ω_{\min} . Die berechneten und beobachteten Werte sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

Qualitativ stimmen berechnete und beobachtete Werte befriedigend überein. Es kann jeder berechneten Frequenz eine beobachtete eindeutig zugeordnet werden und umgekehrt. Die einzige Ausnahme bildet die fragliche Bande bei 760 cm^{-1} , der keine berechnete entspricht. Quantitativ ist die Übereinstimmung weniger gut, es ergeben sich zum Teil ziemlich grosse Differenzen. Der Grund dafür ist in der starken Vereinfachung des angewandten Modells zu suchen. Zum Beispiel hat die Röntgenanalyse gezeigt, dass die Moleküle nicht vollkommen eben sind. Die Ebenheit ist jedoch Voraussetzung der Rechnung. Nicht zuletzt werden aber auch die zwischenmolekularen Kräfte im Kristall einen Einfluss auf die Schwingungen der Kette ausüben. Auf diesen Punkt soll in § 9 noch näher eingegangen werden.

d) *Azelainsäure* ($\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_7-\text{COOH}$).

Die Kristallstruktur der Azelainsäure scheint bis jetzt röntgenographisch noch nicht untersucht zu sein. Im Ultrarotspektrum bestätigt sich erneut das Fehlen der O—H-Bande am normalen Ort um 3500 cm^{-1} . Die verschobene O—H-Bande bei 3040 cm^{-1} wird durch die C—H-Bande fast ganz überdeckt. Die weitere Zuordnung der Frequenzen zu bestimmten Schwingungstypen ist aus Fig. 6 ersichtlich, sie entspricht ganz der bei den drei andern Säuren besprochenen.

Zusammenfassend kann zu den vier gemessenen Spektren folgendes gesagt werden: Schon bei den ersten Gliedern der Dicarbonsäuren beobachtete FICHTER (l. c.) das Fehlen der O—H-Bande bei 3500 cm^{-1} . Er vermutete, sie sei nach kleineren Wellenzahlen verschoben. Da jedoch die verschobene Bande immer gerade in das breite Absorptionsgebiet der C—H-Bande fiel, war es nicht möglich die Verschiebung mit Sicherheit festzustellen. Infolge der genaueren Messungen konnte nun das Absorptionsgebiet in der Umgebung der C—H-Bande besser aufgelöst und die Verschiebung der O—H-Bande eindeutig bewiesen werden. Aus dieser Verschiebung muss auf Bindung der Moleküle im Kristall durch Wasserstoffbrücken geschlossen werden. Die Verrückung nach kleineren Wellenzahlen kommt dadurch zustande, dass die normale O—H-Bindung gelockert wird, wenn das H-Atom eine Wasserstoffbrücke bildet¹⁾.

¹⁾ M. WEHRLI und G. MILAZZO: *Helv. Chim. Acta* **26**, 1025, 1943.

Auffallend ist die schon von FICHTER & WEHRLI (l. c.) gefundene Oszillation gewisser Gruppenfrequenzen mit steigender Zahl der Kohlenstoffatome. Diese Oszillation wurde bei den ersten vier Dicarbonsäuren an der C=O-Bande beobachtet. Bei den höheren Gliedern lässt sie sich nun weiter verfolgen (Fig. 6). Es scheint jedoch bei der Glutarsäure ein Phasenwechsel stattzufinden. Unterhalb $n = 3$ sind nämlich die Frequenzen der Glieder mit ungerader C-Zahl höher, oberhalb aber die der Glieder mit gerader Anzahl. Der Phasenwechsel könnte möglicherweise damit zusammenhängen, dass die Glutarsäure den tiefsten Schmelzpunkt der homologen Reihe besitzt. In Fig. 6 und Tab. 1 kann bei den neuen Messungen eine analoge Oszillation der H—C—H-Valenzschwingungsfrequenzen und der δ (HCH)-Deformationsschwingung festgestellt werden. Die Schwankungen verlaufen gleichsinnig mit denjenigen der C=O-Bande. Dieses Hin- und Herpendeln der Gruppenfrequenzen dürfte, wie schon FICHTER & WEHRLI vermuteten, mit der Oszillation der Schmelzpunkte und damit der zwischenmolekularen Bindungskräfte zusammenhängen.

II. Absorptionsspektrum von Glutarsäure in der Umgebung des Schmelzpunktes.

§ 6. Im Hinblick auf die im ersten Teil dieser Arbeit angeschnittenen Fragen über zwischenmolekulare Bindungen durch Wasserstoffbrücken und Störung der Kettenschwingungen im Kristall, schien es interessant, an Dicarbonsäuren Messungen in der Umgebung des Schmelzpunktes durchzuführen. In der Erwartung, die erwähnten Probleme besser klären zu können, wurden an Glutarsäure $\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_3-\text{COOH}$ an ein- und derselben Schicht Messungen unter- und oberhalb des Schmelzpunktes vorgenommen. Die Glutarsäure wurde deshalb gewählt, weil sie von allen Dicarbonsäuren den tiefsten Schmelzpunkt ($97,5^\circ$) besitzt und aus diesem Grunde bei ihr die geringsten experimentellen Schwierigkeiten zu erwarten waren.

§ 7. Experimentelle Anordnung.

Die zu untersuchende Substanz wurde zunächst wieder auf eine Steinsalzplatte aufgedampft und in einem elektrischen Ofen, dessen Temperatur auf $\pm 2^\circ$ konstant gehalten werden konnte, erwärmt. Der ganze Ofen war von einem wassergekühlten Gehäuse umgeben, um jegliche direkte Temperaturstrahlung auf das Radiomikrometer auszuschalten. Um ein Herunterfließen der geschmolzenen Substanz zu verhüten, musste der Strahlengang im Ofen

vertikal gewählt werden. Der Strahlengang ausserhalb des Spektrometers war deshalb wie folgt: Der Nernststift wurde mit einem Hohlspiegel über einen Planspiegel auf die absorbierende Schicht im Ofen abgebildet. Über einen zweiten Planspiegel wurde durch einen weiteren Hohlspiegel ein Bild des Nernststiftes auf dem Eintrittsspalt des schon beschriebenen Spektrometers erzeugt. Der Ofen war derart konstruiert, dass alternierend eine leere und eine mit einer Kristallschicht versehene Steinsalzplatte in den Strahlengang gebracht werden konnten, so dass Fehler wie Reflexion und Absorption, sowie sekundäre Wärmestrahlung der Steinsalzplatten selbst eliminiert wurden. Vorversuche ergaben übrigens, dass die Ausschläge des Radiomikrometers infolge der Wärmestrahlung des Ofens allein bei den üblichen Spaltbreiten und bei einer Temperatur des Ofens von ca. 100° nur einige Millimeter auf der fünf Meter entfernten Skala betrugen.

Eine Schwierigkeit ergab sich zunächst dadurch, dass die Substanz schon vor dem Erreichen des Schmelzpunktes wegsublimierte. Sie konnte überwunden werden, indem die Schicht zwischen zwei Steinsalzplatten gebracht wurde. Bei dieser Anordnung konnten nur noch ganz geringe Mengen der Substanz am Rande verdampfen, und dies wirkte nicht mehr störend. Selbstverständlich wurde dabei gegen zwei in gleicher Art übereinandergelegte leere Steinsalzplatten gemessen. An ein- und derselben Schicht von Glutarsäure (Smp.: $97,5^{\circ}$) wurden folgende Absorptionskurven durchgemessen: 1) eine normale Kurve bei Zimmertemperatur, 2) eine Kurve bei $t = 55^{\circ}$, 3) eine dicht unterhalb des Schmelzpunktes bei $t = 90^{\circ}$, 4) eine oberhalb des Schmelzpunktes bei $t = 110^{\circ}$ und 5) nach Abkühlung der Substanz nochmals eine Kurve bei $t = 20^{\circ}$.

Zur Herstellung der Absorptionsschichten dienten ein Reinstpräparat von SCHEERING-KAHLBAUM und ein Reinstpräparat von SCHUCHARDT.

§ 3. Ergebnisse.

Die Durchlässigkeitskurven der Glutarsäure in der Umgebung des Schmelzpunktes sind in Figur 8 dargestellt. Die Kurven bei $t = 55^{\circ}$, $t = 90^{\circ}$ sowie diejenige nach dem Wiederabkühlen bei $t = 20^{\circ}$ stimmen mit der ursprünglichen Kurve bei Zimmertemperatur überein. In Fig. 8 ist deshalb nur die Kurve der ersten Messung bei $t = 20^{\circ}$ der oberhalb des Schmelzpunktes erhaltenen gegenübergestellt.

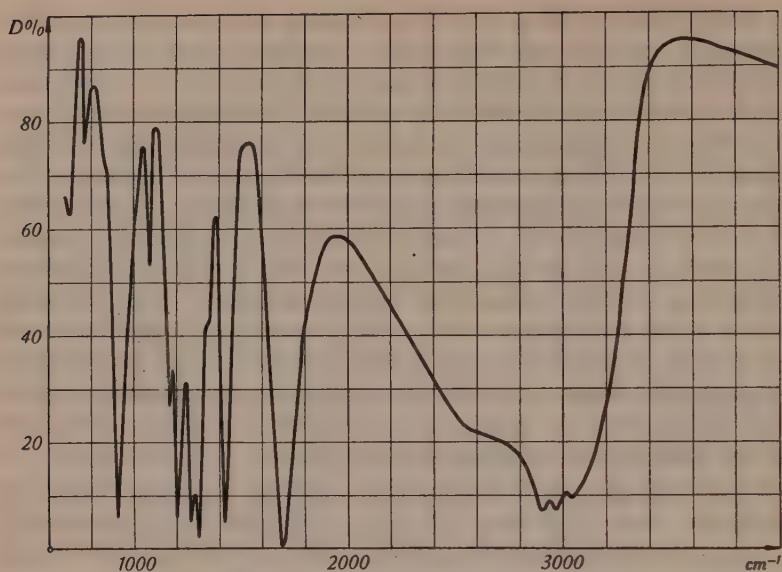


Fig. 8 a.

Durchlässigkeit D der Glutarsäure $\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_3-\text{COOH}$ bei $t = 20^\circ \text{C}$.

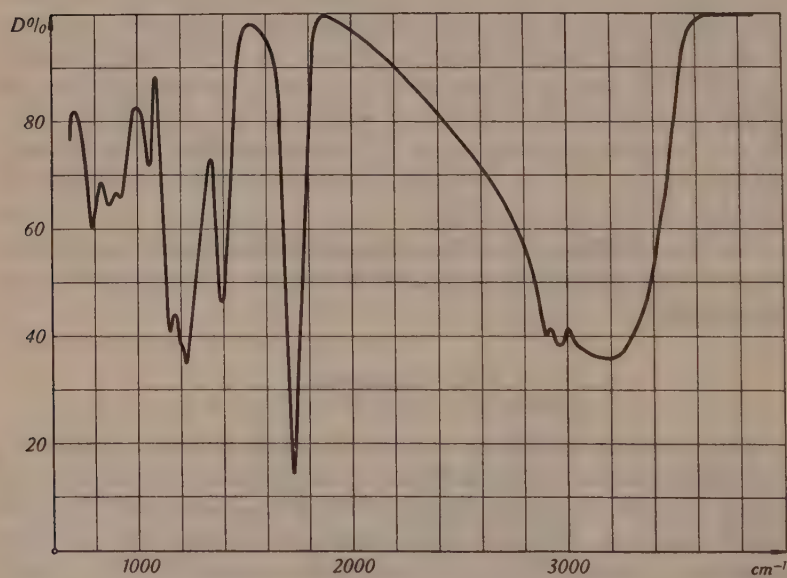


Fig. 8 b.

Durchlässigkeit D der Glutarsäure bei $t = 105^\circ \text{C}$.

In Tabelle 3 sind die gemessenen Frequenzen zusammengestellt.

Tabelle 3.

Glutarsäure ($\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_3-\text{COOH}$):

Wellenzahlen ν der Absorptionsmaxima und Intensitäten i der Banden unter- und oberhalb des Schmelzpunktes $97,5^\circ$.

FICHTER und WEHRLI		fest $t = 20^\circ$		flüssig $t = 105^\circ$		Differenz	Zuordnung
$\nu_{\text{cm}^{-1}}$	i	$\nu_{\text{cm}^{-1}}$	i	$\nu_{\text{cm}^{-1}}$	i	$\nu_{\text{flüssig}} - \nu_{\text{fest}}$	
—	—	670	0	*			
690	0?	694	$\frac{1}{2}$	*			
764	1	763	$\frac{1}{2}$	783		20	} Kettenfr.
				862			
914	7	922	5	918		- 4	
1053	0?	1070	$\frac{1}{2}$	1053	$\frac{1}{2}$	- 17	
—	—	1163	0				
—	—	1200		1155		- 45	δ (COH)
1278	3b	1258	} 15		} 12		
—	—	1300		1220		- 80	C—O
1400	3	1422	4	1392	3	- 30	δ (HCH)
1665	10	1695	10	1725	10	30	C=O
2890		2900		2900		0	
bis	} 34b	2965	} 61b	2965	} 60b	0	} H—C—H
3035		3040		3190		150	
							O—H

b = breit; sb = sehr breit; * in diesem Gebiet konnte wegen zu geringer Intensität nicht mehr gemessen werden.

Die vorliegende Messung bei $t = 20^\circ$ weicht, wie aus Tabelle 3 ersehen werden kann, etwas von der von FICHTER & WEHRLI (l. c.) ab. Zur Kontrolle wurde deshalb auch eine aus absolutem Alkohol auskristallisierte Schicht vermessen. Vier aufgedampfte und eine auskristallisierte Schicht ergaben Banden bei genau gleichen Wellenzahlen. Die in Tabelle 3 gegebenen neuen Werte dürfen daher als gesichert angesehen werden.

Es wurden auch Messungen an Malonsäure $\text{HOOC}-\text{CH}_2-\text{COOH}$ und Azelainsäure $\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_7-\text{COOH}$ in der Nähe des Schmelzpunktes gemacht. Bei Malonsäure konnte oberhalb des Schmelzpunktes nicht mehr gemessen werden, da sie hitzeunbeständig ist. Wenn nämlich zwei Carboxylgruppen am selben Kohlenstoffatom sitzen, wird eine stets sehr leicht entfernt. Die Malonsäure zerfällt dabei in Essigsäure $\text{CH}_3 \cdot \text{COOH}$ und CO_2 . Die Azelainsäure verhielt sich beim Erhitzen normal, sie wurde aber nur im Gebiet der Kettenschwingungsfrequenzen untersucht. Das Ergebnis wird im folgenden Paragraphen erwähnt.

§ 9. Diskussion.

In Figur 9 sind die Ultrarotspektren der Glutarsäure in der Nähe des Schmelzpunktes schematisch dargestellt.

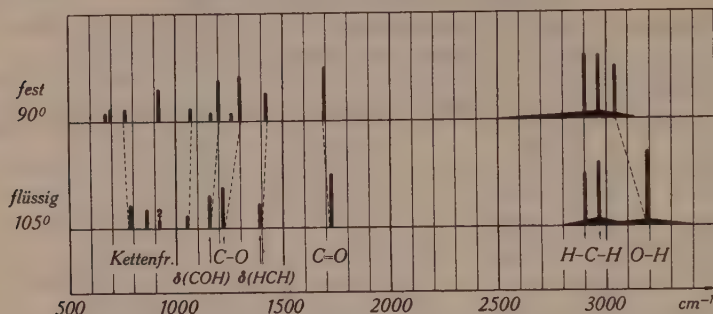


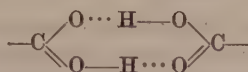
Fig. 9.

Ultrarotbanden der Glutarsäure $\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_3-\text{COOH}$ unter- und oberhalb des Schmelzpunktes.

Es fällt sofort auf, dass die beiden Spektren wesentlich voneinander abweichen (vergleiche auch Fig. 8). Es sind starke Änderungen in der Intensität einiger Banden und beträchtliche Frequenzverschiebungen festzustellen. Der zweite Effekt ist an beinahe allen Banden zu beobachten. Besonders auffallend ist die starke Verschiebung der Bande bei 3040 cm^{-1} nach 3190 cm^{-1} . Diese Frequenz ist in § 5 als verschobene O—H-Valenzschwingung gedeutet worden. Es ist nun anzunehmen, dass beim Schmelzen die Wasserstoffbindungen verschwinden oder stark gelockert werden. In der Tat muss die Verschiebung der O—H-Bande von 3040 cm^{-1} nach 3190 cm^{-1} beim Übergang fest \rightarrow flüssig in der Weise gedeutet werden, dass die Wasserstoffbrücke schwächer wird, jedoch nicht vollständig verschwindet. Bemerkenswert ist die starke Verbreiterung der Bande.

Das Unschärfwerden der O—H-Bande kann durch folgende Überlegung verstanden werden: Beim Schmelzprozess verschwinden die Wasserstoffbrücken, wie im vorhergehenden geschlossen wurde, nicht vollständig, sondern sie werden nur geschwächt. In der Flüssigkeit werden aber nicht Mehrfachmoleküle vorhanden sein, sondern die einzelnen Moleküle bilden ein „quasikristallines“ Gerüst, das natürlich zeitlich dauernden Veränderungen unterworfen ist. Die zwischenmolekularen Bindungskräfte sind also gewissermaßen um einen Mittelwert statistisch verteilt. Deshalb wird auch die Beeinflussung der Schwingungen nicht konstant sein, sondern um einen mittleren Wert schwanken. Das bewirkt die beobachtete Verbreiterung der Absorptionsbanden.

Auch die beiden Valenzschwingungsfrequenzen der $\text{O}-\text{C}=\text{O}$ -Gruppe sind merklich verschoben. Die $\text{C}=\text{O}$ -Bande wird beim Schmelzen um 30 cm^{-1} nach grösseren, die $\text{C}-\text{O}$ -Bande um 80 cm^{-1} nach kleineren Wellenzahlen verschoben. Beide sind in der Flüssigkeit unschärfer als im Kristall, was durch dieselbe Überlegung wie oben gedeutet werden kann. Die Verschiebungen sind derart, dass die beiden Banden im Festkörper näher beieinander liegen als in der Flüssigkeit, was auf grössere Symmetrie der OCO -Gruppe im Kristall schliessen lässt. Aus der Strukturformel ist zu ersehen, dass diese Annahme berechtigt ist, da die



Wasserstoffbrücken eine Vergrösserung der Symmetrie bewirken können. Aus der Verschiebung der $\text{C}=\text{O}$ -Bande folgt, dass die Bindungskonstante kleiner werden muss, dass sie sich also der Konstanten der $\text{C}-\text{O}$ -Bindung nähert. Die Lage der H -Atome wird infolge der Wasserstoffbrücken ebenfalls symmetrischer. HERMAN & HOFSTADTER (l. c.) haben Essigsäure (CH_3-COOH) gasförmig in monomerem und dimerem Zustand untersucht. Sie finden beim Übergang dimer \rightarrow monomer eine Verschiebung der OCO -Valenzschwingungsfrequenzen im gleichen Sinn wie hier beim Übergang fest \rightarrow flüssig. Die Differenzen betragen bei ihnen -16 cm^{-1} für die $\text{C}-\text{O}$ — und 31 cm^{-1} für die $\text{C}=\text{O}$ -Bande. Auch DAVIES & SUTHERLAND (l. c.) finden bei Monocarbonsäuren in Lösung denselben Effekt beim Übergang vom dimeren zum monomeren Zustand.

Im Spektrum der geschmolzenen Glutarsäure sind die Deformationsfrequenz $\delta(\text{COH})$ um -45 cm^{-1} und die $\delta(\text{HCH})$ -Frequenz um -30 cm^{-1} verschoben. Bemerkenswert ist, dass sich die beiden Valenzschwingungsfrequenzen der $\text{H}-\text{C}-\text{H}$ -Bindung als einzige nicht ändern. Auch im Gebiet der Kettenschwingungen werden beim Schmelzen sämtliche Frequenzen leicht verschoben. Bedeutend auffallender als diese Verschiebung ist jedoch hier die starke Änderung in der Intensität der Bande bei 922 cm^{-1} . An der Stelle der sehr intensiven und scharfen Bande im Kristall findet sich nach dem Schmelzen nur noch eine ganz schwache, unsicher festzustellende Bande bei 918 cm^{-1} . Dafür ist die Gesamtabsorption im ganzen Kettenschwingungsgebiet wesentlich stärker. In Tabelle 3 kommt dies deutlich zum Ausdruck. Im Kristall besitzt die Bande bei 922 cm^{-1} allein die Intensität $i = 5$. In der Flüssigkeit hingegen haben die drei Banden von 783 cm^{-1} bis

918 cm^{-1} zusammen gerade die Intensität $i = 5$. Bei 862 cm^{-1} tritt eine Bande neu auf, die vorher sehr wahrscheinlich durch die überaus starke bei 922 cm^{-1} verdeckt worden ist. Die Tatsache, dass die intensive Bande in der Flüssigkeit fast vollkommen verschwindet, bestätigt die Auffassung, dass es sich hier nicht um eine Gruppenschwingung handeln kann, sondern um Gerüst- oder Kettenschwingungen.

An Azelainsäure kann derselbe Effekt beobachtet werden. Auch bei ihr nimmt die Intensität der entsprechenden Bande bei 926 cm^{-1} äusserst stark ab.

Die Deutung dieser starken Intensitätsänderungen ist noch ziemlich unsicher. Eine Möglichkeit, wenigstens qualitativ diesen Effekt zu erklären besteht darin, ebenfalls eine äusserst starke Verbreiterung der Bande durch die Einwirkung der Wasserstoffbrücken anzunehmen. Diese Vorstellung entspricht dem experimentellen Befund, wonach an Stelle der scharfen und intensiven Bande bei 922 cm^{-1} im Kristall, in der Flüssigkeit ein stark verbreitertes aber weniger tiefes Absorptionsgebiet erscheint. Das Absorptionsmaximum ist ziemlich flach und nur noch unsicher feststellbar.

Dem früheren Vorsteher der Physikalischen Anstalt, Herrn Prof. Dr. A. HAGENBACH möchte ich an dieser Stelle für die bereitwillige Überlassung der Apparaturen und Herrn Prof. Dr. M. WEHRLI, auf dessen Anregung und unter dessen Leitung die vorliegende Arbeit entstanden ist, meinen verbindlichsten Dank aussprechen. Für manche nützliche Hinweise schulde ich den Herren Prof. Dr. E. MIESCHER und P. D. Dr. M. FIERZ besten Dank.

Basel, Physikalische Anstalt der Universität.

Zur Theorie der Kapillarschwingungen eines Flüssigkeitstropfens

von M. Fierz.

(9. VI. 1943.)

Es wird gezeigt, dass ein schwingender Flüssigkeitstropfen, dessen Zustand durch die Zahlen l, m charakterisiert ist, ein Impulsmoment um die z -Achse besitzt. Die bei grossem l geringe Ausstrahlung eines geladenen Tropfens muss daher auch als „Drehimpuls-Auswahlregel“ aufgefasst werden.

Im Hinblick auf die metastabilen Zustände schwerer Atomkerne hat S. FLÜGGE¹⁾ die Kapillarschwingungen eines geladenen Flüssigkeitstropfens untersucht. Insbesondere hat er die elektromagnetische Ausstrahlung eines Tropfens berechnet, der in einem, durch die „Quantenzahlen“ l, m charakterisierten Zustande schwingt. FLÜGGE hat stehende Wellen betrachtet. Deshalb besitzt der Tropfen in einem solchen Zustande kein Impulsmoment. So scheint es, als ob in diesem Falle die bei grossem l auftretende geringe Ausstrahlung nicht auf grosse Impulsmomentänderungen des Tropfens bei der Lichtemission zurückgeführt werden könne (l. c. S. 374 u. 385).

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass auch die metastabilen Zustände des Tröpfchenmodells mit grossen Änderungen des Impulsmoments zusammenhängen, da auch hier die Zahlen l, m bei sinngemässer Deutung das Impulsmoment des Zustandes beschreiben.

Um dies einzusehen, hat man an Stelle von stehenden Wellen um den Tropfen umlaufende Wellen zu betrachten. Dann hat nämlich der Tropfen, auch wenn er nicht als Ganzes rotiert, ein Impulsmoment.

1. Es soll gezeigt werden, dass eine Kapillarschwingung einer Flüssigkeitskugel, die durch die Zahlen l, m , die Frequenz ω und die Energie E charakterisiert ist, um die z -Achse ein Impulsmoment J_z besitzt, das den folgenden Wert hat:

$$J_z = m \frac{E}{\omega}$$

¹⁾ S. FLÜGGE, *Annalen d. Ph.* **39**, 373 (1941.)

Das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit leite sich aus einem Potential Φ ab, das der Gleichung

$$\Delta \Phi = 0 \quad (1)$$

genügt. Wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned} \Phi &= \beta_{l,m} r^l \mathfrak{P}_{l,m}(\cos \vartheta) \sin(m\varphi - \omega t) \\ &= \beta_{l,m} r^l \frac{1}{i\sqrt{2}} [Y_{l,m} e^{-i\omega t} - Y_{l,-m} e^{+i\omega t}] \end{aligned} \quad (2)$$

Die $Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ sind normierte Kugelfunktionen.

Entsprechend soll für die Oberfläche gelten

$$R(\vartheta, \varphi) - R_0 = \alpha_{l,m} \mathfrak{P}_{l,m}(\cos \vartheta) \cos(m\varphi - \omega t) \quad (3)$$

R_0 ist dabei der Kugelradius im Gleichgewichtszustand.

Wir nehmen an, dass

$$|\alpha_{l,m}| \ll R_0$$

was zur Folge hat, dass jeweils nur die niedrigste Potenz der $\alpha_{l,m}$ in den Formeln berücksichtigt werden muss.

Unsere Ansätze unterscheiden sich von denen bei FLÜGGE (l.c.) dadurch, dass wir umlaufende Wellen verwenden, und unsere Funktionen auf 1 normiert sind:

$$\int \mathfrak{P}_{l,m}^2(\vartheta) \sin^2(m\varphi - \omega t) d\sigma = 1$$

Aus der Bedeutung von Φ folgt

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{\partial R}{\partial t}; \quad \beta_{l,m} = \frac{\omega \alpha_{l,m}}{l R_0^{l-1}} \quad (4)$$

Um die Energie der Schwingungen zu berechnen, genügt es, die kinetische Energie anzugeben. Denn da die Bewegung harmonisch ist, ist die Gesamtenergie gleich der doppelten kinetischen Energie. Daher gilt:

$$E = 2 E_{\text{kin}} = \varrho \int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right)^2 d\tau = \varrho \int \text{div}(\Phi \cdot \text{grad } \Phi) d\tau \quad (5)$$

Dabei ist ϱ die Massendichte:

$$\varrho = \frac{3M}{4\pi R_0^3}.$$

Die Energie kann mit Hilfe des Gauss'schen Satzes in ein Oberflächenintegral verwandelt werden und man erhält unter Berücksichtigung von (2) und (4)

$$E = \varrho R_0^3 \alpha_{l,m}^2 \frac{\omega^2}{l} = \frac{3}{4\pi} M \frac{\omega^2}{l} \alpha_{l,m}^2. \quad (6)$$

Nun berechnen wir das Impulsmoment J_z :

$$\begin{aligned} J_z &= \varrho \int \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) d\tau = \varrho \int \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} d\tau \\ &= m \varrho \beta_{l,m} \int r^l \mathfrak{P}_{l,m}(\cos \vartheta) \cos(m\varphi - \omega t) d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

Man hat hier zu beachten, dass das Integral über das durch die Fläche $r = R(\vartheta, \varphi)$ begrenzte Volumen zu erstrecken ist. Wir integrieren daher zuerst über r :

$$J_z = m \varrho \beta_{l,m} \int d\sigma \frac{R^{l+3}(\vartheta, \varphi)}{l+3} \mathfrak{P}_{l,m}(\cos \vartheta) \cos(m\varphi - \omega t) \quad (8)$$

Setzen wir aus (3) den Wert für $R(\vartheta, \varphi)$ in (8) ein, und nehmen nur lineare Terme in $\alpha_{l,m}$ mit, so folgt

$$J_z = m \varrho \beta_{l,m} \alpha_{l,m} R_0^{l+2} = \frac{m \omega}{l} \varrho \alpha_{l,m}^2 R_0^3. \quad (9)$$

Durch Vergleich mit (6) folgt die Behauptung

$$J_z = m \frac{E}{\omega}.$$

2. Der Tropfen besitzt, falls er elektrisch geladen ist, mit dem Impulsmoment J_z auch ein magnetisches Moment μ_z . Die Ladung habe den Wert eZ und sei gleichmässig über das Volumen verteilt. Dann wird das erzeugte magnetische Feld durch das Vektorpotential

$$A(\vec{r}_a) = \frac{Ze\varrho}{Mc} \int d\tau \frac{\text{grad } \Phi(\vec{r})}{|\vec{r}_a - \vec{r}|} \quad (10)$$

gegeben. Der Term proportional $1/r_a^2$ bestimmt das Dipolmoment. Wir entwickeln den Nenner in (10) bis zu Termen $1/r_a^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_a^2 - 2(\vec{r} \cdot \vec{r}_a)}} \sim \frac{1}{r_a} \left(1 + \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_a)}{r_a^2} \right) \quad (11)$$

Das Vektorpotential des Dipolmoments wird daher durch den Ausdruck

$$\vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}_a) = \frac{Ze\varrho}{Mc} \frac{1}{r_a^3} \int (\vec{r}_a \cdot \vec{r}) \text{grad } \Phi(\vec{r}) d\tau \quad (12)$$

dargestellt. Andererseits hat das Vektorpotential eines Dipols die Form

$$\vec{A} = \frac{[\vec{\mu} \vec{r}]}{r^3}. \quad (13)$$

Da $\vec{\mu}$ in die z -Richtung orientiert ist, hat A_y an der Stelle (a): $r_x = r_a, r_y = r_z = 0$ den Wert

$$A_y^{(a)} = \frac{\mu_z}{r_a^2}. \quad (14)$$

Entsprechend hat A_x an der Stelle (b): $r_y = r_a, r_x = r_z = 0$ den Wert

$$A_x^{(b)} = -\frac{\mu_z}{r_a^2}. \quad (15)$$

Also gilt

$$\frac{r_a^2}{2} (A_y^{(a)} - A_x^{(b)}) = \mu_z. \quad (16)$$

Betrachtet man nun aber gemäss (12) $\vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}_a)$ an den Stellen (a) und (b) und bildet die Grösse (16), so folgt

$$\mu_z = \frac{Ze\varrho}{2Mc} \int d\tau \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right). \quad (17)$$

Daraus folgt durch Vergleich mit (7)

$$\mu_z = \frac{Ze}{2Mc} J_z. \quad (18)$$

3. Zum Schluss möchten wir, der Vollständigkeit halber, die Ausstrahlung des schwingenden Tropfens berechnen. Diese Rechnung hat FLÜGGE schon durchgeführt, so dass wir prinzipiell nichts Neues bieten können. Allerdings kann die Rechnung durch Verwendung normierter Kugelfunktionen wesentlich vereinfacht werden. Dadurch ist es auch möglich, einen Rechenfehler, der FLÜGGE unterlaufen ist, richtig zu stellen.

Die Energieausstrahlung S des Tropfens im Zustande l, m ist gegeben durch den Mittelwert von

$$\frac{1}{c^3 R^2} [\vec{R} \mathfrak{A}]^2$$

über die Kugeloberfläche. Dabei ist

$$\mathfrak{A}(\Theta, \Phi) = \frac{Ze\varrho}{M} \int d\tau \vec{v}_{\text{ret}}.$$

(Siehe FLÜGGE, l. c. Formel (28), (31).)

Gemäss (2) gilt

$$\mathfrak{A}(\Theta, \Phi) = -\beta_{l,m} \frac{\omega \cdot Ze\varrho}{M} \int d\tau \text{grad} \left[r^i \mathfrak{P}_{l,m}(\cos \vartheta) \cos \left(m\varphi - \omega \left[t - \frac{r}{c} \cos \vartheta' \right] \right) \right] \quad (19)$$

ϑ' ist der Winkel zwischen den Richtungen ϑ, φ und Θ, Φ . Indem wir die $\mathfrak{P}_{l,m}$ durch die $Y_{l,m}$ ausdrücken, gilt, mit $\omega/c = k$

$$\mathfrak{A}(\Theta, \Phi) = -\frac{\beta_{l,m}}{\sqrt{2}} \frac{Ze\rho}{M} \int \text{grad} [Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) e^{-i\omega t + ikr \cos \vartheta'} + Y_{l,-m}(\vartheta, \varphi) e^{i\omega t - ikr \cos \vartheta'}] dt \quad (20)$$

Wir betrachten im Integral den Term $\sim e^{-i\omega t}$ und entwickeln $e^{i\omega t \cos \vartheta'}$ in bekannter Weise nach Kugelwellen unter der Annahme $\rho = kr \ll 1$:

$$e^{i\omega t \cos \vartheta'} \sim \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{2^l l!}{(2l)!} i^l \rho^l Y_{l,m}(\Theta, \Phi) Y_{l,m}^*(\vartheta, \varphi).$$

Nun ist das folgende Integral zu berechnen:

$$j_{\alpha}^{l,m} = \int \left\{ \frac{d}{dx_{\alpha}} [r^l Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)] \sum_{n,l} \frac{4\pi}{(n+1)!} 2^n n! i^n (kr)^n Y_{n,l}^*(\vartheta, \varphi) Y_{n,l}(\Theta, \Phi) \right\} d\tau \quad (21)$$

$r^l Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ ist ein harmonisches Polynom vom Grade l . Durch die Differentiation erhält man ein solches vom Grade $l-1$:

$$\frac{d}{dx_{\alpha}} (r^l Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)) = \sum_{m'} g_{m,m'}^{\alpha,l} Y_{l-1,m'}(\vartheta, \varphi), \quad r^{l-1}. \quad (22)$$

Die Koeffizienten $g_{m,m'}^{\alpha,l}$ sind leicht anzugeben. Wir brauchen sie jedoch nicht explizit.

Wegen der Orthogonalität der $Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ ergibt die Integration

$$j_{\alpha}^{l,m} = \frac{4\pi}{(2l+1)!} 2^l l! (ik)^{l-1} R^{2l+1} \sum_{m'} g_{m,m'}^{\alpha,l} Y_{l-1,m'}(\Theta, \Phi). \quad (23)$$

Beachtet man nun (22), so folgt

$$j_{\alpha}^{l,m} = \frac{4\pi}{(2l+1)!} 2^l l! (ik)^{l-1} R^{l+2} \frac{d}{dX_{\alpha}} [R^l Y_{l,m}(\Theta, \Phi)].$$

Also ist, da $4\pi/3 R^3 \rho = M$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A}_{\alpha}(\Theta, \Phi) &= 3 \frac{\beta_{l,m}}{\sqrt{2}} Ze\omega \frac{2^l l!}{(2l+1)!} (ikR)^{l-1} \\ &\cdot \frac{d}{dX_{\alpha}} [R^l (Y_{l,m}(\Theta, \Phi) e^{-i\omega t} + (-1)^{l-1} e^{i\omega t} Y_{l,-m}(\Theta, \Phi))] \\ &= 3 Ze\omega \beta_{l,m} \frac{2^l l!}{(2l+1)!} (ikR)^{l-1} \frac{d}{dX_{\alpha}} \\ &\quad [R^l \mathfrak{P}_{l,m}(\cos \Theta) \cos(m\varphi - \omega t + \delta_l)] \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Nun haben wir noch den Mittelwert $\overline{\frac{[\tilde{R}\mathfrak{A}]}{R^2}}$ zu bilden. \mathfrak{A} ist ein Gradient im Raume der Koordinaten R, Θ, Φ und man hat das Quadrat seiner Komponenten $\perp \tilde{R}$ zu ermitteln. Wir haben also zu bilden

$$\frac{1}{4\pi} \int d\sigma (\mathfrak{A}_\vartheta^2 + \mathfrak{A}_\varphi^2) = \frac{\text{const.}}{4\pi} \int d\sigma \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{P}_{l,m}(\cos \vartheta) \cdot \cos m\varphi}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_{l,m}(\cos \vartheta) \cos m\varphi}{\partial \varphi} \right)^2 \right]. \quad (25)$$

Da nun $\mathfrak{P}_{l,m}(\cos \vartheta) \cos(m\varphi)$ eine normierte Kugelfunktion darstellt, hat der Mittelwert den Wert $1/4\pi l(l+1) \cdot \text{const.}$ Somit erhalten wir

$$S = \frac{(3Ze)^2}{4\pi c^3} \omega^2 \beta_{l,m}^2 \frac{2^{2l} l!^2}{(2l+1)!^2} l(l+1) (kR)^{2l-2} \cdot R^{2l-2} \\ = \frac{(3Ze)^2}{4\pi c^3} \cdot \omega^4 \alpha_{l,m}^2 \frac{2^{2l} l!^2 (l+1)}{(2l+1)!^2 l} (kR)^{2l-2}. \quad (26)$$

Die „Übergangswahrscheinlichkeit“ $w = S/E$ wird daher, indem wir (4) beachten

$$\frac{S}{E} = \frac{3(Ze)^2}{Mc^3} (kR)^{2l-2} \omega^2 \frac{2^{2l} l!^2 (l+1)}{(2l+1)!^2}. \quad (27)$$

Die Ausstrahlung ist also unabhängig von m . Der Faktor $\frac{(l+m)!}{(l-m)!}$ bei FLÜGGE (l. c.), durch den sich seine Formel von der hier abgeleiteten unterscheidet, beruht auf einem Irrtum.

Man kann diese Theorie der Kapillarschwingungen eines Tropfens quantisieren, indem man die Amplituden $\alpha_{l,m}$ als Operatoren auffasst. Dabei hat man das Spektrum, ähnlich wie in der Debye'schen Theorie der spezifischen Wärme, bei einem gewissen Wert von $l \sim A^{1/3}$ abzuschneiden, wenn A die Teilchenzahl im Kern bedeutet. Eine solche Theorie führt bezüglich der Energieausstrahlung zu den gleichen Resultaten wie die klassische Behandlungsweise. Das Quadrat des Impulsmomentes im einfach angeregten Zustande l, m ist dann ebenfalls quantisiert und hat den Wert $\hbar l(l+1)$.

Basel, Physikalische Anstalt der Universität.

Photodissoziation zweiatomarer Moleküle in Ionen bei Einstrahlung zwischen 2200 AE und 1700 AE

von Walter Hälg.

(31. V. 1943.)

Inhalt. Durch ultraviolette Licht verschiedener Funken werden im Wellenlängenbereich zwischen 2200 AE und 1700 AE die Dämpfe von InJ, InBr, InCl, GaJ, GaBr und GaCl in Indium- resp. Gallium-Ionen und Halogenionen zerlegt. Die Zahl der gebildeten Ionen kann als Funktion der Wellenlänge des eingestrahnten Lichtes gemessen werden. Für jedes Molekül ergibt sich ein enger wirksamer Spektralbereich mit einem Maximum der Anregungsfunktion bei λ_{\max} und einer bestimmten langwelligen Grenze λ_g , welche sich auch bei Vergrößerung der Dampftemperaturen nicht überschreiten lässt. Mit Hilfe der experimentellen Ergebnisse wird für den Fall, dass das Molekül AB in die Ionen A^+ und B^- dissoziiert eine Darstellung des Verlaufs der potentiellen Energie als Funktion des Kernabstandes gegeben, für InJ die Kurve zahlenmässig errechnet und mit den übrigen bekannten Molekülzuständen verglichen. Durch Messung der eingestrahnten Lichtenergie ergibt sich als Abschätzung für den Wirkungsquerschnitt des Übergangs vom Grundzustand in diese Ionenkurve 10^{-17} cm^2 . Beobachtungen von Ionisation und Fluoreszenz zeigen, dass es sich beim betrachteten Prozess um einen erlaubten, direkten optischen Übergang handelt.

1. Einleitung.

TERENIN und POPOV¹⁾ fanden 1932 bei der Bestrahlung von TIJ-, TIBr- und TICI-Dämpfen mit ultravioletter Licht der Frequenz ν einen Photoeffekt, den sie nicht als Abspaltung von Elektronen erklären konnten. Eine massenspektrographische Untersuchung der entstehenden Produkte lieferte den Beweis für das Auftreten von Ionen, so dass die Autoren den folgenden Prozess annehmen mussten:



Durch Lichtabsorption findet ein Übergang vom Grundzustand des Moleküls in das kontinuierliche Gebiet eines angeregten Zustandes statt. Die Dissoziationsprodukte dieses angeregten Molekülzustandes sind Ionen, welche sich durch Strommessung nachweisen lassen.

¹⁾ A. TERENIN und B. POPOV, ZS. f. Phys. **75**, 338 (1932); Phys. ZS. d. Sowjetunion **1**, 307 (1932); Phys. ZS. d. Sowjetunion **2**, 299 (1932).

Da bis heute keine weiteren Versuche über diesen Effekt vorzuliegen scheinen, war es erwünscht, sein Vorhandensein zu bestätigen und, wenn möglich, auch an weiteren Molekülen aufzufinden¹⁾. Ferner schien es interessant, die Versuchsmethodik derart zu erweitern, dass auch Messungen bei Einstrahlung im Vakuumultraviolett ausgeführt werden konnten.

Experimentelles.

2. Substanzen.

Zur Untersuchung gelangten die in unserem Institut schon mehrfach bearbeiteten zweiatomaren Halogenide des Indiums und des Galliums. Die chemische und spektroskopische Verwandtschaft von In und Ga mit Tl, welche aus der Stellung dieser Elemente im Periodischen System hervorgeht, lässt erwarten, dass der gesuchte Effekt bei diesen Salzen ebenfalls auffindbar sein wird.

Die zur Füllung der Absorptionsrohre benötigten Substanzen wurden selbst hergestellt. Das einwertige Jodid von In und Ga erhält man am einfachsten durch Erhitzen von Jod im Vakuum mit einem Überschuss an Metall. Bromid und Chlorid lassen sich ebenfalls nach bekannten Methoden, welche bereits von MIESCHER und WEHRLI²⁾ später von WENK³⁾ benutzt worden sind, darstellen. Vor dem Einfüllen in das Absorptionsrohr wurden die Salze durch mehrmaliges Destillieren im Hochvakuum gereinigt. Die Bildung des zweiatomaren Halogenids wird durch einen Zusatz von reinem Metall begünstigt. Bei der Füllung selbst ist darauf zu achten, dass die äusserst hygroskopischen Substanzen nur kurzzeitig mit der Luft in Verbindung treten können. Die bei den Resultaten angegebenen Dampfdrucke der In-Halogenide sind den Kurven von ROBERT⁴⁾ entnommen. Für die zweiatomaren Halogenide des Galliums fehlen bis jetzt entsprechende Dampfdruckmessungen, so dass bei den Versuchen die genauen Dichten nicht angegeben werden können. Aus der Übereinstimmung der Ionenströme bei In- und Ga-Halogenid kann aber roh auf eine Übereinstimmung der Dampfdrucke geschlossen werden.

¹⁾ Über einen Teil dieser Arbeit ist eine vorläufige Mitteilung erschienen: M. WEHRLI und W. HÄLG, H.P.A. **15**, 315 (1942).

²⁾ M. WEHRLI und E. MIESCHER, H.P.A. **7**, 298 (1934); E. MIESCHER und M. WEHRLI, H.P.A. **7**, 331 (1934).

³⁾ W. WENK, H.P.A. **14**, 355 (1941).

⁴⁾ C. ROBERT, H.P.A. **9**, 405 (1936).

3. Apparatur.

Aus Fig. 1 ist der Aufbau der Apparatur ersichtlich. Der Teil *R*, der eigentliche Absorptionsraum, ist aus Quarzglas hergestellt. Die Lichteinstrahlung geschieht durch ein 1 mm dickes Quarzfenster *Q*. In den Absorptionsraum werden die beiden Elektroden zur Messung des Ionenstromes eingeführt. Hierzu eignen sich lange Wolframdrähte von 1 mm Durchmesser besonders gut, da diese von den Halogenen viel weniger angegriffen werden, als die von TERENIN und POPOV verwendeten Nickelelektroden. Da das ganze

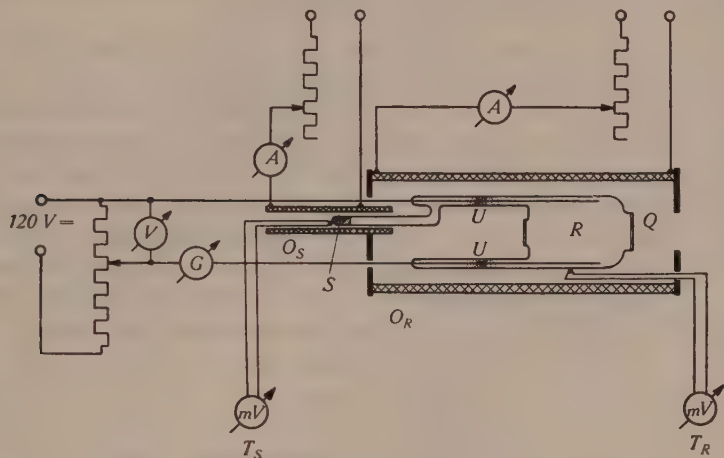


Fig. 1.

Messanordnung

O_S , O_R = Oefen; S = Substanz; R = Absorptionsraum; Q = Quarzfenster;
 G = Galvanometer; T_S = Substanztemperatur; T_R = Rohrtemperatur;
 U = Übergang Quarz-Pyrex.

Rohr im Betrieb, im Gegensatz zur Anordnung der genannten Autoren, von der Pumpe abgeschmolzen ist, müssen heizbare, hochvakuumdichte Glas-Metalleinführungen hergestellt werden. Die Wolframdrähte werden dazu in Pyrex eingeschmolzen und dieses wird durch käufliche Übergangsgläser U mit dem Quarzteil der Apparatur verbunden. Der Ansatz für die Substanz S ist ebenfalls aus Pyrex hergestellt. Eines der verwendeten Absorptionsrohre (vgl. Fig. 1) enthält noch ein zweites Quarzfenster, damit auch die durch den Dampf hindurchgegangene Strahlung untersucht werden kann. Die Rohre werden zur Entgasung während 4—5 Stunden an der Hochvakuumpumpe bis nahe an die Transformationstemperatur des Pyrex (550° C) erhitzt. Nach dem Abkühlen destilliert man die Substanz aus einem Füllansatz ein und schmilzt den Ansatz ab.

worauf das Rohr ebenfalls von der Pumpe abgetrennt wird. Beim Betrieb des Absorptionsrohres wird die Substanz durch den Ofen O_S , der Dampf in R durch O_R auf den gewünschten Temperaturen T_S und T_R gehalten, deren Messung mit zwei Kupfer-Konstantan-Thermoelementen geschieht. Diese Anordnung erlaubt Dampfdichte und Besetzungszahl der Schwingungsniveaus unabhängig voneinander zu verändern. An den Elektroden des Absorptionsrohres liegt eine Gleichspannung, welche zwischen 0 und 120 V variiert und mit einem Präzisionsvoltmeter V gemessen werden kann. Zur Messung des Ionenstromes wird ein Galvanometer G mit einer Empfindlichkeit von $1,8 \cdot 10^{-9} \text{ A mm}^{-1} \text{ m}^{-1}$ verwendet.

Als Lichtquelle für die optische Anregung der zu untersuchenden Halogenide dienen kondensierte Funken mit verschiedenen Elektroden. Dabei soll der Wellenlängenbereich 1600 ÅE bis 2200 ÅE stufenweise überdeckt werden können. Je nach Spektralbereich erweisen sich die Metalle Cd, Zn, Al, Ni, Ca und Mn als günstig. Die Speisung des Funkens erfolgt mittels eines Hochspannungstransformators¹⁾ 190 V/15 kV, dessen maximale Leistung 1 kVA beträgt. Vier „Minosflaschen“ mit einer Kapazität von je 4000 cm dienen als Kondensator. Da beim Betrieb eines Funkens immer störende Schwingungen auftreten, wird der ganze elektrische Teil in einen Faradaykäfig eingebaut. Dieser Käfig besteht aus einem gewöhnlichen verzinnnten Eisengitter, mit einer Maschenweite von ca. 1 cm. Drosselspulen, welche in die Netzzuleitungen, besonders aber in die Erdleitung eingeschaltet sind, verhindern ein Ausbreiten der Schwingungen²⁾. Die Abschätzung des Spektralbereiches maximaler Anregung erfolgt durch integrale Einstrahlung des Funkenlichtes der verschiedenen Metalle. Durch Verwendung von Filtern³⁾ ist es möglich, den aktiven Bereich schon ziemlich eng abzugrenzen. Um den exakten Gang der Anregung als Funktion der Frequenz zu erhalten, wird mit spektral zerlegtem Licht eingestrahlt.

a) Monochromator (3000 ÅE – 1860 ÅE).

Die Zerlegung des Funkenlichtes geschieht durch einen selbstverfertigten lichtstarken Quarzmonochromator. Direkt vor dem Funken im Abstand 1 cm ist ein 0,8 mm breiter Eintrittsspalt angebracht. Das Licht wird durch eine Quarzlinse konvergent gemacht und mit einem 60°-Quarzprisma von 6,6 cm Basislänge spektral

¹⁾ Streutransformator der Firma E. Schwob, Basel.

²⁾ Kontrollmessungen mit den Organen des Telephonamtes Basel haben das befriedigende Arbeiten der getroffenen Anordnung bewiesen.

³⁾ Vgl. W. WENK, l. c.

zerlegt. In der Bildebene der Linse liegt der Austrittsspalt des Monochromators. Zur genauen Einstellung der ultravioletten Linien ist auf der Vorderseite dieses Spaltes eine fluoreszierende Schicht von Uranylfluorid-Fluorammonium angebracht. Ohne weitere Linse gelangt der Lichtstrahl nun direkt in das Absorptionsrohr. Diese Anordnung ist besonders lichtstark, da man bei Verwendung von nur einer Linse mit einer minimalen Zahl von Reflexionsflächen auskommt. Der Nachteil der unscharfen Abbildung der Linien spielt bei der Einstrahlung ins Absorptionsrohr keine Rolle.

b) Schumannapparatur.

Für den Spektralbereich unterhalb 1860 AE ist der ganze Lichtweg ins Vakuum zu verlegen, und die Quarzoptik wegen der starken Absorption durch Flusspat zu ersetzen. Versuche zur Einstrahlung der einzelnen Spektrallinien mittels eines Flusspatmonochromators haben gezeigt, dass die erreichbare Intensität mit den im Institut vorhandenen Flusspatoptiken leider sehr ungenügend ist. Es kann daher nur die integrale Methode verwendet werden. Durch ein später zu beschreibendes Verfahren ist es aber trotzdem möglich die Anregungsfunktion angenähert anzugeben.

Fig. 2 zeigt schematisch die verwendete Schumannapparatur.

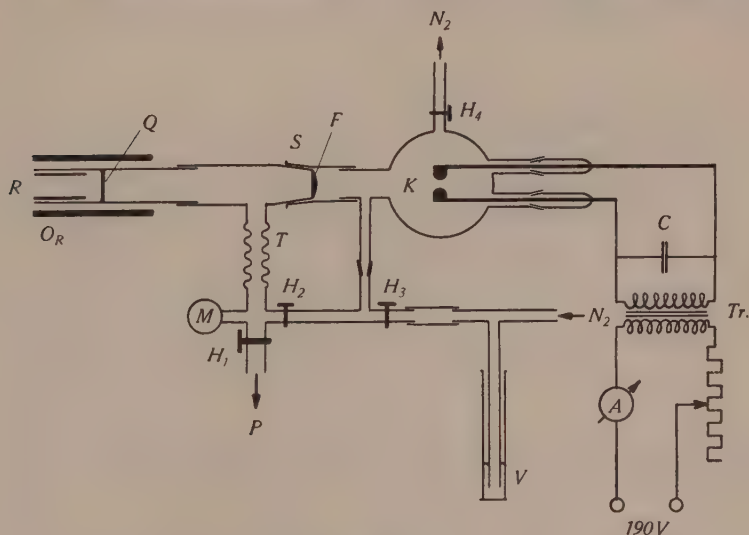


Fig. 2.

Schumannapparatur.

K = Funke; H_1, H_2, H_3, H_4 = Hähne; P = Pumpe; M = Manometer; V = Überdruckventil; T = Tombakschlauch; S = Metallschliff; F = Flusspatlinse; Q = Quarzfenster.

Im Ofen O_R befindet sich das Absorptionsrohr R , welches durch ein 1 mm dünnes Quarzfenster abgeschlossen wird. Die Verlängerung des Rohres ist an einen Metallschliff S gekittet, dessen Kern eine Flußspatlinse F von 2 cm Durchmesser trägt. Durch den Tombakschlauch T kann dieser Apparaturteil evakuiert werden. Ein Dreh-Macleod-Manometer M gestattet die Kontrolle des Druckes. Als Pumpe P dient eine Gaede-Duplexpumpe mit einer Pumpgeschwindigkeit von $2 \text{ m}^3/\text{h}$. Bei den Messungen beträgt der Druck 10^{-3} bis 10^{-4} mm Hg. An der Hülse des Metallschliffes S ist der Funkenkolben K aus Pyrex befestigt. Durch weitere Schlitze lassen sich die Elektroden in kürzester Zeit auswechseln. Die elektrische Anordnung zum Betrieb des Funkens ist dieselbe wie oben. Der Funkenteil wird dauernd von Reinstickstoff¹⁾ unter Atmosphärendruck durchströmt. Oberhalb 1600 AE zeigt dieser Stickstoff nur eine unmerkliche Absorption. Er strömt aus der Stahlflasche durch das Überdruckventil V in den Pyrexkolben und passiert nach dem Austritt noch eine Waschflasche mit konzentrierter Schwefelsäure. Anhand der Blasen kann die Strömung beobachtet und reguliert werden. Die Hähne H_1 bis H_4 ermöglichen die Evakuierung der ganzen Apparatur. Ein weiterer, leicht auswechselbarer Ansatz an der Hauptleitung wird mit dem Trocknungsmittel Phosphorpentoxyd gefüllt.

4. Intensitätsmessungen.

Um die Anregungsfunktion, d. h. den Ionenstrom als Funktion der eingestrahlten Lichtwellenlänge richtig angeben zu können, ist es notwendig, die Intensitäten der verwendeten Spektrallinien auf ein und dieselbe Grundeinheit zu reduzieren. Das bedeutet aber, dass die Relativintensitäten aller Linien bekannt sein müssen. Im Gebiet oberhalb 1860 AE kann diese Messung in Verbindung mit dem oben beschriebenen Monochromator durchgeführt werden. Es wird dabei direkt hinter den Austrittsspalt eine Moll'sche Mikrothermosäule²⁾ aufgestellt. Ein äußerst empfindliches Messinstrument mit kleinem Innenwiderstand misst die entstehende Thermospannung. Verwendet wird ein Drehmagnetgalvanometer nach BROCA, dessen Empfindlichkeit sich nach Kompensation des Erdfeldes, durch sorgfältige Panzerung und Einstellung eines Hilfsmagneten, auf $1,3 \cdot 10^{-8} \text{ V mm}^{-1} \text{ m}^{-1}$ steigern lässt. Die Relativintensitäten der Linien im Schumanngebiet erhält man auf photographischem Wege. Mit einem Flußspat-Vakuum-Spektrographen

¹⁾ Stickstoff, wie ihn die Glühlampenindustrie verwendet.

²⁾ Der Firma Kipp & Zonen, Delft (Holland).

von SCHMIDT-OTT¹⁾ werden die Spektren der Funken aufgenommen. Eine mit Natriumsalizylat sensibilisierte Platte (Lumière extra rapide) ist bis 1400 ÅE brauchbar. In den Strahlengang wird ein 1 mm dickes Quarzfenster gebracht, welches genau dem Eintrittsfenster des Absorptionsrohres entspricht. Durch Photometrieren der so erhaltenen Spektren gelangt man schliesslich zu den Relativintensitäten der Funkenlinien. Um den bei der Lichtabsorption in den Dämpfen entstehenden Photostrom mit demjenigen der üblichen Photozellen vergleichen zu können, werden mit der Thermosäule auch noch die absoluten Intensitäten der integralen Funken gemessen. Dies geschieht durch Anbringen der Säule am Orte des Absorptionsrohres, was sowohl bei den Messungen in Luft wie auch im Vakuum gut möglich ist. Die Resultate aller Intensitätsmessungen sind bei den Ergebnissen zusammengestellt.

Ergebnisse

5. Vorversuche.

a) Ionenstrommessungen (allgemeine Erscheinungen).

Um das einwandfreie Arbeiten der Apparatur zu kontrollieren, wurde zunächst ein Rohr mit TlJ gefüllt und der Dampf mit dem integralen Licht verschiedener Funken bestrahlt. Die gemessenen Photoströme stimmen gut mit den Angaben von TEREININ und POPOV überein. In ein weiteres Rohr wurden zwei Elektroden verschiedener Oberfläche, Verhältnis 1 : 16, eingeführt. Durch diese Anordnung lässt sich beweisen, dass der gefundene Photostrom nicht durch einen gewöhnlichen Photoeffekt an den Elektroden (Abspaltung von Elektronen) hervorgerufen wird. Bei einem solchen Photoeffekt wäre nämlich die Grösse des Stromes von der bestrahlten Oberfläche abhängig. Ändert man die Polarität der Elektrodenspannung, so müsste also eine wesentliche Änderung des Photostroms auftreten. Die Versuche ergeben, sowohl bei TlJ als auch bei InJ, denselben Strom, auch wenn die Elektroden direkt beleuchtet werden.

Alle untersuchten Halogenide des In und Ga zeigen analoges Verhalten des Photostromes bei Veränderung der Elektrodenspannung.

Aus Fig. 3a erkennt man, dass bei 80 V die Sättigung des Stromes praktisch erreicht ist. Alle weiteren Messungen werden daher bei einer Elektrodenspannung von 100 V durchgeführt. Auch

¹⁾ H. D. SCHMIDT-OTT, ZS. f. Phys. **69**, 724 (1931).

die Abhängigkeit des Ionenstromes von der Dichte des Dampfes ist bei allen untersuchten Salzen ähnlich. Der Strom ist bei 10^{-4} mm Hg schon gut nachweisbar und nimmt dann mit wachsendem Druck proportional zu diesem zu. Nachdem zwischen 0,1 und 1 mm Hg der Ionenstrom sein Maximum erreicht hat, bringt eine weitere Vergrößerung der Dichte wieder eine Stromabnahme mit sich. Bei hohen Drucken¹⁾ macht sich ein zeitlich unregelmässiger Thermostrom bemerkbar, der auch ohne Belichtung des Dampfes erscheint.

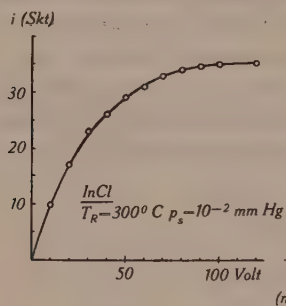


Fig. 3a.

Ionenstrom als Funktion der Elektrodenspannung.

i = Ionenstrom (1 Skt = $5,7 \cdot 10^{-9}$ A); p_s = Dampfdruck; T_R = Rohrtemperatur.

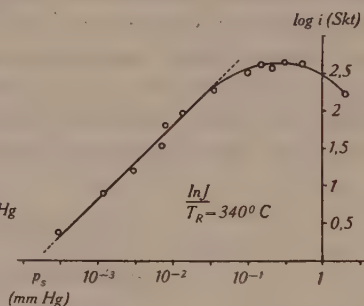


Fig. 3b.

Ionenstrom als Funktion des Dampfdruckes.

In Fig. 3b ist für InJ der Logarithmus des Ionenstromes i als Funktion des logarithmisch aufgetragenen Dampfdruckes p_s dargestellt. Einer linearen Abhängigkeit von Strom und Druck entspricht in dieser Darstellung, bei Verwendung gleicher Einheiten auf beiden Koordinatenachsen, eine Gerade mit dem Neigungswinkel 45° . Aus der Figur ist ersichtlich, dass zwischen 10^{-3} und 10^{-1} mm Hg eine solche lineare Abhängigkeit des Ionenstromes von der Dichte des Dampfes herrscht. Wie dieser lineare Gang zeigt, handelt es sich bei der Ionenbildung also nicht um einen sekundären Stossprozess. Ausserdem wären Zusammenstösse im Gas bei 10^{-4} mm Hg noch recht selten, der Photostrom ist aber dort schon gut beobachtbar.

b) Relativintensitäten der Spektrallinien.

Tabelle 1 gibt die Relativintensitäten J der stärksten Funkenlinien. Diese sind oberhalb 1860 AE mit der Thermosäule gemessen und für das Schumanngebiet aus den Photometerkurven ermittelt.

¹⁾ Ca. 50 mm Hg.

Tabelle 1.

Relativintensitäten der stärksten Funkenlinien.

Funke											
Cd		Al			Zn			Ni		Ca	
λ	J Th	λ	J Th	J Ph	λ	J Th	J Ph	λ	J Ph	λ	J Ph
2315	10,6	1990	2	1,9	2138	4					
2270	8	1940	2	2,2	2100	14,6					
2195	6,6	1860	4	4,0	2062	9,4		Al 1860	0,4	Al 1860	0,3
2145	9,4	1828		0,3	2025	4		1830	0,3	1840	1,6
		1768		0,5				1820	0,3	1810	0,3
		1764		1,8				1788	0,3		
		Zn 1750		1,0	1750		0,8	Zn 1750	0,6	Zn 1750	1
		1725		0,5	1720		0,1	1715	0,2		
		1720		0,7	1707		0,1				
		1670		0,4	1689		0,1				
					1673		0,3				

 λ = Wellenlänge der Funkenlinien (AE)

J = Relativintensitäten

Th = mit Thermosäule gemessen

Ph = photometrisch bestimmt

Die Intensitäten aus den Photometerkurven können untereinander direkt verglichen werden, da der Spektralbereich, dem die untersuchten Linien angehören, genügend klein ist. Die ausgewerteten Funken sind alle auf ein und derselben Platte photographiert. Um die Relativwerte an die Skala der Messungen oberhalb 1860AE anzuschliessen, wurden die Intensitäten der Al-Linien nach beiden Methoden bestimmt, wobei der Linie 1860 AE in beiden Messreihen ein Intensitätswert 4 zugeordnet wurde. Die Linien 1940 und 1990 zeigen eine gute Übereinstimmung der beiden Messverfahren. Alle untersuchten Funken enthalten bei 1750 AE eine stärkere Linie, welche als Verunreinigung des Elektrodenmaterials durch Zn erkannt wird. Diese Linie ist in der Tabelle ebenfalls mitberücksichtigt.

6. Ionenströme bei integraler Einstrahlung.

Bei allen Halogeniden des In und Ga wurde der Ionenstrom bei integraler Einstrahlung mit verschiedenen Funken gemessen. Für InJ, InBr und GaJ konnten die Messungen in Luft ausgeführt werden; bei InCl und GaBr waren zudem noch ergänzende Arbeiten mit der Vakuumapparatur nötig. GaCl zeigte nur im Schumanngebiet einen Ionenstrom.

In Tabelle 2 sind die Ionenströme von InJ bei integraler Einstrahlung mit verschiedenen Funken zusammengestellt.

Tabelle 2.

Ionenstrom für InJ bei verschiedenen Funken integraler Einstrahlung.

Dampftemperatur . . $T_R = 300^\circ \text{C}$

Substanztemperatur . $T_S = 265^\circ \text{C}$

Dampfdruck. . . . $p_s = 8 \cdot 10^{-2} \text{ mm Hg}$

Funke	Cd	Cu	Fe	Al	Mg	Zn
Ionenstrom i (A) .	$5,6 \cdot 10^{-8}$	$1,8 \cdot 10^{-7}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$	$5,1 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-6}$

Bei InJ gibt also der Zn-Funke einen maximalen Strom von 10^{-6} A.

Tabelle 3 gibt für alle untersuchten Salze eine Zusammenstellung der aktivsten Funken und ihrer absoluten Intensitäten. Diese lassen sich aus der Eichung der Thermosäule durch die Herstellerfirma und aus der Kenntnis der geometrischen Anordnung bei der Einstrahlung abschätzen.

Tabelle 3.

Photoströme bei integraler Einstrahlung.

Substanz	Dampfdruck mm Hg oder Substanztemp. $^\circ\text{C}$	Funke mit max. Ionenstrom	Intensität des integralen Funkens in erg/sek.	gemessener Ionenstrom $\cdot 10^{-7}$ A	mit Filter bestimmte Wellenlänge max. Anregung ÅE
InJ	$7 \cdot 10^{-2}$	Zn	$4 \cdot 10^3$	13	2050
InBr	$7 \cdot 10^{-2}$	Al	$1,2 \cdot 10^4$	4,0	1960
InCl	$7 \cdot 10^{-2}$	Al (L)	$1,2 \cdot 10^4$	0,9 (L)	<1860 (L)
		Al (V)	$1,7 \cdot 10^4$	1,1 (V)	
GaJ	185	Fe	—	4,3	1950
GaBr	195	Al (L)	$1,2 \cdot 10^4$	0,2 (L)	<1860 (L)
	195	Al (V)	$1,7 \cdot 10^4$	0,4 (V)	
GaCl	155	Ni (V)	$3,1 \cdot 10^4$	0,6 (V)	—

(L) = Messung in Luft

(V) = Messung im Vakuum

Die Ionenströme der untersuchten In-Salze beziehen sich alle auf den gleichen Druck, nämlich $7 \cdot 10^{-2}$ mm Hg. Für die Ga-Halogenide sind die Substanztemperaturen angegeben, bei welchen die

Messungen ausgeführt worden sind. Zwischen den Messungen in Luft und im Vakuum bei InCl und GaBr ist bei integraler Einstrahlung noch kein Vergleich erlaubt, da nach dem Wegpumpen der Luft nicht nur die Linien unterhalb 1860 AE für Anregung und Intensitätsmessung wirksam werden, sondern auch alle Linien oberhalb der Luftabsorptionsgrenze stärker erscheinen. Die äusserste Kolonne der Tabelle 3 enthält die mit den Filtern bestimmte Wellenlänge maximaler Anregung. Man erkennt ferner, dass die Ionenströme beim Jodid einen grössten Wert annehmen, beim Bromid und Chlorid sind dieselben etwas kleiner.

7. Einstrahlung mit spektral zerlegtem Licht.

Im Spektralbereich oberhalb 1860 AE wurde mit dem Quarzmonochromator eingestrahlt und der zugehörige Ionenstrom i gemessen. Mit Hilfe der Relativintensitäten J der Funkenlinien (vgl. Tabelle 1) erhält man dann die relativen Ionenströme i/J als Funktion der eingestrahnten Wellenlänge. Im Schumanngebiet, wo eine spektral zerlegte Einstrahlung aus Mangel an Helligkeit keinen Effekt liefert, findet man die Anregungsfunktion nach folgender Methode:

Es wird mit der Schumannapparatur mit verschiedenen Funken F integral eingestrahlt und der jeweilige Ionenstrom $i^{(F)}$ gemessen. Dieser totale Strom lässt sich nun auf die aktiven Linien des Funkens verteilen, es ist:

$$i^{(F)} = \sum_k i_k^{(F)} J_k^{(F)} \quad (2)$$

wo $J_k^{(F)}$ die in Tabelle 1 wiedergegebene Relativintensität, $i_k^{(F)}$ der Ionenstrom einer Linie der Wellenlänge k des Funkens F bedeutet. Für jeden verwendeten Funken erhält man eine Gleichung für die Ströme $i_k^{(F)}$. Diese Gleichungen lassen sich nicht streng lösen, da die Zahl der Unbekannten immer grösser als die Zahl der zur Verfügung stehenden Gleichungen sein wird. Eine Annäherung erhält man aber dann, wenn unter den Funken F Linien vorkommen, deren k gleich, oder wenigstens nicht sehr verschieden voneinander sind, so dass sie zusammengelegt werden können. Es erweist sich dann als praktisch eine graphische Lösungsmethode zu verwenden.

In Fig. 4 sind die Relativintensitäten der benützten Funkenlinien derart zusammengestellt, dass bei jedem Funken die überall auftretende Zn-Linie 1750 AE den Intensitätswert 1 erhält. Durch diese Massnahme hat man bereits eine der Unbekannten aus den Gleichungen (2) eliminiert.

Am Beispiel des InCl sei nun die Konstruktion der Anregungsfunktion erläutert. Belichtet man InCl mit verschiedenen Funken, so findet man folgende Ionenströme.

Funke.	Zn	Ca	Al	Ni
Strom (Skalenteile). .	3	6	20	9

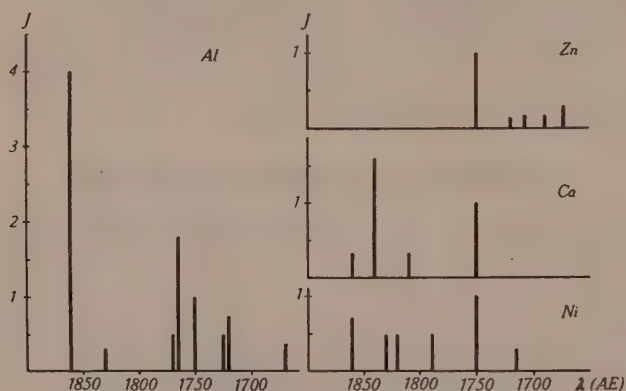


Fig. 4.

*Funkenlinien und Relativintensitäten unterhalb 1860 A
(Umgerechnet auf gleiche Intensitätswerte bei 1750 Å)*

J = Relativintensitat; λ = Wellenlänge in A

Bei Einstrahlung mit dem Quarzmonochromator ergibt sich für die Al-Linien bei 1860 A nur ein äusserst kleiner Strom. Das Maximum der Anregung muss daher unterhalb dieser Wellenlänge liegen. Ordnet man nun bei Zn den integralen Strom von 3 Skalenteilen der Liniengruppe 1750 A zu, so erhält man für Ca 1840 Å den Stromanteil $i_{1840}^{(\text{Ca})} = \frac{3}{1.6} = 1.9$ Skalenteile, da die Ca-Linie 1,6mal so intensiv ist wie die Linie 1750 A des Zn. Für Al ergibt sich dann unter Vernachlässigung aller übrigen Linien, für die Liniengruppe 1770 A ein Anteil 7,4. Zuletzt findet man noch für Ni 1795 A einen Strom von 8 Skalenteilen, wenn man den Ni-Linien 1820 Å und 1830 A zusammen denselben Anteil zuordnet wie Ca 1840 Å. Durch eine solche Annahme wird die Lage des Maximums nicht stark verschoben, da der Strombeitrag von 1840 Å schon ziemlich klein ist. Mit diesem Verfahren ist es möglich, die Anregungsfunktionen für InCl und GaBr abzuschätzen. Die Lage der Maxima ist dabei bis auf ca ± 20 A festgelegt.

Bei GaCl , wo zu wenig Messungen mit geeigneten verschiedenen Funken vorliegen, kann das Maximum nicht genau angegeben werden, es liegt in der Gegend von 1700 Å.

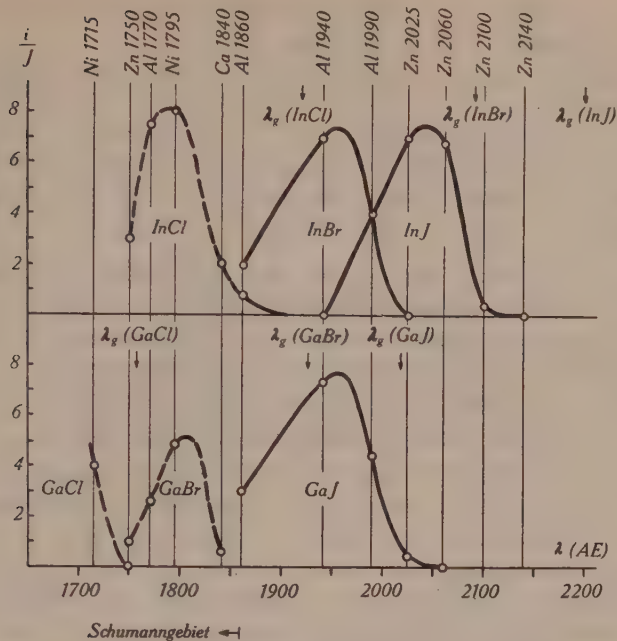


Fig. 5.

Anregungsfunktionen der zweiatomaren In- und Ga-Halogenide.

— mit Monochromator gemessen; — — graphisch berechnet; i = Ionenstrom; J = Relativintensität; λ_g = Grenzwellenlänge; λ = eingestrahlte Wellenlänge.

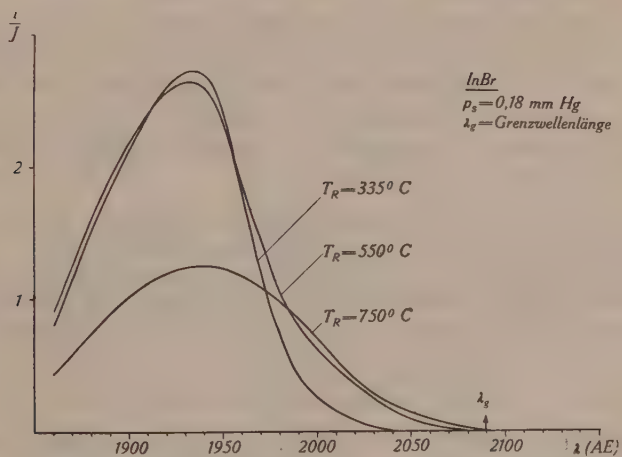


Fig. 6.

Relativer Ionenstrom an überhitztem InBr-Dampf.

Fig. 5 enthält die Anregungsfunktionen sämtlicher untersuchten Halogenide des In und Ga.

Die den einzelnen Kurven entsprechenden Dampfdrucke und Temperaturen sind:

	p_s (mm Hg)	T_R ($^{\circ}$ C)		T_S ($^{\circ}$ C)	T_R ($^{\circ}$ C)
InJ . . .	0,4	420	GaJ . . .	190	285
InBr . . .	0,3	345	GaBr . . .	195	240
InCl . . .	0,2	270	GaBl . . .	125	255

Um den Einfluss der verschiedenen aufgefüllten Schwingungsniveaus des Molekulgrundzustandes auf die Gestalt der Anregungsfunktion zu untersuchen, wurden an überhitztem InBr-Dampf Messungen bei konstant gehaltener Dichte ausgefuhrt¹⁾.

Die Kurven der Fig. 6 zeigen mit ansteigender Dampftemperatur T_R eine Verbreiterung der Anregungsfunktion nach längeren Wellen.

Es zeigt sich aber, dass auch bei der höchsten Dampftemperatur $T_R = 750^{\circ}$ C eine mit λ_g bezeichnete langwellige Grenzwellenlänge nicht überschritten wird. Da die in Gleichung (3) (siehe Anmerkung) verlangte Abhängigkeit zwischen T_R und T_S nicht ganz leicht einzustellen ist, sind die von den Kurven der Fig. 6 umrandeten Flächen nicht genau gleich gross, was man beim Vorhandensein einer festen Zahl von Molekülen im Dampfraum eigentlich erwarten müsste.

Neben den hier besprochenen Halogeniden des In und Ga wurden noch einige weitere Substanzen in das Absorptionsrohr gebracht und mit Licht verschiedener Funken bestrahlt.

J_2 zeigte bei keinem der anfangs genannten Funken einen Strom, dagegen war die Jodfluoreszenz sehr gut zu beobachten. Ebenso verliefen Versuche mit CuJ ergebnislos. Bei Drucken oberhalb 1 mm Hg spaltete sich lediglich freies J_2 ab, welches fluoreszierte. Auch AlJ_3 ergab bei längeren Wellen als 1860 AE keinen eindeutigen Ionenstrom²⁾.

1) Um die Dichte des Dampfes bei variablem T_R konstant zu halten, genügt es nicht die Substanztemperatur T_S fest einzustellen. Wird nämlich T_R verändert, so ändert sich damit auch die Dichte im Absorptionsraum. Eine einfache gas-kinetische Rechnung zeigt, dass zwischen T_R und T_S folgende Beziehung bestehen muss, damit die Zahl der Moleküle im Absorptionsraum auch wirklich konstant bleibt.

$$T_S \cdot T_R = \frac{p_s}{p_{s_0}} T_0^2 \quad (3)$$

Dann ist die Zahl der Moleküle pro cm^3 durch $n_0 = p_{s_0} / k T_0$ festgelegt. Es bedeuten:

p_s = Dampfdruck bei der absoluten Temperatur T_S

p_{s_0} = Dampfdruck bei der Ausgangstemperatur $T_S = T_R = T_0$.

2) Vgl. auch TERENIN und POPOV, l. c.

Diskussion.

8. Ionenkurve.

In Fig. 7 sind die Potentialkurven des Moleküls InJ zusammen- gestellt. Mit Ionenkurve soll diejenige Kurve bezeichnet werden, für die das Molekül AB bei grossem Kernabstand in die Ionen A^+ und B^- zerfällt. Die Lage der beschriebenen Anregungsfunk- tionen im Spektralgebiet lässt sich durch Angabe der minimalen

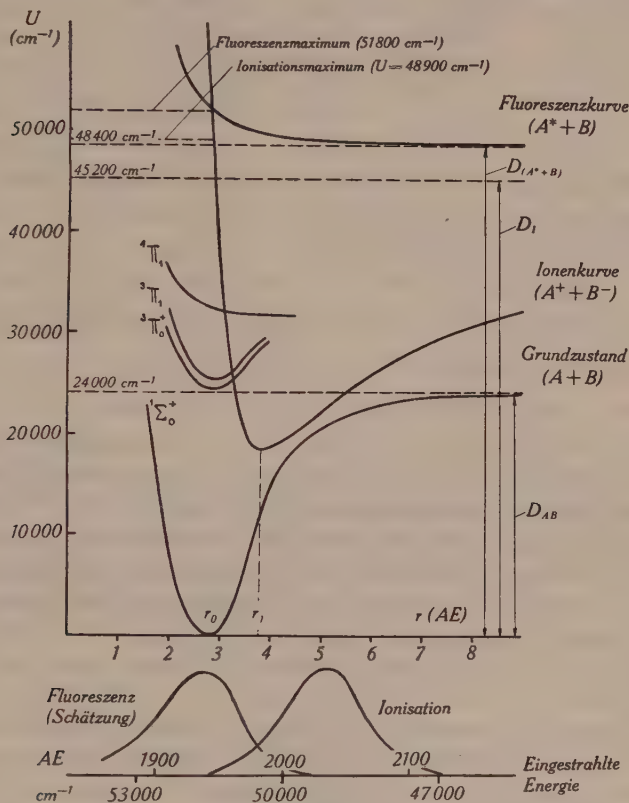


Fig. 7.

Potentialkurven und Anregungsfunktionen für Fluoreszenz und Ionisation bei InJ.

Energie, bei welcher eine Ionisierung des Moleküls überhaupt noch stattfinden könnte, schon zum voraus abschätzen. Diese Ionisierungs- energie D_I des Moleküls AB errechnet sich nach Fig. 7 aus dessen Dissoziationsarbeit D_{AB} , der Ionisierungs-Arbeit I_A des Metalles A und der Elektronenaffinität E_B des Halogens B nach der Gleichung

$$D_I = D_{AB} + I_A - E_B. \quad (4)$$

Für die In- und Ga-Halogenide erhalten wir die in Tabelle 4 zusammengestellten Zahlenwerte.

Tabelle 4.
Dissoziations- und Ionisierungsarbeiten der In- und Ga-Halogenide

	$D_{AB}^{(eV)}_{1)}$	$D_I (eV)$	$\lambda_g (AE)$	$\lambda_{max} (AE)$ beob.
InJ	$3,0 \pm 0,4$	$5,6 \pm 0,5$	2200 ± 220	2040
InBr	$3,8 \pm 0,4$	$5,9 \pm 0,6$	2090 ± 240	1950
InCl	$4,5 \pm 0,3$	$6,4 \pm 0,5$	1920 ± 170	1720 ± 20
GaJ	$3,3 \pm 0,7$	$6,1 \pm 0,8$	2020 ± 300	1950
GaBr	$4,1 \pm 0,4$	$6,4 \pm 0,6$	1930 ± 190	1800 ± 20
GaCl	$4,9 \pm 0,2$	$7,0 \pm 0,4$	1760 ± 100	ca. 1700

Den Berechnungen der Ionisierungsarbeiten der Moleküle sind folgende Daten zugrunde gelegt:

$$I_{In} = 5,76 \text{ eV}, I_{Ga} = 5,97 \text{ eV}$$

$$E_J = 3,15 \pm 0,07 \text{ eV}, E_{Br} = 3,66 \pm 0,17 \text{ eV}, E_{Cl} = 3,84 \pm 0,17 \text{ eV}.^2)$$

Kolonne 4 enthält die aus den Ionisierungsarbeiten D_I errechneten Grenzwellenlängen λ_g ($\lambda_g = \frac{hc}{D_I}$), welche auch in den Fig. 5 und 6 als Pfeile angegeben sind. Die Grenzenenergie für GaJ ist dabei wohl zu gross, entsprechend des beträchtlichen Fehlers, mit welchem die Dissoziationsenergie dieses Moleküls behaftet ist.

Die Kurven der Fig. 5 zeigen, dass bei niederen Temperaturen der Dämpfe der Ionenstrom schon bei kleineren Wellenlängen als λ_g Null wird. Die Messungen an überhitztem InBr-Dampf (vgl. Fig. 6) ergeben bei höchsten Dampftemperaturen eine Verbreiterung des anregenden Spektralbereichs nach längeren Wellen, die Grenze λ_g wird aber auch hier nicht überschritten. Das Maximum der Anregung liegt in jedem Fall bei einer kürzeren Wellenlänge λ_{max} (Kolonne 4 in Tabelle 4), d. h. die Moleküleile erhalten bei ihrer Trennung noch kinetische Energie. Beim Übergang von Jodid zu Bromid und Chlorid verschiebt sich λ_g systematisch zu kürzeren Wellenlängen, was eine analoge Verschiebung von λ_{max} zur Folge hat.

Schon WEHRLI und MIESCHER, l. c. vermuteten, dass die Halogenide des In und Ga Atommoleküle seien. Dies wird nun durch das Auffinden der Photoionisation bestätigt, falls man die Existenz

¹⁾ M. WEHRLI und E. MIESCHER, E. MIESCHER und M. WEHRLI, l. c.

²⁾ J. E. MAYER, ZS. f. Phys. **61**, 798 (1930); L. HELMHOLZ und J. E. MAYER, J. chem. Phys. **2**, 245 (1934); P. P. SUTTON und J. E. MAYER, J. chem. Phys. **3**, 20 (1935).

nur *einer* zu einem bestimmten Molekül gehörenden Ionenkurve annimmt. Bis jetzt ist aber noch kein Molekül bekannt, welches dieser Annahme widersprechen würde. Über die Lage der Ionenkurve in bezug auf die übrigen Molekülzustände ist noch wenig bekannt. Die Kenntnis dieser gegenseitigen Beziehungen wäre aber nützlich zur Klärung der Frage nach dem Auftreten von Spektren, welche mit der Ionenkurve im Zusammenhang stehen würden.

Es wird daher versucht diese Potentialfunktion U als Funktion des Kernabstandes r darzustellen. Der Ansatz ist so gewählt worden, dass seine Konstanten durch die experimentell ermittelten Grössen bestimmt werden können. Von der Kurve sind drei Punkte bekannt:

1. für $r \rightarrow \infty$ wird $U = D_I$
2. für $r = r_1$ muss die Ionenkurve ein Minimum besitzen; $U'(r_1) = 0$
3. für $r = r_0$ wird $U = U_0$; wo r_0 den Gleichgewichtsabstand des Molekülgrundzustandes und U_0 die der aktivsten Wellenlänge λ_{\max} (vgl. Tabelle 4) entsprechende Energie bedeutet.

Als Ansatz dient folgender Ausdruck mit drei Konstanten:

$$U = -\frac{e^2}{r} + \frac{A}{r^n} + B. \quad (5)$$

Der erste Summand muss als Coulombsche Anziehung besonders bei grossen Kernabständen wirksam werden, während der zweite den Verlauf des Potentials in Kernnähe wiedergibt.

Aus den Randbedingungen ergeben sich für n , A und B die Bestimmungsgleichungen:

$$\log n + n \log \frac{r_0}{r_1} = \log \frac{e^2}{f r_1} \quad (6)$$

$$A = \frac{e^2 r_1^{n-1}}{n} \quad (7)$$

$$B = D_I \quad (8)$$

$$\text{wobei} \quad f = U_0 - D_I + \frac{e^2}{r_0} \quad (9)$$

als Abkürzung gesetzt ist. Als Gleichgewichtsabstand r_1 der Ionenkurve setzen wir die Summe der Ionenradien der Molekülbestandteile. Es wird dabei die Annahme gemacht, dass diese aus Messungen an Kristallen bekannten Grössen, auch auf den Dampf übertragen werden dürfen.

Für InJ ergeben die Elektronenbeugungsversuche von BRODE¹⁾ ein $r_0 = 2,86 \pm 0,02$ AE; ferner wird $r_1 = r(\text{In}^+) + r(\text{J}^-) = 1,65 + 2,20 = 3,85$ AE. Damit erhält man:

$$U = -\frac{e^2}{r} + \frac{5,3 \cdot 10^{-75}}{r^{8,4}} + 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ erg} \quad (10)$$

Die so errechnete Ionenkurve ist in Fig. 7 eingezeichnet. Wie die Anregungsfunktionen der Fig. 5 zeigen, ist der Energiebereich, für welchen ein Übergang vom Grundzustand in die Ionenkurve in Frage kommt, sehr begrenzt. Obwohl die Ionenkurve für $r = r_0$ ziemlich steil verläuft, führt ein Auffüllen der Schwingungsniveaus im Ausgangszustand zu keiner wesentlichen Verbreiterung des wirksamen Energiebereiches, da die Schwingungsniveaus im Grundzustand nahe beieinander liegen.

9. Wirkungsquerschnitt.

Die Messungen der Intensitäten der Funkenlinien mit der Thermosäule erlauben eine Abschätzung der Zahl der Lichtquanten, welche pro Sekunde in den Absorptionsraum eingestrahlt werden. Es sind dabei die Eichdaten der Säule durch die Herstellerfirma verwendet worden. Demnach entsteht bei Bestrahlung der ganzen Thermoelementoberfläche mit 1 erg s^{-1} eine Thermokraft von $3,2 \cdot 10^{-8}$ Volt. Aus dem Absolutwert des Photostromes kann man ferner die Zahl der bei der Lichtabsorption in einer Sekunde gebildeten Ionenpaare ermitteln. Da für die Bildung jedes solchen Paares genau ein Lichtquant notwendig ist, gibt die Gesamtzahl der gebildeten Ionenpaare gerade die Zahl der beim Durchgang durch den Dampf absorbierten Quanten an. Für den Absorptionskoeffizienten α findet man, gemäss seiner Definition

$$\alpha = -\frac{1}{x} \ln \frac{n}{n_0} = -\frac{1}{x} \ln \frac{\text{Zahl der Quanten} - \text{Zahl der Ionenpaare}}{\text{Zahl der Quanten}} \text{ cm}^{-1} \quad (11)$$

dabei bedeutet x die Länge der absorbierenden Schicht, n_0 die Zahl der eintretenden und n die Zahl der austretenden Quanten. Hieraus errechnet sich dann der Wirkungsquerschnitt σ durch Division durch die im cm^3 enthaltene Teilchenzahl N .

$$\sigma = \frac{\alpha}{N} \text{ cm}^2 \quad (12)$$

¹⁾ H. BRODE, Ann. d. Phys. **37**, 344 (1940).

der entsprechende Wirkungskradius ϱ wird

$$\varrho = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} \quad (13)$$

Für InJ ergibt sich in der Nähe des Anregungsmaximums bei der Zn-Linie 2025 AE:

$$\begin{aligned} \text{Anzahl der pro Sekunde eingestrahnten Quanten} &= 4 \cdot 10^{11} \\ \text{Zahl der pro Sekunde gebildeten Ionenpaare} &= 2,5 \cdot 10^{11} \\ N = 1,4 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3} \quad x = 5 \text{ cm} \quad \alpha = 0,2 \text{ cm}^{-1} \quad \sigma = 10^{-17} \text{ cm}^2 \\ \varrho &= 1,8 \cdot 10^{-9} \text{ cm} \end{aligned}$$

Die Verwendung des Absorptionsrohres mit zwei Quarzfenstern (vgl. Fig. 1) ermöglichte nach Anbringen eines Fluoreszenzschirms den Nachweis des durch die Schicht x hindurchgegangenen, also nicht absorbierten, Bruchteils der eingestrahnten Energie. Bei der Messung der Absolutintensität wurde von der Linie etwa die Hälfte der Oberfläche der Thermosäule beleuchtet. Zur Einstrahlung in den Absorptionsraum steht das Doppelte dieser Energie zur Verfügung. Die Zahlenangaben von α , σ und ϱ sind daher nur bis auf einen Faktor 2 richtig. Bei der Abschätzung wurde ferner angenommen, dass neben der Absorption in die Ionenkurve keine weiteren Absorptionen stattfinden. Diese Annahme rechtfertigt sich aus der Übereinstimmung der Zahl der eingestrahnten Quanten mit der Zahl der gebildeten Ionenpaare. Der gefundene Wirkungsquerschnitt ist etwas grösser als derjenige der Photoionisation von Natriumdampf in Atom plus Elektron, welchen MOHLER, FOOTE und CHENAULT¹⁾ aus den experimentellen Daten von HARRISON und SLATER²⁾ zu 10^{-18} cm^2 abschätzen. Im weiteren ergibt sich aus den Angaben von LADENBURG, VAN VOORHIS und BOYCE³⁾ für die kontinuierliche Absorption des O_2 -Moleküls bei 1400 AE ein Wirkungsquerschnitt von $1,8 \cdot 10^{-17} \text{ cm}^2$. Dieses Kontinuum ist nach FINKELNBURG „Kontinuierliche Spektren“ als Absorptionskontinuum Fall II zu bezeichnen und entspricht dem erlaubten Übergang ${}^3\Sigma_g^- \rightarrow {}^3\Sigma_u^-$. Im oberen Zustand dissoziiert das O_2 -Molekül in ein ${}^3\text{P}$ - und ein ${}^1\text{D}$ -Atom. Die Lagebeziehungen der Potentialkurven der beiden Zustände sind analog wie diejenigen zwischen Ionenkurve und Grundzustand der In- und Ga-Halogenide.

1) F. L. MOHLER, P. D. FOOTE und R. L. CHENAULT, Phys. Rev. **27**, 37 (1926).

2) G. R. HARRISON, Phys. Rev. **24**, 474 (1924); G. R. HARRISON und J. C. SLATER, Phys. Rev. **26**, 176 (1925).

3) R. LADENBURG, C. C. VAN VOORHIS und J. C. BOYCE, Phys. Rev. **40**, 1018 (1932).

10. Ionenkurve und Fluoreszenzkurve.

Bei der Beschreibung des Ionisierungsvorganges stellt sich nun die Frage nach dem Charakter eines solchen Überganges vom Grundzustand in die Ionenkurve. Entweder ist ein direkter optischer Übergang erlaubt, oder die Ionenkurve kann nur durch Vermittlung einer weiteren Potentialkurve unter Zuhilfenahme einer Kreuzungsstelle erreicht werden. Da man bis heute bei den oben untersuchten Molekülen weder in Emission noch in Absorption Spektren gefunden hat, zu deren Erklärung die Existenz einer Ionenkurve angenommen werden musste, ist man zunächst geneigt, die zweite Möglichkeit vorzuziehen. Als Zwischenterm käme dabei für InJ nur die abstossende Kurve bei 51800 cm^{-1} in Betracht (vgl. Fig. 7). Diese Kurve führt nach WEHRLI und MIESCHER, l. c., zu einem Zerfall des Moleküls in ein angeregtes Indiumatom und ein unangeregtes Jodatomb. Beim Übergang des Indiumatoms vom $^2S_{1/2}$ -Zustand in den metastabilen $^2P_{3/2}$ -Zustand wird eine starke, blaue Atomfluoreszenz beobachtet (4511 ÅE). Die entsprechende Potentialkurve des InJ-Moleküls wird im folgenden als Fluoreszenzkurve bezeichnet. Die Anregungsenergie für das Maximum dieser Fluoreszenz ist nun nur sehr wenig grösser als diejenige für das Maximum der Ionisation. Im kritischen Energiebereich findet eine Überschneidung der beiden Molekülzustände statt. Es ist daher denkbar, dass das Molekül zuerst, als Folge der optischen Einstrahlung, auf die Fluoreszenzkurve gelangt und nachher durch einen weiteren Prozess auf die Ionenkurve übergeht.

Der grosse Wert des Ausbeutekoeffizienten k bei der Ionisation

$$\left(k = \frac{\text{Zahl der Ionenpaare pro sek.}}{\text{Zahl der Quanten pro sek.}} \right),$$

wonach beinahe alle eingestrahnten Quanten auch zu einer Ionisation des Moleküls führen, spricht nun eher für einen direkten optischen Übergang. Die Aufrechterhaltung der Schnittpunktheorie würde nämlich verlangen, dass alle Moleküle beim Kreuzungspunkt von Fluoreszenzkurve und Ionenkurve auf die letztere übergehen müssten. Eine solche Annahme ist aber sehr unbefriedigend. Ausserdem zeigen die Messungen des Ausbeutekoeffizienten der Fluoreszenzanregung an TIJ von J. M. FRANK¹⁾ ebenfalls eine Übereinstimmung der Zahl der absorbierten mit derjenigen der durch die Fluoreszenz emittierten Quanten. Hier führen also alle eingestrahnten Quanten zu einer Fluoreszenz. Man kann nun nicht gut an-

¹⁾ J. M. FRANK, Phys. ZS. d. Sowjetunion **2**, 319 (1932).

nehmen, dass beim verwandten Molekül InJ ein total anderes Verhalten vorliegen soll.

Zur weiteren Aufklärung wird an einem mit InJ gefüllten Rohr sowohl die Ionisation als auch die Fluoreszenz in Abhängigkeit der eingestrahnten Wellenlänge gemessen. Leider ist das Fluoreszenzlicht zu schwach, als dass es innerhalb der durch die Messung des Ionenstromes bedingten kurzen Zeit mit einem Spektrographen photographierbar wäre. Dagegen kann das Licht mit einem Handspektroskop gut beobachtet und seine Intensität abgeschätzt werden. In Fig. 7a sind die Anregungskurven der Fluoreszenz und der Ionisation zusammengestellt. Aus den Messungen geht eindeutig hervor, dass bei Einstrahlenergien unterhalb der Dissoziationsenergie D ($A^* + B$) der Fluoreszenzkurve noch ein wesentlicher Ionenstrom gefunden wird, die Fluoreszenz aber völlig fehlt. Dies ist der Beweis dafür, dass bei der Absorption des Quantes $h\nu$ nach Gleichung (1) ein direkter, erlaubter Übergang aus dem Grundzustand in den Ionenzustand stattfindet.

Herzlichen Dank schulde ich den Herren Prof. Dr. M. WEHRLI, auf dessen Anregung und unter dessen Leitung die vorliegende Arbeit entstanden ist; Prof. Dr. E. MIESCHER und P.D. Dr. M. FIERZ, deren wertvolle experimentelle und theoretische Ratschläge mir beim Fortgang der Untersuchungen sehr nützlich waren.

Den Herren Prof. Dr. A. HAGENBACH und Prof. Dr. P. HUBER danke ich an dieser Stelle ebenfalls recht herzlich für die Bereitstellung und Überlassung der Institutsmittel.

Basel, Physikalische Anstalt der Universität.

Ueber den β -Zerfall des Radium A

von H. Labhart und H. Medicus.

(31. V. 1943)

Zusammenfassung: Mit Hilfe von Zählrohr-Messungen wird nach zwei verschiedenen Methoden nach der verschiedentlich vermuteten β -Aktivität des α -Strahlers Radium A gesucht. Innerhalb der Fehlergrenzen der Messmethoden wird keine β -Strahlung gefunden, und es kann gezeigt werden, dass, den ungünstigsten Fall vorausgesetzt, das Verzweigungsverhältnis β/α für dieses Element kleiner als $3,5\%$ sein muss.

Problemstellung.

Alle Versuche, stabile Isotope des Elementes 85 (Ekajod) aufzufinden, sind bisher vergeblich geblieben. Dagegen ist es nicht ausgeschlossen, dass in den natürlichen radioaktiven Zerfallsreihen radioaktive Isotope des Elements 85, z. B. durch β -Zerfall der A-Produkte, gebildet werden. MINDER¹⁾ hat darauf hingewiesen, dass sich insbesondere das Ra-A durch ein sehr hohes Neutronen-Protonen-Verhältnis auszeichnet, so dass also in Konkurrenz mit der bekannten α -Aktivität vielleicht auch ein β -Zerfall möglich wäre. TURNER²⁾ entdeckte bei den schweren Kernen eine empirische Regelmässigkeit im Vorkommen der schwersten β -stabilen Isotope. Daraus schloss er, dass Ra-A β -instabil sein könnte und mit einer β -Halbwertszeit von ungefähr 10 Stunden zerfallen sollte. Wenn man annimmt, dass α - und β -Zerfall eines dual zerfallenden Elementes voneinander unabhängig sind, so entspricht dem bei einer α -Halbwertszeit des Ra-A von 3 Minuten eine β/α -Verzweigung von ca. $\frac{1}{2}\%$.

Die Schwierigkeit, diese kleine Verzweigung experimentell nachzuweisen, liegt vor allem darin, dass bei der verhältnismässig kurzen Lebensdauer des Ra-A sehr rasch das β -strahlende Ra-B entsteht, dessen Strahlung eine eventuelle β -Emission von Ra-A überdeckt. MINDER³⁾ versuchte, die β -Strahlung des Ra-A neben derjenigen des Ra-B und Ra-C nachzuweisen: Er befreite zu einer Zeit $t = 0$ ein Quantum Ra-Fm von seinen Folgeprodukten. Unmittelbar nachher entstehen nun wieder Ra-A, Ra-B und Ra-C, von denen die beiden letzteren β -Strahler sind. (Fig. 1.) Da alle Halbwertszeiten dieser Elemente bekannt sind, kann man für jede

Folgezeit t die zu erwartende β -Aktivität berechnen und erhält so den in Fig. 2 durch Kurve I veranschaulichten Anstieg. Schreibt man aber auch dem Ra-A β -Aktivität zu, so erhält man eine gegenüber dieser Berechnung besonders im Anfang erhöhte Aktivität. Bei Annahme einer Verzweigung $\beta/\alpha = 1\%$ wird der β -Anstieg durch Kurve II dargestellt.

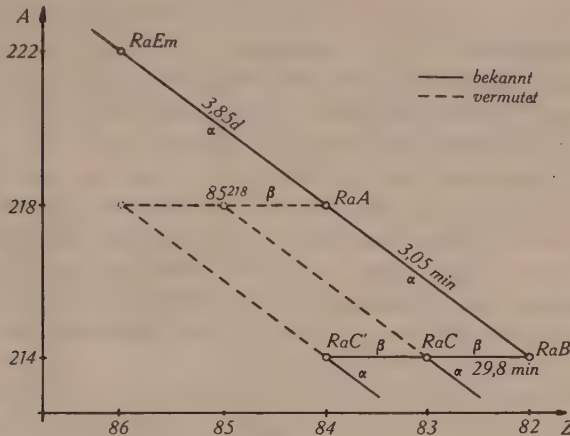


Fig. 1.

Zerfallsverhältnisse um RaA.

Messungen von MINDER, der Ionisationskammer und Elektrometer verwendete, ergaben eine deutliche Abweichung von der ohne Verzweigung berechneten Kurve I. Die ionisierte Wirkung der vom Ra-A ausgehenden β -Strahlung wird von MINDER zu 15% derjenigen von Ra-B angegeben. KARLIK und BERNERT⁴⁾ haben die Versuche MINDER's wiederholt, ohne aber eine β -Strahlung des Ra-A feststellen zu können; sie vermuten, dass MINDER's positives Resultat durch eine Verunreinigung der Emanation mit Ra-A vorgetäuscht worden sei.

CAUCHOIS und HULUBEI⁵⁾ sowie VALADARES⁶⁾ fanden Andeutungen von Linien des Elementes 85 im Röntgenspektrum von Ra-Emanation, welche im Gleichgewicht mit ihren Folgeprodukten stand.

Durch diese Versuche angeregt, haben wir die Zerfallsverhältnisse bei Ra-A mit Zählrohren nach zwei verschiedenen im folgenden beschriebenen Methoden untersucht. Wir haben dabei feststellen müssen, dass die Verzweigung, wenn sie überhaupt vorhanden ist, einen ausserordentlich kleinen Wert, höchstens in der Größenordnung des Promille, haben muss.

So bleibt also die Entstehung des Isotops 218 des Elements 85 aus Ra-A immer noch eine offene Frage. Mit Sicherheit ist bis heute nur das aus Wismut mit Hilfe der Kernreaktion $\text{Bi}(\alpha, 2n)^{85}_{211}$ hergestellte Isotop des Ekajod bekannt⁷⁾.

Energiebetrachtungen.

Mit Hilfe von Energie- und Spinbetrachtungen sollte es theoretisch möglich sein, unter Heranziehung der SARGENT-Beziehung das Verzweigungsverhältnis für Ra-A ziemlich genau abzuschätzen. Leider sind aber die in Betracht kommenden Energien nur aus den folgenden sehr rohen Überlegungen zu gewinnen.

Nach TURNER ist es wahrscheinlich, dass das aus Ra-A entstandene Ekajod wiederum α - und β -aktiv ist. Dabei soll der α -Zerfall so viel wahrscheinlicher sein, dass wir diesen allein betrachten können. Für diesen α -Zerfall lässt sich die Energie aus einem Schema von HEISENBERG⁸⁾ zu 6,8 MeV entnehmen. Diese Energie würde nach GEIGER-NUTTAL einer Halbwertszeit des Elements 85 von nur $1/20$ sec entsprechen.

Bei α -Zerfall von Ra-A und β -Zerfall von Ra-B werden unter Einrechnung der γ -Strahlung im ganzen 7,1 MeV frei. Die gleiche Energiedifferenz muss auch durch den β -Zerfall des Ra-A und den nachfolgenden α -Zerfall des Ekajod zustande kommen, wenn man annimmt, dass auf beiden Wegen der Grundzustand des Ra-C erreicht wird. Es bleiben daher für den β -Zerfall des Ra-A 0,3 MeV übrig. Nach der SARGENT-Beziehung entspricht dieser weichen β -Strahlung bei einer Spinänderung $\Delta I = 0$ eine Zerfallskonstante $\lambda_{A\beta} = 10^{-5} - 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$. Weil das Verzweigungsverhältnis gleich dem Quotienten der β - und α -Zerfallswahrscheinlichkeiten ist, resultiert daraus eine obere Grenze einer Gabelung β/α von maximal 3%. Die Spinänderung $\Delta I = 1$ würde auf eine hundertmal kleinere Gabelung führen. Wenn Ra-A in einen angeregten Zustand des Elements 85 übergeht und dieses erst durch γ -Strahlung seinen Grundzustand erreicht, so wirkt sich das wegen der SARGENT-Beziehung ebenfalls in einer Verminderung des grösstmöglichen Verzweigungsverhältnisses aus. Eine untere Grenze für dasselbe kann somit nicht angegeben werden.

Messung des Anstiegs der β -Strahlung aus reiner Ra-Emanation.

Wenn das Verzweigungsverhältnis in der Grössenordnung einiger Prozente liegen würde, müsste es möglich sein, dasselbe direkt durch Messung des Anstiegs der β -Strahlung aus reiner Ra-Emanation zu bestimmen. Während MINDER bei Verwendung von

Ionisationskammer und Elektrometer relativ grosse Emanationsmengen benötigte, kann man bei Verwendung von Zählrohren wegen deren grosser Empfindlichkeit mit ca. 100mal kleineren Emanationsmengen auskommen. So kleine Mengen sind viel leichter zu handhaben, namentlich aber viel leichter vom aktiven Niederschlag zu reinigen.

Liegt zur Zeit $t = 0$ reine Ra-Emanation vor, und bezeichnet man die Zerfallskonstanten mit λ und die Anzahl der zur Zeit t vorhandenen Atome eines Elements mit $N(t)$, wobei die auf Ra-Em, Ra-A usw. bezogenen Grössen die Indices Em, A usw. erhalten, so resultieren mit $N_{Em} \cdot \lambda_{Em} = 1$ folgende Ausdrücke für die verschiedenen $N(t)$:

$$N_A(t) = \frac{1}{\lambda_A} (1 - e^{-\lambda_A t})$$

$$N_B(t) = \frac{1}{\lambda_B} - \frac{1}{\lambda_B - \lambda_A} \left(e^{-\lambda_A t} - \frac{\lambda_A}{\lambda_B} e^{-\lambda_B t} \right)$$

$$N_C(t) = \frac{1}{\lambda_C} - C_1 e^{-\lambda_A t} - C_2 e^{-\lambda_B t} - C_3 e^{-\lambda_C t}$$

wobei

$$C_1 = \frac{\lambda_B}{(\lambda_B - \lambda_A)(\lambda_C - \lambda_A)}, \quad C_2 = \frac{\lambda_A}{(\lambda_A - \lambda_B)(\lambda_C - \lambda_B)},$$

$$C_3 = \frac{\lambda_A \lambda_B}{\lambda_C(\lambda_C - \lambda_A)(\lambda_C - \lambda_B)}.$$

Bedeutet p das Verzweigungsverhältnis von Ra-A, so ereignen sich pro Zeiteinheit

$$Z = p\lambda_A N_A + \lambda_B N_B + \lambda_C N_C$$

β -Zerfälle, wovon in der Zählordnung

$$Z' = \Omega (Ap\lambda_A N_A + B\lambda_B N_B + C\lambda_C N_C)$$

gezählt werden. Ω berücksichtigt den Raumwinkel der Anordnung, die Koeffizienten A, B, C tragen der Absorption der betreffenden Strahlung in der Zählrohrwandung aus $6 \cdot 10^{-3}$ cm dickem Aluminium Rechnung. Die Absorptionskoeffizienten haben für die β -Strahlen des Ra-B und Ra-C die Werte $\mu_B = 80 \text{ cm}^{-1}$ und $\mu_C = 13,5 \text{ cm}^{-1}$. Damit sind B und C zu

$$B = e^{-80 \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = 0,62 \quad C = e^{-13,5 \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = 0,92$$

bestimmt. Da die Härte der β -Strahlung des Ra-A nicht bekannt

ist, sei vorläufig $A = 1$ gesetzt. Zur numerischen Berechnung der Anstiegskurven von Fig. 2 sind für die Zerfallskonstanten die Werte

$$\begin{aligned}\lambda_{A\alpha} &= 0,2273 \text{ min}^{-1} = 3,79 \cdot 10^{-3} \text{ sec}^{-1} \\ \lambda_B &= 0,0258 \quad ,, = 4,30 \cdot 10^{-4} \quad ,, \\ \lambda_C &= 0,0355 \quad ,, = 5,92 \cdot 10^{-4} \quad ,,\end{aligned}$$

benützt worden.

Weil unsere Kurven relative Werte zu verschiedenen Zeitpunkten darstellen, haben wir die Intensität aus messtechnischen Gründen jeweils im Zeitpunkt $t = 9,5 \text{ min}$ gleich 1 gesetzt.

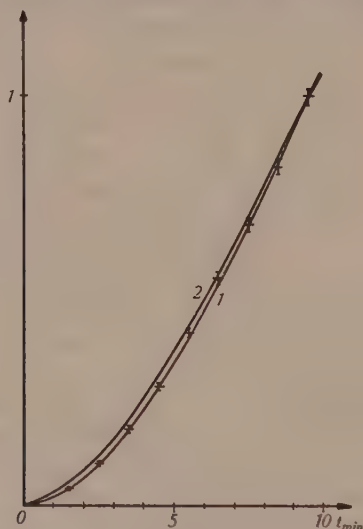


Fig. 2.

Anstieg der β -Aktivität aus reiner Ra-Emanation bei 0,06 mm Aluminium als Absorber.

1 = Berechnete Kurve ohne β -Strahlung bei RaA. 2 = Berechnete Kurve bei einer Verzweigung von 1% und sehr harter β -Strahlung von RaA ($A = 1$).

\pm = Messpunkte mit Angabe der mittleren Fehler.

Der Anstieg der β -Aktivität wurde in einem zylindrischen Gefäß von ca. einem Liter Inhalt mit Hilfe eines axial eingebauten Zählrohrs von 14 mm Durchmesser bei 60μ Al-Wandstärke bestimmt. Die Dicke der Wand des Zählrohrs war so bemessen, dass α -Strahlen gerade zurückgehalten wurden, während die β -Strahlen hindurchtreten konnten.

Um den Anschluss der Messungen an die theoretischen Kurven zu erreichen, sind dieselben ebenfalls bei $t = 9,5 \text{ min}$ auf den Wert 1 reduziert worden. Die Messpunkte sind in Fig. 2 unter Angabe der statistischen Fehler eingetragen. Es zeigt sich, dass

keine systematischen Abweichungen von Kurve I vorhanden sind. Eine Fehlerbetrachtung, in welche die Härte der von Ra-A ev. emittierten β -Strahlung natürlich eingeht, zeigt, dass die Verzweigung $\beta/\alpha < 2\%$ sein muss. Eine genaue Diskussion des Einflusses der Härte der β -Strahlung des Ra-A auf die Empfindlichkeit der Methode wird weiter unten bei Besprechung der zweiten Messmethode gegeben.

Messung des Anstiegs der β -Strahlung aus reinem Radium-A.

Mit der im vorangehenden Abschnitt dargelegten Methode konnte zwar ein Verzweigungsverhältnis über 2% ausgeschlossen werden, eine Gabelung aber in der Grössenordnung, wie sie TURNER vorausgesagt hatte, liesse sich auf diese Weise nicht feststellen. Die relativ geringe Empfindlichkeit der Methode rührt daher, dass bei ihr die eventuelle β -Strahlung des Ra-A nur als Differenzeffekt bei den Anstiegskurven mit und ohne Gabelung eingeht. Eine Anordnung, die diese Strahlung allein zu messen vermag, wird daher bedeutend präzisere Resultate liefern können.

Scheidet man auf einem Träger in kürzester Zeit völlig reines Ra-A ab und misst sogleich den Anstieg der sich daraus entwickelnden β -Aktivität, so lässt sich mittels Extrapolation auf den Nullpunkt der Aktivierung aussagen, ob das reine Ra-A β -strahlend ist. Für den Anstieg der Intensität der β -Strahlung, der ja nur für die ersten 30 Sekunden interessiert, innerhalb denen $\lambda \cdot t \ll 1$ noch erfüllt ist und deshalb $e^{-\lambda t}$ durch $(1 - \lambda t)$ ersetzt werden kann, ergeben sich bei Annahme einer unendlich kurzen Aktivierungsdauer die folgenden Gleichungen für die Zahl der β -Zerfälle:

$$\begin{aligned} Z_A &= p\lambda_A(1 - \lambda_A t) \\ Z_B &= t\lambda_A\lambda_B \end{aligned}$$

Z_C verschwindet in dieser Näherung. Die Zahl der beobachteten β -Zerfälle beträgt somit $Z' = \Omega [Ap\lambda_A(1 - \lambda_A t) + Bt\lambda_A\lambda_B]$. Ω , A und B tragen wieder dem Raumwinkel und der Absorption Rechnung. Hieraus ist ersichtlich, dass bei Abwesenheit der gesuchten β -Strahlung die Anstiegskurve eine durch den Ursprung gehende Gerade ist, im andern Fall aber zur Zeit $t = 0$ schon eine β -Aktivität bemerkbar sein muss.

Experimentell bietet sich nun leider keine Möglichkeit, einen von Folgeprodukten freien Niederschlag so rasch zu sammeln, dass sich in der dazu benötigten Zeit noch keine feststellbare Menge Ra-B gebildet hätte. Der Einfluss einer endlichen, aber doch kurzen Aktivierungsdauer auf die oben gegebenen Anstiegskurven lässt

sich aber leicht eliminieren. Für das Verständnis ist es notwendig, kurz den experimentellen Vorgang der Aktivierung zu beschreiben: Als Träger des aktiven Niederschlages dient ein evakuierbarer Hohlzylinder von 10 cm Höhe und 5 cm Innendurchmesser. Er kann mit einer Waschflasche in Verbindung gesetzt werden, die in Wasser gelöste Emanation enthält. Lässt man den zuvor evakuierten Zylinder durch die Waschflasche Luft ansaugen, so wird hierbei eine Portion Emanation aus der Lösung herausgequirlt und gelangt in den Zylinder. Nachdem sich nach 5 Sekunden der Druckausgleich vollzogen hat, wird in der 6. Sekunde die Emanation aus dem Zylinder mittels einer nun angeschlossenen Vorratsvakuumflasche entfernt. Die Zahl der während der Aktivierung in der Sekunde entstehenden Ra-A-Atome ist proportional der Füllung des Zylinders mit Emanation und deshalb eine Funktion der Zeit, die sich in ihren wesentlichen Zügen durch eine Kurve $f(\tau)$ darstellen lässt (Fig. 3), die folgenden Verlauf zeigt:

$$\begin{aligned} 0 \text{ sec} < \tau < 5 \text{ sec}: f(\tau) &= f_{\max}(1 - e^{-\nu\tau}) \quad \nu \approx 1 \text{ sec}^{-1} \\ 5 \text{ sec} < \tau < 6 \text{ sec}: f(\tau) &= f_{\max}(6 - \tau) \end{aligned}$$

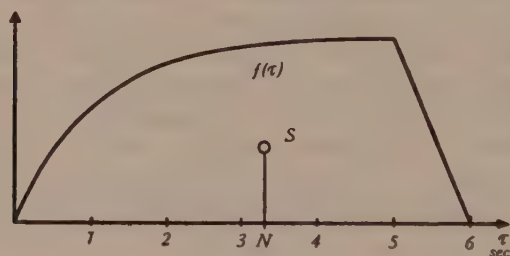


Fig. 3.

Darstellung der Kurve $f(\tau)$, die den Vorgang der Aktivierung des Zylinders beschreibt.

N = Abszisse des Schwerpunktes S der von der Kurve $f(\tau)$ und der Abszissenachse gebildeten Fläche = effektiver Nullpunkt.

Rechnet man die Zeit vom Anfang der Aktivierung an, so wird unter Berücksichtigung der endlichen Aktivierungsdauer die Zahl der zur Zeit t registrierten Teilchen

$$Z^* = \int_{\tau=0}^t f(\tau) Z'(t - \tau) d\tau$$

Mit den oben angegebenen Funktionen $f(\tau)$ und $Z'(t)$ erhält man nach Integration für Z^* folgende Anstiegskurve:

$$Z^* = \{4,5 p A \lambda_A \lambda_B [1 - \lambda_A(t - 3,14)] + 4,5 B \lambda_A \lambda_B (t - 3,14)\} \Omega f_{\max}$$

Dies ist eine Gerade (Fig. 4), die aber, wenn $p = 0$ ist, die Abszissenachse bei $t = 3,14$ sec schneidet. Die allgemeine Durchrechnung lässt erkennen, dass dieser Punkt mit der Abszisse des Schwerpunkts der durch die Kurve $f(\tau)$ und die Zeitachse gebildeten Fläche zusammenfällt. Der Anstieg erfolgt so, als wäre alles Ra-A zu dieser Zeit auf den Träger niedergeschlagen worden. Dieser Punkt sei daher im folgenden als effektiver Nullpunkt bezeichnet.

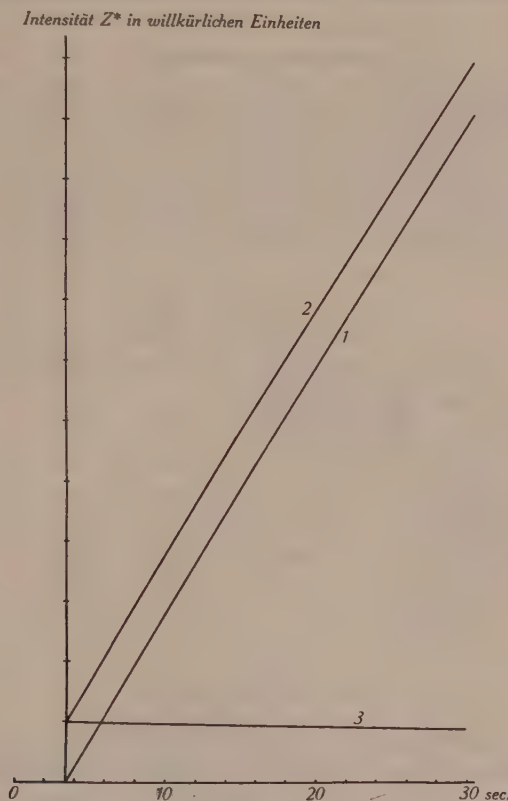


Fig. 4.

Kurve 1: Anstieg der β -Aktivität ohne Verzweigung. Kurve 2: Anstieg der β -Aktivität bei einer Verzweigung von 1% ($\mu_{A\beta} = 80 \text{ cm}^{-1} \text{ Al}$). Kurve 3: Entsprechender Anteil der β -Aktivität des RaA.

Der Wert von $3,14$ sec ist bei der mit einiger Willkür angenommenen Funktion $f(\tau)$ natürlich unsicher, doch kann aus der Beobachtung der Durchquirlung der Emanationslösung bestimmt gesagt werden, dass ein noch schnellerer Anstieg als der angenommene nicht in Frage kommt. Dieser Wert kann deshalb als Mini-

malwert für die Lage des effektiven Nullpunkts gelten. Andererseits kann auch ersehen werden, dass die Intensität der Durchquirlung mit der Zeit nicht zunimmt, $f(\tau)$ im andern Grenzfall also höchstens durch eine Gerade dargestellt wird. Dies entspräche einem effektiven Nullpunkt bei 3,66 sec. In Wirklichkeit wird dieser daher zwischen $t = 3,14$ sec und $t = 3,66$ sec, also in der Umgebung von $t = 3,4$ sec liegen. Diese Unsicherheit des Nullpunktes wird bei der Fehlerbetrachtung ganz genau berücksichtigt.

Versuchsanordnung.

Zur Gewinnung eines von Folgeprodukten freien Ra-A wurde die in Fig. 5 dargestellte Apparatur benützt: Im wesentlichen besteht sie aus einer Vorratsflasche *A*, der Waschflasche *B*, dem Aktivierungszyylinder *C* und den Vorratsvakuumflaschen *D* und *E*. Zwei ins Freie führende Leitungsrohre sind mit *a* und *b* bezeichnet.

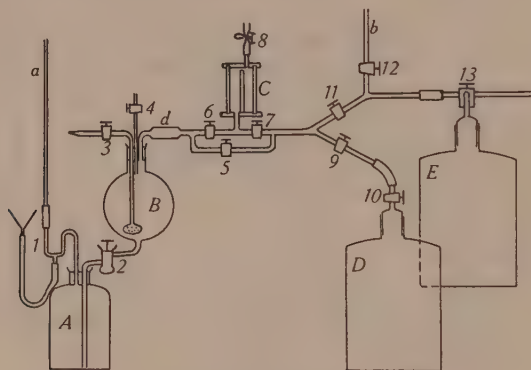


Fig. 5.

Aktivierungsapparatur.

Die 2 Liter fassende Vorratsflasche ist völlig mit emanationshaltigem Wasser gefüllt. Das nicht mit Wasser angefüllte Volumen beträgt nur ca. 1 cm^3 , so dass bei einer Temperatur von 10°C nur wenig mehr als 1‰ der gesamten Emanationsmenge sich im luftgefüllten Raum im oberen Bogen des Quecksilberverschlusses 1 befindet. Bei jedem Versuch geht diese Menge verloren und entweicht durch die Leitung *a* ins Freie. Der Glasschliff der Vorratsflasche ist mit Quecksilber abgedichtet, da Emanation die Eigenschaft besitzt, durch Hahnfett zu diffundieren. Aus demselben Grund besitzt auch der Hahn 2 einen Hg-Abschluss. Der Einsatz der Waschflasche *B* endet in einer Brause mit ungefähr einem Dutzend Löchern von 1 mm Durchmesser; es ist damit eine feine

Verteilung des die Lösung durchquirlenden Luftstromes gewährleistet. Ein Glaswollefilter *d* verhindert, dass vom Luftstrom mitgerissene Flüssigkeitströpfchen in den Zylinder gelangen können. Der inwendig polierte Eisenzylinder bildet die Aktivierungskammer *C*. Diese kann durch einen Boden und einen Deckel, die beide mit Gummi ausgelegte Nuten besitzen, abgeschlossen werden. Diese Abdichtung hält den Unterdruck genügend lange aufrecht und gestattet ein sehr rasches Abnehmen des Zylinders nach der Aktivierung. Im Boden befindet sich die Zuleitung, im Deckel ein mit Quetschhahn 8 verschliessbarer Ansatz, durch den zur Spülung nach Niederschlagen des Ra-A Luft durch die Kammer gesaugt werden kann. Ein im Innern des Zylinders vorhandener Messingstab ist mit der + 2000 Volt-Klemme des Zählrohr-Hochspannungsgerätes verbunden, während der Zylinder selbst geerdet ist. Diese Anordnung hat den Zweck, die aus den Emanationsatomen gebildeten und im Moment ihres Entstehens positiv geladenen Ra-A-Atome auf den Zylinder zu ziehen. Bei der angelegten Spannung von 2000 Volt ist praktisch Sättigung erreicht.

Die Aktivierung geht folgendermassen vor sich: Es seien zunächst alle Hähne ausser 7, 9, 10, 11 und 13 geschlossen. *C*, *D* und *E* werden mittels einer Wasserstrahlpumpe, die bei Hahn 13 abgeschlossen ist, evakuiert. Hierauf werden Hahn 7 und 9 geschlossen und 13 so gestellt, dass die Flasche *E* nur mit der linken Seite der Apparatur in Verbindung steht. Die Verschlüsse 1, 2 und 5 werden nur in dieser Reihenfolge geöffnet. Durch den Unterdruck in *E* wird der Kolben *B* in ca. 10 sec. gefüllt. Da hierbei nicht zu vermeiden ist, dass sich Emanation aus dem Wasser freimacht, wird diese durch Öffnen von Hahn 4 weggespült. Nun werden die Hähne 4 und 5 wieder geschlossen und darauf 3 und 6 geöffnet. Der Unterdruck im Zylinder *C* saugt Luft durch die Flasche *B*, die hierbei eine Portion Emanation aus der Lösung herausquirlt. Durch eine bei Hahn 3 angebrachte Kapillare ist die Geschwindigkeit der einströmenden Luft so reguliert, dass nach 5 Sekunden der Zylinder keine weitere Luft mehr ansaugt. Unterdessen ist Hahn 11 geschlossen und 9 geöffnet worden. Nach der 5. Sekunde wird durch Schliessen von 6 und Öffnen von 7 die emanationshaltige Luft in die Vorratsvakuumflasche *D* abgesaugt, der Quetschhahn 8 wird geöffnet und Luft durch den Zylinder gespült. Hierauf wird der Zylinder abgenommen, über das Zählrohr geschoben und seine Aktivität gemessen. Durch geeignete Hahnstellungen kann nach dem Versuch die Emanationslösung wieder in die Vorratsflasche *A* zurückgebracht werden, ohne dass irgend welche Emanation ins Zimmer dringen kann. Die Flaschen *D* und *E* werden im

Freien ausgelüftet. Die Verwendung von Vorratsvakuumflaschen ist, abgesehen davon, dass durch sie eine Verseuchung des Raumes verhütet wird, darum angebracht, weil sie eine hohe Sauggeschwindigkeit entwickeln, was besonders bei der Wiedervakuierung des Zylinders *C* notwendig ist. Diese Vorteile wiegen die Nachteile einer vermehrten Kompliziertheit der Anlage weit auf.

Aus früheren Versuchen konnte abgeschätzt werden, dass bei einer Durchquirlzeit von 5 Sekunden ca. $\frac{1}{100}$ der im Wasser gelösten Emanation in den Zylinder gelangt. Da aus Intensitätsgründen für jede Aktivierung ungefähr 1 mc in den Zylinder gelangen muss, ist es nötig, im Wasser 100—150 mc Emanation gelöst zu halten.

Zur Abschirmung der Strahlung sind Vorratsflasche und Kolben mit einer 10 cm dicken Bleiwand umgeben.

Das mit 85 mm Argon und 10 mm Alkoholdampf gefüllte Zählrohr besass eine Wandstärke von $5 \cdot 10^{-3}$ cm. Zur Erhöhung der mechanischen Festigkeit wurde es vor der Evakuierung in ein *Blendensystem* eingespannt, das schief auf die Wandung auftreffende Teilchen fernhalten sollte. Dadurch wird nämlich für den Fall, dass wie zu erwarten die β -Strahlung von Ra-A weicher als die von Ra-B ist, die Empfindlichkeit der Anordnung erhöht. Das möge folgende Überlegung veranschaulichen: Bei senkrechtem Durchtritt durch die Zählrohrwand wird die Strahlung von Ra-B um den Faktor $e^{-80 \cdot 0,005} = 0,670$ geschwächt, diejenige von Ra-A aber um den Faktor $e^{-200 \cdot 0,005} = 0,368$, wenn beispielsweise $\mu_A = 200 \text{ cm}^{-1}$ Al angenommen wird. Das Verhältnis der Schwächung der β -Strahlen von Ra-A und Ra-B beträgt somit 1,82. Betrachtet man dagegen schief auffallende Teilchen, die z. B. die doppelte Dicke Aluminium, also 0,01 cm, durchdringen müssen, so verhalten sich die Schwächungen wie 3,34 : 1. Die Strahlung von Ra-A wird also, wenn schiefer Einfall zugelassen ist, im ganzen gegenüber von Ra-B stärker unterdrückt und damit weniger gut bemerkbar, was eine Verminderung der Empfindlichkeit der Methode zur Folge hat. Das Blendensystem, mit dem das Zählrohr umgeben war, bestand einerseits aus ringförmigen Blechen in Abständen von 7,5 mm, andererseits aus 20 dazu senkrechten radial angeordneten Wänden. Die Konstruktion war so getroffen, dass sie ein rasches Überstülpen des Zylinders erlaubte, ohne dass dabei der aktive Niederschlag abgescheuert wurde.

Da das Ra-A auf dem Zylinder nicht genau dosiert werden konnte, war damit zu rechnen, dass zu Beginn der Beobachtung, also ungefähr 10 Sekunden nach Beginn der Aktivierung, 3—10 Teilchen pro Sekunde, hingegen bis über 30 Teilchen pro Sekunde bei

Beendigung der Beobachtung registriert wurden. Es war daher nötig, ein Zählwerk mit hohem Auflösungsvermögen zu wählen. Hierzu wurde eine Taschenuhr so umgebaut, dass ihr Sekundenzeiger als Zählwerk diente. Dies hatte zugleich den Vorteil, dass der Zählerstand mit Leichtigkeit photographisch registriert werden konnte, ohne dass zu befürchten war, dass eine Messung wegen Unlesbarkeit infolge eines während der Aufnahme erfolgten Zifferwechsels unbrauchbar geworden wäre, wie das bei einem Telephonzählwerk bei hohen Stosszahlen ziemlich oft der Fall gewesen wäre.

Wegen ihres hohen Auflösungsvermögens kam die von PICKERING⁹⁾ angegebene Schaltung für den Verstärker zur Anwendung. Das Auflösungsvermögen der gesamten Zählordnung betrug $5 \cdot 10^{-3}$ sec.

Um den Anstieg der Aktivität in Funktion der Zeit messen zu können, war neben dem Zählwerk eine schnell laufende Stoppuhr angebracht, die zu Beginn der Aktivierung in Gang gesetzt wurde. Uhr und Zählwerk photographierten wir, sobald der aktivierte Zylinder über das Zählrohr geschoben war, in 2-sekündlichen Intervallen. Jede Messreihe bestand aus 12 Aufnahmen, deren erste auf die Zeit $t = 9$ sec nach Beginn der Aktivierung fiel. Zur Verwendung kam eine Leica-Kamera, bei der Filmtransport und Aufziehen des Verschlusses automatisch durch einen Leica-Motor erfolgten. Die noch vorhandenen Ungleichheiten in der Länge der Intervalle wurden bei der Auswertung berücksichtigt.

Messergebnisse und Fehlerrechnung.

Vor Beginn jeder Messreihe wurde der Nulleffekt ermittelt. Er bewegte sich zwischen 0,7 und 1,3 Stößen pro Sekunde, je nach der Verseuchung des Zimmers und des Blendensystems mit langlebigem Niederschlag. Im ganzen wurden 16 Messreihen aufgenommen. Die schwächste Aktivierung lieferte für das Intervall der 29. und 30. Sekunde 22, die stärkste 68 Stösse, wobei der Nulleffekt abgezogen ist. Zur Auswertung wurden zunächst für jede einzelne Messreihe die Stosszahlen in Funktion der Zeit aufgetragen. Da die photographischen Aufnahmen mit kleinen Abweichungen von den Sollzeiten behaftet waren, war eine Reduktion der Stosszahlen auf diese Zeiten notwendig; sie geschah durch eine Verschiebung der Punkte parallel zu einer durch die Messpunkte gelegten Geraden. Die zu gleichen Zeiten gehörenden Messpunkte aller 16 Messreihen wurden dann zusammengezählt und damit die Messpunkte gewonnen, die in Fig. 6 eingetragen sind. Die Ordinate gibt die Gesamtteilchenzahl pro Sekunde. (Die aus

der Addition erhaltenen Werte sind daher noch durch 2 dividiert.) Der erste Messpunkt, der den Zeitraum der 9. und 10. Sekunde nach Beginn der Aktivierung umfasst, und deshalb auf die 10. Sekunde fällt, ist mit 162 Stößen gesichert, der letzte Messpunkt bei der 30. Sekunde mit 598 Stößen. Durch die Messpunkte wurde mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate eine Gerade gelegt. Auf diese Weise konnte auch der mittlere Fehler in der Ordinate beim effektiven Nullpunkt, der wie schon bemerkt bei $t = 3,4 \pm 0,2$ sec liegt, ermittelt werden.

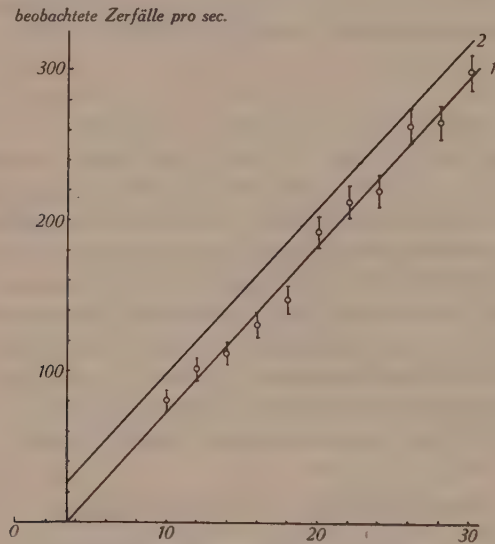


Fig. 6.

○ Messpunkte mit Angabe der mittleren Fehler.

Kurve 1: Aus den Messpunkten erhaltene Anstiegsgerade. Kurve 2: Berechnete Anstiegsgerade bei einer Verzweigung von 1^0_{100} ($\mu_{A\beta} = 80 \text{ cm}^{-1} \text{ Al}$).

Die Extrapolation der Messungen zeigt, dass die Aktivität an diesem Punkt 0 ± 15 Stöße/sec beträgt. Es liegt somit überhaupt keine Andeutung einer β -Strahlung von Ra-A vor.

Ausser dem angegebenen statistischen Fehler muss noch mit den systematischen Fehlern gerechnet werden. Hier kommt der Fehler in Betracht, der durch ungenaue Bestimmung der Trennzeit des Zählwerks verursacht ist. Die durchschnittliche Korrektur für den letzten Punkt beträgt 3 Stöße/sec. Da die Korrektur in erster Näherung proportional der Trennzeit ist und diese mit einer Genauigkeit von 30% gemessen wurde, beträgt der Fehler in der Korrektur höchstens ± 1 Stoss/sec. Das ergibt für 16 Messreihen

± 16 Stösse/sec für den letzten Punkt. Die Genauigkeit der Stosszahlen im Anfang der Messungen ist dagegen ziemlich unempfindlich auf eine fehlerhafte Trennzeitbestimmung, da hier die Korrekturen ohnehin klein sind. Durch Addition dieses systematischen Fehlers zum mittleren zufälligen Fehler wird der Fehler im Nullpunkt ± 21 Stösse/sec. Der Vergleich mit der in Fig. 6 dargestellten Anstiegskurve zeigt, dass die Intensität von 21 Stößen/sec am Nullpunkt bei der hier vorliegenden Neigung der Anstiegskurve einer Verzweigung von $0,8\%$ entspricht, wenn die Härte der Strahlung $\mu = 80 \text{ cm}^{-1}$ beträgt.

Ist aber die Strahlung weicher, so muss die β -Strahlung des Ra-A intensiver sein, damit sie gegenüber derjenigen von Ra-B gleich stark hervortritt. Für verschiedene Werte von μ erhält man folgenden Gang der Empfindlichkeit der Methode auf eine Verzweigung bei Ra-A (Fig. 7, Kurve 1).

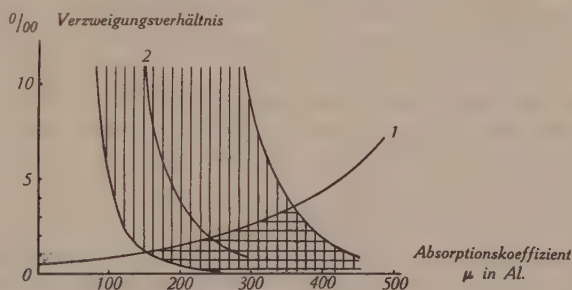


Fig. 7.

Empfindlichkeit des Versuchs auf eine Verzweigung in Funktion der Härte der β -Strahlung des RaA (1). Wahrscheinlichster Zusammenhang zwischen Härte der Strahlung und Verzweigungsverhältnis (2).

Zunächst wäre nun durchaus denkbar, dass eine erhebliche Verzweigung mit weicher Strahlung der Beobachtung entgangen sein könnte. Doch sind Härte der Strahlung und Abzweigungsverhältnis nicht unabhängig voneinander. Dieses ist durch die β -Halbwertszeit des Ra-A bestimmt, jene im wesentlichen durch die Maximalenergie der ausgesandten β -Teilchen. β -Halbwertszeit und Maximalenergie der β -Spektren sind aber durch die Sargent-Beziehung miteinander verknüpft. Mit ihr kann der in Fig. 7 durch Kurve 2 dargestellte Zusammenhang gefunden werden. Da die genannte Beziehung die Verhältnisse nur grössenordnungsmässig wiedergibt, ist die Kurve 2 nach oben und unten um einen Faktor 10 zu dem in der Figur schraffierten Gebiet erweitert. Unter Berücksichtigung der Empfindlichkeit des Versuches kann somit ausgesagt werden,

dass eine allfällige Verzweigung einem Punkt entsprechen muss, der im kreuzweise schraffierten Gebiet des Diagramms liegt und daher *nicht mehr als 3,5%* betragen kann.*)

Wir möchten unserem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER, für sein stets förderndes Interesse bei der Ausführung der Arbeiten bestens danken.

Unser Dank gilt auch dem Radium-Institut Genf für die Überlassung der Radium-Emanation und Herrn Prof. E. RAMSER, der uns für die Versuche, die wegen der Gefahr einer radioaktiven Verseuchung ausserhalb des physikalischen Institutes ausgeführt wurden, die Räumlichkeiten des kulturtechnischen Laboratoriums der E.T.H. zur Verfügung stellte. Dem optischen Institut W. Koch danken wir für die freundliche leihweise Überlassung des Leica-Motors.

Zürich, Physikalisches Institut der E.T.H.

Literaturverzeichnis.

- 1) MINDER, Helv. Phys. Acta **11** (1938), 497.
- 2) TURNER, Phys. Rev. **57** (1940), 950.
- 3) MINDER, Helv. Phys. Acta **13** (1940), 144.
- 4) KARLIK und BERNERT, Naturwiss. **30** (1942), 685.
- 5) HULUBEI und CAUCHOIS, C. R. **209**, 40.
- 6) VALADARES Atti Reale Acad. d'Italia, Rendiconti **7**, Ser. 2 (1941), 351, 1049.
- 7) CORSON, MAC KENZIE und SEGRÈ, Phys. Rev. **58**, (1940), 672.
- 8) HEISENBERG, Congrès Solvay Paris **1934**, 289 (zitiert in v. Weizsäcker, Atomkerne, S. 40).
- 9) PICKERING, Rev. Sc. Instr. **9** (1938), 180.

*) *Anmerkung bei der Korrektur:* Soeben berichten KARLIK und BERNERT in Naturwiss. **31**, 298 (1943), dass sie mittels Ionisationskammer und linearem Verstärker α -Strahlen nachweisen konnten, welche sie dem Element 85^{218} zuschreiben. Aus ihren Messungen schliessen sie auf ein Verzweigungsverhältnis bei Ra-A von 0,4%, was mit unseren Resultaten durchaus in Einklang steht.

Zur Frage der Resonanzabsorption der 2,62 MeV γ -Strahlung in Blei

von K. Zuber,

(23. VI. 1943.)

Die Bedingungen, die zu erfüllen sind, damit neben der normalen Absorption von γ -Strahlen eine Resonanzabsorption durch die Atomkerne beobachtbar wird, werden diskutiert. Die Verwendung einer radioaktiven Quelle als Strahler ist ungeeignet. Es werden Versuche mitgeteilt, in denen die Absorbierbarkeit der in Blei ausgelösten Streustrahlung durch Hg und Pb bestimmt wird. Aus den Versuchen kann geschlossen werden, dass die obere Grenze der Oszillatorenstärke des in Frage kommenden Übergangs bei einigen 10^{-4} liegt.

1. Resonanzerscheinungen zwischen γ -Strahlen und Atomkernen sind zu erwarten, wenn der emittierende und der absorbierende Kern identisch sind und die γ -Strahllinie bei einem Übergang in den Grundzustand emittiert wird. Es ist sehr wahrscheinlich, dass die 2,62 MeV γ -Strahlung, die nach dem β -Zerfall von einem angeregten Th—D-Kern emittiert wird, eine Resonanzabsorption in Blei erfahren sollte, da einerseits gewöhnliches Blei zu 50% aus dem Bleiisotop 208 (Th-Blei) besteht, andererseits nach OPPENHEIMER¹⁾ die Linie 2,62 MeV einem Übergang entspricht, bei dem der Endzustand der Grundzustand des Kerns ist (Fig. 1).

Die Beobachtung einer Resonanzabsorption durch Atomkerne ist im Vergleich zu der entsprechenden Erscheinung im optischen Gebiet schwieriger, weil sich immer noch die normale γ -Strahlabsorption durch den Comptoneffekt, die Paarbildung und eventuell durch den Photoeffekt überlagert. Man wird sie nur feststellen können, wenn man die experimentellen Bedingungen so wählt, dass sich die Resonanzabsorption möglichst stark bemerkbar machen kann. Diese Bedingungen sind aus Versuchen über Linienabsorption im optischen Gebiet bekannt, aber bei entsprechenden γ -Strahlversuchen nicht genügend beachtet worden.

Damit eine Resonanzabsorption ein Maximum wird, darf die Emissionslinie nicht Selbstumkehr besitzen und die Breiten der Emissions- und Absorptionslinie müssen gleich sein. Wird als γ -Strahler eine radioaktive Quelle, z. B. RaTh, verwendet, so ist die Emissionslinie sehr breit. Beim β -Zerfall von Th—C'' erhalten

¹⁾ F. OPPENHEIMER, Proc. Cambr. Phil. Soc. **32**, 328, 1936.

die angeregten Th—D -Kerne einen Rückstoss, dessen Energie bis zu 12,8 eV gehen kann. Die Breite der Absorptionslinie ist dagegen durch die thermische Bewegung gegeben, deren Energie von der Grössenordnung $k \cdot T = 2,6 \cdot 10^{-2}$ eV ist. Die Linienbreiten verhalten sich daher etwa wie 20 : 1, die Resonanzabsorption wird sich daher im wesentlichen nur auf die Mitte der Emissionslinie beschränken.

Lässt man dagegen die γ -Strahlen der Quelle auf Blei auffallen, so wird man erwarten können, dass, falls überhaupt Resonanz

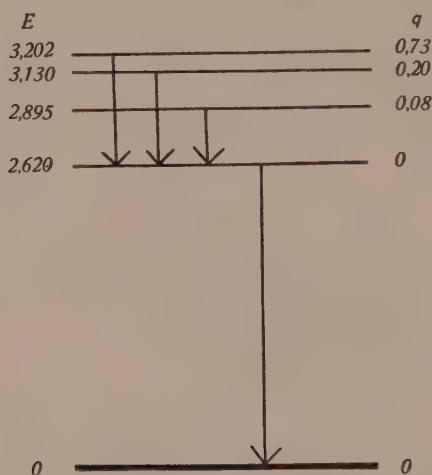


Fig. 1.

Niveau-Schema des nach dem β -Zerfall Th-C'' \rightarrow Th-D angeregten Bleikern 208.

E = Anregungsenergie, q = Anregungswahrscheinlichkeit. (OPPENHEIMER.)

auftreten kann, die Streustrahlung zum Teil aus Resonanzstrahlung bestehen wird, deren Linienbreite durch die thermische Bewegung der Bleikerne bestimmt wird. Es erscheint daher vernünftiger, die Frage der Resonanzabsorption mit Hilfe der in Blei ausgelösten Streustrahlung zu untersuchen. Es ist aber zu beachten, dass neben der erwünschten Resonanzstrahlung noch andere Komponenten in der Streustrahlung vorhanden sein werden, nämlich Comptonstreuung, Vernichtungsstrahlung von Positronen und Bremsstrahlung der in Blei durch die einfallende γ -Strahlung ausgelösten Elektronen¹⁾. Diese Strahlungen sind aber zum Teil wesentlich energieärmer und werden sich durch Filter weitgehend schwächen lassen. Als Filter ist ein Material zu wählen, das einen möglichst kleinen Wirkungsquerschnitt für Paarbildung besitzt,

¹⁾ E. STAHEL, H. KETELAAR und P. KIPFER, Journ. de Phys. **7**, 379, 1936.

wie z. B. Cu. Auf alle Fälle darf man als Filter bei derartigen Versuchen nicht Blei wählen, da ja sonst bei vorhandener Resonanz gerade die Resonanzstrahlung stark absorbiert werden würde.

Die Frage der Resonanzabsorption der 2,62 MeV-Strahlung in Blei ist von MEITNER und HUPFELD¹⁾ und von GRAY und TARRANT²⁾ im Zusammenhang mit anderen Fragestellungen untersucht worden. MEITNER und HUPFELD verwendeten eine Ra-Th-Quelle, deren Strahlung durch 4 cm Blei gefiltert worden war. Sie untersuchten, ob Blei im Vergleich zu benachbarten Elementen wesentlich stärker absorbiert. Da ihre Emissionslinie wegen des Rück-

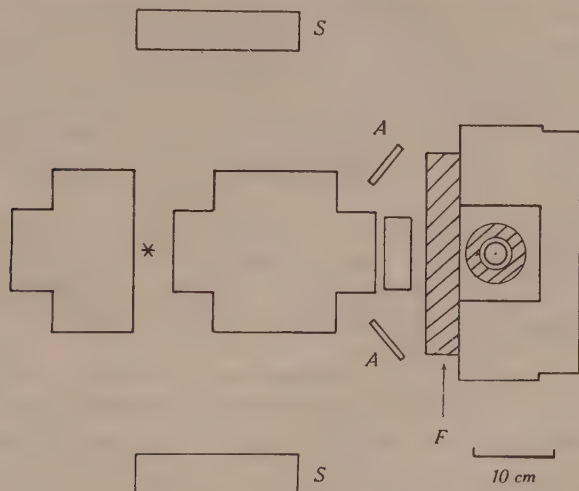


Fig. 2.

Horizontalschnitt durch die Versuchsanordnung. *S* sind die Streustrahler, *A* die Absorber, * die Quelle. Die nicht schraffierten Teile bestehen aus Blei, die schraffierten aus Messing oder Kupfer.

stosses sehr breit und wegen des Bleifilters beim Vorhandensein von Resonanz auch stark selbstumgekehrt war, kann aus ihrem negativen Ergebnis nichts geschlossen werden. GRAY und TARRANT untersuchten die Streustrahlung in Blei und Eisen. Da sie zur Filterung der Streustrahlung 16,5 cm Blei verwendeten, kann auch aus ihren negativen Ergebnissen kein Schluss gezogen werden. Es erschien daher angezeigt, dieses Problem unter Beachtung der experimentellen Bedingungen, die man bei Fragen über Linienabsorption erfüllen muss, nochmals aufzugreifen.

2. Die Versuchsanordnung ist in Fig. 2 wiedergegeben. Als primäre Strahlungsquelle diente ein Ra-Th-Präparat von leider

¹⁾ L. MEITNER und H. HUPFELD, Z. f. Phys. **67**, 147, 1930.

²⁾ L. H. GRAY und G. T. P. TARRANT, Proc. Roy. Soc. **135**, 662, 1932.

nur 8,6 mgr Ra-Äquivalent. Die ungefilterte γ -Strahlung fällt auf Streustrahler aus Blei, deren Dimensionen bei einem Teil der Versuche $20 \times 20 \times 1$ cm, beim andern Teil $20 \times 20 \times 5$ cm betrug. Zur Messung der Streustrahlung wurde ein Zählrohr aus Kupfer (Wandstärke 2 mm, Durchmesser 20 mm und 8 cm Länge) verwendet. Das Zählrohr befand sich in einem Kupferzylinder von 2 cm Wandstärke. Zur weiteren Filtrierung der Streustrahlung musste diese ein Messingfilter von 3,7 cm Dicke unter 45° durchsetzen. Die gesamte Filterdicke war somit 2 cm Kupfer + 5,2 cm Messing.

Vor dem Messing-Filter F konnten die Absorber A aus Pb oder Hg aufgestellt werden. Ihre Dicke betrug bei dem Versuch mit dem 1 cm dicken Streustrahler etwa 0,5 cm, bei dem andern Versuch 1 cm. Als Gefäß für das Hg wurden Tröge aus dünnem Sperrholz verwendet. Um möglichst gleiche Bedingungen zu haben, wurden auch die Bleiabsorber in den Trögen eingesetzt verwendet.

Bestimmt wurde der Absorptionskoeffizient der gefilterten Streustrahlung für Blei und Quecksilber. Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, ist das Verhältnis der Absorptionskoeffizienten für verschieden harte γ -Strahlen praktisch konstant.

Tabelle 1.

Quelle	Filter (Blei)	μ_{Pb}	$\mu_{\text{Hg}}/\mu_{\text{Pb}}$	Lit.
Ra-Th	3,5 cm	0,474 cm^{-1}	1,20	1
Ra	3,5 cm	0,533 cm^{-1}	1,17	2
Ra	1 cm	0,661 cm^{-1}	1,25	3
Ra	0,5 cm	0,888 cm^{-1}	1,16	2

Zur Kontrolle der Anordnung wurde ein schwaches Ra-Präparat, das sich in einem Bleizylinder von 2 mm Wandstärke befand, an die Stelle des Streukörpers gebracht und die Absorptionskoeffizienten bestimmt. Es ergab sich $\mu_{\text{Pb}} = 0,513 \pm 0,014 \text{ cm}^{-1}$, $\mu_{\text{Hg}} = 0,643 \pm 0,013 \text{ cm}^{-1}$ und somit $\mu_{\text{Hg}}/\mu_{\text{Pb}} = 1,25 \pm 0,05$. Der Absorptionskoeffizient für Pb ist etwas kleiner als der Wert, den MEITNER und HUPFELD⁴⁾ für die durch 3 cm Blei gefilterte γ -Strahlung des Radiums angeben ($\mu_{\text{Pb}} = 0,555 \text{ cm}^{-1}$). Die Ab-

¹⁾ L. MEITNER und H. HUPFELD, l. c.

²⁾ K. W. F. KOHLRAUSCH, Wien. Ber. **126**, 441, 683, 887, 1917.

³⁾ A. AHMAD, Proc. Roy. Soc. **105**, 507, 1924.

⁴⁾ l. c.

weichung rührt wahrscheinlich daher, dass in der hier verwendeten Anordnung der Absorber sich ziemlich nahe vor dem Zählrohr befindet. Die Anordnung gibt aber das zu erwartende Verhältnis für die beiden Absorptionskoeffizienten richtig wieder.

Zur Bestimmung der Absorbierbarkeit der Streustrahlung des Bleis wurden folgende Stosszahlen bestimmt.

N_a : ohne Streustrahler, ohne Absorber (Nullstösse);

N_b : mit Streustrahler, ohne Absorber ($N_a - N_b$ = Streuintensität);

N_c : mit Streustrahler, mit Absorber;

N_d : ohne Streustrahler, mit Absorber.

Der Versuch ergab die Gleichheit von N_a mit N_d . Dies heisst, dass die in der weitem Umgebung ausgelöste Streustrahlung zu weich ist, um in merklicher Intensität das Filter zu durchsetzen. Die Nullstösse waren 12,8 pro Minute.

Mit dem Streustrahler von 1 cm Dicke wurden Absorber von 0,5 cm Dicke verwendet. Die Streuintensität war $4,37 \pm 0,28$ Stösse pro Minute. Es ergab sich $\mu_{\text{Hg}} = 1,36 \pm 0,21 \text{ cm}^{-1}$, $\mu_{\text{Pb}} = 1,27 \pm 0,22 \text{ cm}^{-1}$ und $\mu_{\text{Hg}}/\mu_{\text{Pb}} = 1,07 \pm 0,25$.

Da bei diesem Versuch die Absorptionskoeffizienten noch sehr hoch waren, wurde beim zweiten Versuch ein Streustrahler von 5 cm Dicke verwendet. Die härteren Komponenten der Streustrahlung werden dann etwas bevorzugt sein. Die Streuintensität stieg auf $5,83 \pm 0,22$ Stösse pro Minute an. Es wurde $\mu_{\text{Hg}} = 0,928 \pm 0,073 \text{ cm}^{-1}$, $\mu_{\text{Pb}} = 0,746 \pm 0,064$ und $\mu_{\text{Hg}}/\mu_{\text{Pb}} = 1,24 \pm 0,15$ gefunden. Eine Resonanzabsorption durch das Blei ist innerhalb der Versuchsgenauigkeit nicht festzustellen.

3. Da die Versuche ein negatives Resultat ergeben haben, sind sie keine Bestätigung dafür, dass bei der Emission der 2,62-MeV-Linie der angeregte Th-D-Kern entsprechend dem Termschema von OPPENHEIMER in den Grundzustand übergeht. Wenn man aber annimmt, dass dies tatsächlich der Fall sei, so lässt sich aus den Versuchen eine grobe Abschätzung der oberen Grenze der Oszillatorenstärke des Überganges machen.

Wir nehmen an, die natürliche, durch Strahlungsdämpfung allein verursachte Linienbreite sei klein gegenüber der durch Dopplereffekt wegen der thermischen Bewegung bedingten Linienbreite. Ferner sei als Geschwindigkeitsverteilung die Maxwell'sche vorausgesetzt. Dann lässt sich der Verlauf des Absorptionskoeffizienten darstellen durch:

$$\mu_\nu = \mu_0 e^{-\left[\frac{2(\nu - \nu_0)}{\Delta\nu_D} \sqrt{\ln 2} \right]^2}$$

Dabei bedeutet ν_0 die Frequenz der Linienmitte und

$$\Delta \nu_D = 2 \nu_0 \cdot \sqrt{\frac{2 k T}{M c^2} \ln 2}$$

die Dopplerbreite, wobei M die Masse des fraglichen Atomkerns ist. Für μ_0 lässt sich der folgende Ausdruck angeben¹⁾:

$$\mu_0 = \frac{2}{\Delta \nu_D} \cdot \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda_0^2}{8 \pi} \cdot \frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{N'}{\tau}.$$

Hier bedeutet τ die mittlere Lebensdauer des angeregten Niveaus, g_2 sein statistisches Gewicht, g_1 das entsprechende des Grundzustandes. N' ist die Zahl der zur Resonanz geeigneten Kerne pro cm^3 . Ist N die Zahl aller Bleikerne im cm^3 , so ist $N' = N/2$. Die mittlere Lebensdauer hängt mit der Oszillatorenstärke f zusammen:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{8 \pi^2 e^2}{m c} \cdot \frac{g_1}{g_2} \cdot \frac{1}{\lambda_0^2} \cdot f.$$

Es bedeutet e die Ladung und m die Masse des strahlenden Kernteilchens. Hierfür wird wie üblich das Proton angenommen. Für den Wirkungsquerschnitt in der Linienmitte ergibt sich dann pro Bleikern berechnet, falls $r_0 = e^2/mc^2 = 1,52 \cdot 10^{-16} \text{ cm}$ gesetzt wird

$$\sigma_0 = \frac{\mu_0}{N} = \frac{1}{\Delta \nu_D} \cdot \sqrt{\pi \cdot \ln 2} \cdot r_0 \cdot c \cdot f.$$

Mit $T = 300^\circ \text{ K}$ und $r_0 = 6,38 \cdot 10^{20} \text{ sec}^{-1}$ ist $\Delta \nu_D = 5,48 \cdot 10^{14} \text{ sec}^{-1}$ und damit wird

$$\sigma_0 = 1,22 \cdot 10^{-20} \cdot f \text{ cm}^2.$$

Dies ist der Wert für den maximalen Wirkungsquerschnitt in der Linienmitte, die Ränder der Linie besitzen einen geringeren Wert. Um einen mittleren Wert σ für die Wechselwirkung zu erhalten, ist dieser so zu definieren, dass er für eine Schicht l die gleiche Durchlässigkeit liefert, wie sie nach der Formel für die Linienabsorption²⁾ zu erwarten ist, d. h.,

$$D = 1 - \sigma \cdot l \cdot N = 1 - \frac{\sigma_0 \cdot l \cdot N}{\sqrt{1 + \left(\frac{A_e}{A_a}\right)^2}}.$$

¹⁾ A. MITCHELL und M. ZEMANSKY, *Resonance Radiation and excited atoms* (Cambridge 1934).

²⁾ A. v. MALINOWSKI, *Ann. d. Phys.* **44**, 935, 1914; M. SCHEIN, *Helv. Phys. Acta* **2**, Suppl. 1, 1929.

wobei Δ_e und Δ_a die Breiten der Emissions- bzw. der Absorptionslinie bedeuten. Dabei ist $\sigma_0 \cdot l \cdot N \ll 1$ vorausgesetzt (Absorption in dünner Schicht).

Für den Fall, dass $\Delta_e = \Delta_a$ ist, wird

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} = 8,63 \cdot 10^{-21} \cdot f \text{ cm}^2$$

MEITNER und HUFFELD haben in ihrer Versuchsanordnung, bei der sich Resonanzabsorption sicher nicht bemerkbar machen kann, pro Bleikern

$$\sigma' = 1,43 \cdot 10^{-23} \text{ cm}^2$$

gefunden. Bei $f = 10^{-4}$ würde somit der Resonanzquerschnitt noch 6% des normalen Wirkungsquerschnittes ausmachen, falls die Bedingung gleicher Linienbreiten erfüllt ist. Nimmt man dagegen eine Emissionslinie mit einer 20 mal grösseren Breite an, so reduziert sich der Resonanzquerschnitt zu

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{20} = 6,1 \cdot 10^{-22} f \cdot \text{cm}^2.$$

Es würde dann mit $f = 10^{-4}$ der Resonanzquerschnitt etwa 4‰ des normalen Wirkungsquerschnittes betragen.

Es soll nun die obere Grenze von f abgeschätzt werden. Dazu ist es notwendig zu wissen, wie sich die Stosszahl bei der Messung der Streustrahlung auf die verschiedenen Komponenten verteilt. Das Problem lässt sich leicht behandeln, wenn man von der Absorption der Streustrahlung im Streukörper absehen darf. Da es nur auf eine Abschätzung ankommt, soll im folgenden diese Annahme gemacht werden.

Tabelle 2.

Komponente	Energie (MeV)	J	D	A	Z
Comptonstreuung . .	0,44	5,7	0,45	0,17	0,44
Vernichtungsstrahlung	0,5	2,0	0,55	0,20	0,22
Bremsstrahlung ¹⁾ . .	1—2,38	0,27	2,4—6,5 Mittel 4,5	0,38—0,91 Mittel 0,64	0,78
Resonanzstrahlung .	2,62	490 $\cdot f$	7,5	1	3700 $\cdot f$

In der Tabelle 2 sind die in Frage kommenden Grössen zusammengestellt. J bedeutet die Intensität der Streustrahlung in willkürlichen Einheiten, die in Richtung des Zählrohres in einen

¹⁾ Unter Annahme isotroper Verteilung der Bremsstrahlung berechnet.

bestimmten Raumwinkel emittiert wird. Dabei sind bei der Bremsstrahlung nur die Quanten mit einer Mindestenergie von 1 MeV berücksichtigt. D ist die Durchlässigkeit des Filters in Prozenten und A die Ausbeute des Zählrohres, wieder in willkürlichen Einheiten ausgedrückt. Dabei ist angenommen, dass die Ausbeute proportional der Quantenenergie ist. In der letzten Kolonne bedeutet $Z = J \cdot D \cdot A$ die Stosszahl in willkürlichen Einheiten, die jede Komponente für sich im Zählrohr geben würde.

Die Tabelle zeigt, dass bei Annahme $f = 10^{-3}$ rund 72% aller Stösse der Resonanzstrahlung zuzuordnen wäre. Da die 2,62-MeV-Strahlung in Hg einen Absorptionskoeffizienten von $0,57 \text{ cm}^{-1}$ besitzt, müsste in diesem Fall der Absorptionskoeffizient für die Gesamtstrahlung unter $0,85 \text{ cm}^{-1}$ liegen. Gefunden wurden aber höhere Werte, was darauf hinweist, dass die weicheren Komponenten in der Streustrahlung relativ stärker vertreten sein müssen. Ferner wäre für die Resonanzstrahlung der Wirkungsquerschnitt in Blei um 60% erhöht, so dass das Verhältnis $\mu_{\text{Hg}}/\mu_{\text{Pb}}$ sehr deutlich unter dem normalen Wert liegen müsste. Dagegen wäre $f = 10^{-4}$ mit der gefundenen Absorption in Hg und dem festgestellten Verhältnis der Absorptionskoeffizienten verträglich. Obschon die Abschätzung nur sehr roh ist, kann man doch sagen, dass f sicherlich kleiner als 10^{-3} sein muss, doch kann die aus diesen Versuchen sich ergebende obere Grenze von f bei einigen 10^{-4} liegen.

Physik. Institut der Universität Zürich.

Compte-rendu de la séance de la Société Suisse de Physique

tenue à Schaffhouse les 28 et 29 août 1943.

Président: Prof. Dr. H. KÖNIG (Berne).

Vice-président: Prof. Dr. G. WENTZEL (Zürich).

Secrétaire: Prof. Dr. A. MERCIER (Berne).

Partie administrative.

La Société a reçu les deux nouveaux membres suivants:

M. W. KISTLER (Zürich) et M. L. SAXER (Fribourg).

Elle a enregistré la démission de

M. J. BOREL, Dr. ès Sc. (Neuchâtel).

La Société compte à ce jour 258 membres.

Partie scientifique.

Wilsonkammer-Untersuchung der Paaremission natürlicher β -Strahler

von H.-G. HEINE, H. BRADT und P. SCHERRER (E.T.H. Zürich).

Es wird über experimentelle Untersuchungen berichtet, bei welchen die von natürlichen β -Strahlern ausgesandten positiven Teilchen mit Hilfe der Wilsonkammer mit magnetischer Ablenkung untersucht werden. Insbesondere wurde die Emission positiver Teilchen auch beim RaE nachgewiesen. Auf die Schwierigkeiten, welche sich der Auffassung dieser positiven Teilchen als positiver Partner von Elektronenpaaren entgegenstellen, wird hingewiesen und eine mögliche Deutung in Vorschlag gebracht. Die ausführliche Arbeit erscheint in den H.P.A.

Untersuchung der Paaremission einiger β -Strahler mit Koinzidenz-Zählrohren und mit β -Spektrograph

von H. BRADT, H.-G. HEINE und P. SCHERRER (E. T. H. Zürich).

Es wird von Versuchen berichtet, in welchen der Nachweis einer paarweisen Emission entgegengesetzt geladener leichter Teilchen durch β -Strahler mit anderen Hilfsmitteln als der Wilson-

kammer geführt wird. So wird nach Dreifach-Koinzidenzen gesucht und eine Trennung der positiven und negativen Teilchen im magnetischen Feld des β -Spektrographen vorgenommen. Bei der Deutung dieser Versuche treten analoge Schwierigkeiten wie bei der Deutung der Wilsonkammer-Untersuchungen auf. Die ausführliche Arbeit erscheint in den H.P.A.

Streuung schneller Elektronen an Jodkernen

von W. SIGRIST (E.T.H. Zürich).

Mit der Wilsonkammer wird die elastische Streuung schneller Elektronen an Jodkernen gemessen.

Als streuendes Gas wird Methyljodid verwendet. Die Elektronen von einer Energie bis zu 3,16 MeV werden durch ein Magnetfeld von 1000 Oerstedt abgelenkt.

Auf 2700 stereoskopischen Aufnahmen wurden ca. 7000 Spuren mit einer totalen Bahnlänge von 620 m ausgemessen und dabei 250 messbare elastische Streuungen um Winkel über 15° festgestellt. Unter Berücksichtigung aller nötigen Korrekturen ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit der Formel von MOTT¹⁾. Für einen Energiebereich von 1–3 MeV und den Winkelbereich von 15° – 180° beträgt das Verhältnis des experimentellen Wertes zum theoretischen Wert

$$\frac{N_{\text{exp}}}{N_{\text{th}}} = 1,04 \pm 0,15.$$

Auch die Energie- und Winkelabhängigkeit der Streuung steht im Einklang mit der MOTT'schen Formel. Die Arbeit erscheint demnächst ausführlich in den H.P.A.

Der inverse Piezoeffekt von KH_2PO_4

von A. VON ARX und W. BANTLE (E.T.H. Zürich).

In einer früheren Arbeit²⁾ wurde der Piezomodul d_{36} des seignette-elektrischen Kristalls KH_2PO_4 von Zimmertemperatur bis zur Curietemperatur ($\Theta = 123^\circ$ abs.) mit Hilfe des *direkten* Piezoeffekts gemessen. Für Temperaturen unterhalb des Curiepunktes wird aber der Zusammenhang zwischen Polarisierung und

¹⁾ MOTT, Proc. Roy. Soc. A 124 445 1929, 135 429 1932.

²⁾ BANTLE W. und CAFLISCH CH., H.P.A. XVI, 235, 1943.

mechanischem Druck durch eine Hysteresisschleife dargestellt, welche nur bestimmt werden kann, wenn man sowohl Zug- als auch Druckkräfte auf den Kristall einwirken lassen kann. Dies war jedoch mit der damaligen Apparatur nicht möglich.

Da es experimentell einfacher ist, ein Feld umzupolen als eine Druckkraft stetig in eine Zugkraft umzuwandeln, haben wir die Methode des direkten Piezoeffekts aufgegeben. Statt dessen verwendeten wir nun den *inversen* Piezoeffekt, und es gelang uns auf diese Weise, das ganze Temperaturgebiet von Zimmertemperatur bis zur Temperatur der flüssigen Luft auszumessen. Für Temperaturen in der Nähe des Curiepunktes sind die Messresultate,

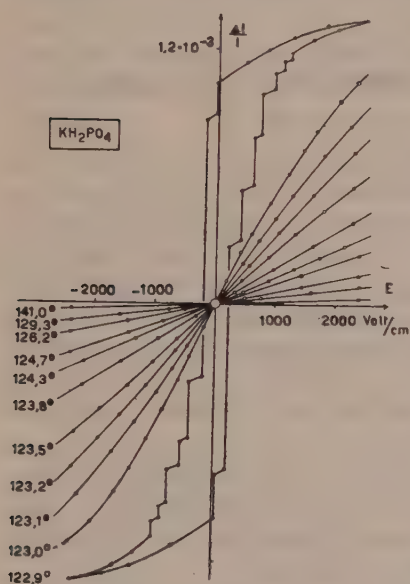


Fig. 1.

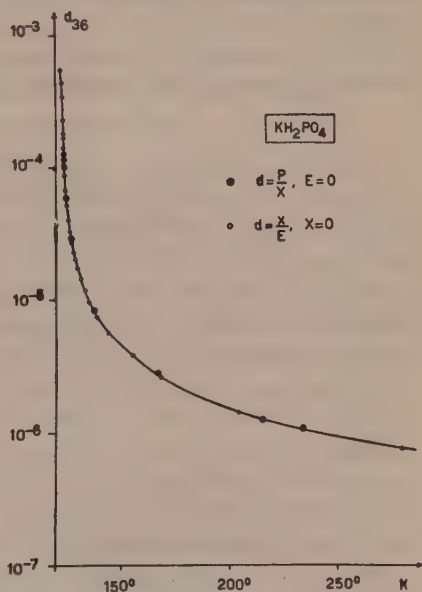


Fig. 2.

d. h. die Verlängerung $\Delta l/l$ in Funktion des elektrischen Feldes E (ohne äussere mechanische Kraft) in Fig. 1 dargestellt. Von Zimmertemperatur bis 124° abs. erwies sich der Zusammenhang von $\Delta l/l$ mit der Feldstärke als linear; von 124° abs. bis 123° abs. treten Glieder höherer Ordnung auf, und unterhalb 123° abs. erhielten wir die erwartete Hysteresisschleife. Die dabei auftretenden sprunghaften Änderungen stimmen überein mit den bereichsweisen Umklappvorgängen im Kristall.

Die Auswertung der Messresultate oberhalb der Curietemperatur ergibt, aus der Neigung der Kurven im Nullpunkt, den

Piezomodul d_{36} . (Fig. 2. Leere Kreise.) Zum Vergleich sind in dieser Figur auch die Resultate der Messungen des direkten Piezoeffekts als volle Kreise eingezeichnet. Die Übereinstimmung beider Messmethoden ist sehr gut.

Im Curiegebiet kann das piezoelektrische Verhalten dieses Kristalls nicht mehr durch die Angabe eines Moduls, sondern nur noch durch die graphische Darstellung $\Delta l/l (E)$, d. h. die Hysteresis-kurve charakterisiert werden. Wir haben deshalb bei verschiedenen Temperaturen diesen Zusammenhang aufgenommen. Die daraus entnehmbare Sättigungsdeformation zeigt einen ähnlichen Temperaturverlauf wie die Sättigungspolarisation. Die ausführliche Arbeit erscheint in den H.P.A.

Untersuchung über die rasche Deformation von Aluminium

VON W. KISTLER (E.T.H. Zürich).

Beim sogenannten „Kaltspritzverfahren“, bei welchem ein ausgeglühtes grobkristallines Werkstück in einem schlagartigen Fabrikationsprozess verformt wird, treten ausserordentlich rasche und grosse Deformationen auf. Die innerkristallinen Vorgänge, welche bei nach diesem Verfahren hergestellten Aluminiumtuben auftreten, wurden röntgenographisch untersucht und die Festigkeitseigenschaften solcher Werkstücke näher bestimmt. Der Pressungsvorgang wurde rechnerisch behandelt und die während der Verformung auftretenden Schubkräfte konnten ermittelt werden.

Die röntgenographischen Feinstrukturuntersuchungen ergaben eine feinkristalline anisotrope Textur. Kristallitgrösse 20–40 μ . Aus den Röntgenbildern muss auf folgende Vorzugslage der Kristallite geschlossen werden: [112]-Richtung parallel zur Tubenachse, (110)-Ebene parallel zur Tangentialebene an die Tubenwand. Die ausgesprochene Testuranisotropie lässt sich nur erklären, wenn das Metall während des ganzen Verformungsvorgangs im kristallisierten Zustande verblieben ist und sich also die einzelnen Körner ausschliesslich durch Kristallgleitung verformt haben.

Es wurde die Zugfestigkeit von in der Längsrichtung aus der Tubenwand geschnittenen Streifen gemessen und die Grösse der Verfestigung bestimmt. Aus dem Pressungsdruck wurde mit Hilfe einer neu abgeleiteten Formel die innere Reibung während des Deformationsvorgangs berechnet.

Ergebnisse:

Die innere Reibung bleibt relativ zur kritischen Schub-

spannung auch bei dieser raschen Verformung der Kristallite gering.

Der Verfestigungsparameter, der die Verfestigung in Funktion des Deformationsgrades angibt, ist viermal kleiner als derjenige, der bei statischen Zugversuchen an Aluminium gemessen wird. Die zur Verformung notwendige Kraft ist infolgedessen rund halb so gross wie bei der langsamen Deformation. Das ist der Grund für die grosse Plastizität.

Der geringe Wert des Verfestigungsparameters findet seine Erklärung in der starken Erwärmung, die bei rascher Deformation auftritt. Diese Temperatursteigerung ist also letzten Endes die Ursache der besonderen plastischen Eigenschaften. Ist die Verfestigungsfunktion eines bestimmten Metalls bekannt, so lassen sich die Zugspannung, innere Reibung und Verfestigung berechnen und daraus die plastischen Eigenschaften des Werkstoffs voraussagen.

Über ein objektives Kolorimeter

von H. KÖNIG und F. MÄDER (Bern).

(Mitteilung aus dem Eidg. Amt für Mass und Gewicht.)

Unter einem objektiven Kolorimeter im engeren Sinn versteht man ein Gerät, welches die Strahlung $S(\lambda)$ gemäss den international festgelegten Grunderregungskurven $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$, $\bar{z}(\lambda)$ bewertet:

$$X = \int S(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda, \quad Y = \int S(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda, \quad Z = \int S(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda$$

Der Empfänger muss also die vorgeschriebenen Empfindlichkeitskurven $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$, $\bar{z}(\lambda)$ aufweisen. Da $\bar{y}(\lambda)$ übereinkunftsgemäss gleich der internationalen Hellempfindlichkeitsfunktion $V(\lambda)$ ist, bedeutet die Bestimmung der Farbkomponente Y zugleich die Bestimmung der Leuchtdichte bzw. Lichtstärke.

Eines der Verfahren zur Anpassung von Empfängern an vorgeschriebene Funktionen ist nach dem Vorschlage von IVES die spektrale Zerlegung des Lichtes und Einfügung von Blenden passender Form am Ort des Spektrums. Ein auf diesem Prinzip beruhendes Gerät hat den grossen Vorteil, zugleich für direkt integrale und spektrale Messungen anwendbar zu sein. Mit demselben Apparat können also Farborte im Farbendreieck, Leuchtdichten, Durchlässigkeitskurven von Filtern, Reemissionskurven von Pigmenten und Energieverteilungen gemessen werden.

Die beträchtliche Zahl der benötigten Blenden verlangt eine besondere einfache Technik in der Herstellung derselben. Durch das 10 cm lange, 4 cm breite Spektrum wird ein Spalt von 3 mm

Breite durchgeschoben. Parallel mit dem Spalt bewegt sich ein Schieber, der vom Spalt in dessen Längsrichtung soviel abdeckt, dass für eine bekannte Lichtquelle (Temperaturstrahler) der Ausschlag des Instrumentes (Lichtmarkengalvanometer) einen vorgeschriebenen Wert annimmt. Der jeweilige Ort dieses Schiebers wird durch eine Stahlnadel auf einer dicht hinter dem Spalt liegenden gelatinierten Glasplatte markiert. Nachträglich wird die vom Schieber bei der Justierung verdeckte Fläche bis zur Marke mit Tusche abgedeckt. Dieses einfache Verfahren ermöglicht nach einer Änderung der Zellenempfindlichkeit, der Strahlung der Arbeitslampe usw. leicht die Herstellung eines neuen Diaphragmas. Insbesondere kann der Apparat zur direkten Anzeige der Durchlässigkeitsfunktion von Filtern oder der Reemissionsfunktion von Pigmenten gebraucht werden, ein Ziel, das HARDY mit seinem vollautomatischen Spektralanalysator erreicht hat. Die Blende ist in diesem Fall so beschaffen, dass ohne Filter, bzw. mit Magnesiaschirm an Stelle des farbigen Pigmentes, der Ausschlag am Instrument durchs ganze Spektrum konstant bleibt.

Die Ausschläge können direkt gemessen oder, wenn hohe Präzision verlangt ist, kompensiert werden. Die Messung der Lichtstrahlungen erfolgt mit Kalium-Vakuumzelle, Hochohmwiderstand und symmetrischer Triodenbrücke, zu der im Falle der recht lichtschwachen Untersuchungen an Pigmenten ein bereits erprobter mehrstufiger Gleichstromverstärker in Serie geschaltet wird. Erwähnenswert ist noch, dass die überschüssige, der unvermeidlichen Nullpunktsschwankungen wegen nicht direkt voll ausnutzbare Spannungsverstärkung von ca. 10^4 auf folgende Arten ausgenutzt wird:

1) Für die totale Verstärkung werden 1 bis 2 Zehnerpotenzen beansprucht.

2) Eine Zehnerpotenz der Verstärkung wird dazu verwendet, durch verzögerte Gegenkopplung die mehrere Sekunden dauernde Aufladung der Schaltkapazität über den Hochohmwiderstand in eine rasche Einstellung der verstärkten Ausgangsspannung umzuwandeln.

3) Ein weiterer Verstärkungsüberschuss dient dazu, mittelst einer Kunstschaltung die Trägheit der Einstellung des Lichtmarkeninstrumentes herabzusetzen.

4) Nullpunktseinstellung. Die hohe Spannungsverstärkung gestattet, mittelst einer Wippe einen relativ kleinen Kondensator am Ausgang des Verstärkers zu laden und im Sinne einer Gegenkopplung in einen hochisolierten grossen Speicherkondensator am Gitter

einer Eingangstriode zu entladen. Das Verhältnis der zwei Kapazitäten ist so bemessen, dass ein Umlegen der Wippe den Ausschlag unabhängig von seiner Grösse auf Null zurückführt.

Präzisions-Photometrie mit Caesiumzelle und Kombinationsfilter

von H. KÖNIG (Bern).

(Mitteilung aus dem Eidg. Amt für Mass und Gewicht.)

Die heterochrome Photometrie benötigt Empfänger, deren Empfindlichkeitskurve der internationalen Hellempfindlichkeitsfunktion $V(\lambda)$ nachgebildet ist. Für Standardmesszwecke haben wir s. Z. (Helv. Phys. Acta 10, 165 (1937)) die Verwendung eines nicht-selektiven Empfängers (Thermosäule) und eines $V(\lambda)$ -Filters, bestehend aus einem Satz Glasfilter, vorgeschlagen, die derart gewählt sind, dass möglichst genau

$$\sum_{i=1}^8 c_i d_i(\lambda) = V(\lambda)$$

ist. Man misst die Reihe nach mit den 8 Filtern $d_i(\lambda)$, multipliziert die Einzelresultate a_i mit den passend gewählten Konstanten c_i und bildet $\Sigma c_i a_i$.

Der allgemeinen Verwendung dieses „künstlichen Präzisionsauges“ in der Praxis stellen sich nun die mangelnde Empfindlichkeit des Thermo-Empfängers und die Unruhe seines Nullpunktes hindernd in den Weg. Es liegt nun nahe, nach einer proportional arbeitenden empfindlichen Vakuum-Photozelle zu suchen, die im sichtbaren Bereich (400 ... 700 m μ) eine *ungefähr* konstante Empfindlichkeit $Z(\lambda)$ aufweist, bzw. deren Empfindlichkeitsfunktion durch ein Vorfilter $f(\lambda)$ so zu verändern, dass die Gesamtempfindlichkeit $Z(\lambda)f(\lambda)$ zwischen 400 und 700 m μ um weniger als etwa 50% schwankt und regelmässig verläuft, z. B. monoton steigt oder fällt, oder ein flaches Maximum oder Minimum aufweist. Dann sucht man für die Koeffizienten c_i solche neue Werte c'_i , dass möglichst

$$\Sigma c'_i d_i(\lambda) \cdot Z(\lambda) f(\lambda) = V(\lambda)$$

wird.

Da es sich hier um ein Probieren mit empirischen Funktionen handelt, lassen sich keine allgemeine Regeln angeben, welche Funktionen $Z(\lambda)f(\lambda)$ eine solche Umformung gestatten. Vorliegende Notiz verfolgt nur den Zweck, aufmerksam zu machen, dass es wegen der grossen Anpassungsfähigkeit des Filtersatzes $d_i(\lambda)$ (8 Koeffizienten) recht gut geht. Wir haben mit einer Caesium-Vakuumzelle und einem Vorfilter $f(\lambda)$ aufgebaut aus den Schott-Filtern BG 19

(2 mm), BG 14 (1 mm) und BG 17 (3 mm) eine gute Anpassung an $V(\lambda)$ erreicht.

Diese für die Praxis bestimmte Lösung der Grundaufgabe der heterochromen Photometrie hat neben dem guten Nullpunkt und der bei Verwendung von Hochohmwiderstand und Elektrometer weit ausreichenden Empfindlichkeit den Vorzug einer gewissen Anpassungsfähigkeit. Beispiel: Man will Lichtstrommessungen mit der Ulbricht'schen Kugel durchführen; diese ist aber, wie üblich, nicht rein weiss, sondern der Kugelanstrich möge einem schwachen Gelbfilter $g(\lambda)$ entsprechen. Man kann nun die Koeffizienten c_i'' derart wählen, dass möglichst

$$\sum c_i'' d_i(\lambda) \cdot Z(\lambda) f(\lambda) g(\lambda) = V(\lambda)$$

wird. Die Ergebnisse sind dann $V(\lambda)$ -getreu und zwar so, als ob die Kugel ideal weiss wäre.

Über Einzelheiten wird in anderem Zusammenhang berichtet.

Eigenspannungen in Aluminiumlegierungen

von R. FICHTER (Neuhausen).

1. Von den vielen Verfahren zur Bestimmung der inneren Spannungen oder Eigenspannungen in Metallen sind hauptsächlich zwei Arten zu besonderer Bedeutung gelangt: 1) Die mechanischen Verfahren; 2) die Röntgenstrukturbestimmung. Wir haben bei unseren Untersuchungen nach einem Abdrehverfahren die Entstehung und Zerstörung der Eigenspannungen bei verschiedenen Wärmebehandlungen und mechanischen Beanspruchungen der Aluminiumlegierung Avional (Al-Cu-Mg) verfolgt. Nach dem von HEYN und BAUER angegebenen Verfahren¹⁾ dreht man eine Rundstange sukzessive ab und misst die Längenänderungen. SACHS hat später eine Methode angegeben²⁾, die mit Hilfe der Messung von Durchmesseränderungen und Längenänderungen an einem sukzessive ausgebohrten Rohr sowohl die Spannungen in der Längsrichtung des Zylinders als auch die Tangential- und Radial-Spannungen berechnen lässt. In Anlehnung an die Rechnung von SACHS²⁾ haben wir „kontinuierliche“ Gleichungen für das einfache Abdrehverfahren abgeleitet (d. h. Einführung von Differentialquotienten).

Das Ergebnis einer solchen Rechnung ist die Bestimmung des Spannungsverlaufs als Funktion des Radius in einem Zylinder. Bei Abschreckspannungen herrscht stets aussen Druck und innen Zug. Als Mass für den Spannungszustand benützten wir die Verformungsenergie pro Einheit des entfernten (abgedrehten) Volu-

¹⁾ HEYN und BAUER, Int. Z. f. Metallographie **1**, 16 (1911).

²⁾ SACHS, Z. f. Metallk. **19**, 354 (1927).

mens, da die Spannungsspitzen wegen der Unsicherheit der Rechnung gerade im äussersten und innersten Punkt nicht gut dafür geeignet sind.

2. Zuerst wurde der Zusammenhang zwischen innerer Spannung und Temperatur vor dem Abschrecken geprüft. Trotz der starken Streuung lässt sich ein Spannungsmaximum bei ca. 430° feststellen, also weit unter derjenigen Glühtemperatur, die bei der nachfolgenden Aushärtung die höchste Festigkeit ergibt (500°). Prüft man bei verschiedenen Temperaturen des Abschreckwassers, so nehmen die Spannungen mit steigender Temperatur eindeutig ab. Zur Zeit sind noch Versuche über den Einfluss des Reckens nach der Aushärtung und nach dem Weichglühen und über Wärmebehandlung bei verschiedenen Temperaturen nach der Aushärtung im Gang. Eine ausführliche Arbeit wird später veröffentlicht werden.

Neuhausen, Forschungsinstitut der AIAG (Chippis).

Zur Ultraschallgeschwindigkeitsmessung in Gasen

von HANS BÖMMEL (Zürich).

Seit der Entdeckung, dass in mehratomigen Gasen die Schallgeschwindigkeit in bestimmten Frequenzbereichen frequenzabhängig wird, also Dispersion auftritt, haben Schallgeschwindigkeits- und Absorptionsmessungen in Gasen besonderes Interesse gefunden, weil sich aus Lage und Grösse der Dispersionsgebiete Molekularphysikalisch wichtige Daten berechnen lassen. Die Entstehung von Schalldispersion in Gasen wird bekanntlich folgendermassen erklärt: In einem Gas, dessen Energieinhalt zu einem merklichen Teil aus innerer Energie besteht, hängt im Gleichgewichtszustand die Zahl der angeregten Molekeln nur von der Temperatur ab. Der Durchgang einer Schallwelle verursacht periodische Temperaturschwankungen und damit Konzentrationschwankungen der angeregten Molekeln. Da zur Einstellung des Konzentrationsgleichgewichtes eine endliche Zeit nötig ist, so wird zwar bei niedrigen Frequenzen die Konzentration den Temperaturschwankungen folgen können, bei Frequenzen aber, deren Periode klein gegen die Einstelldauer des Gleichgewichtes ist, wird sich das Konzentrationsgleichgewicht überhaupt nicht mehr ändern. Das bedeutet, dass die Schallfortpflanzung dann so verläuft, als ob der betreffende innere Freiheitsgrad überhaupt nicht vorhanden wäre, d. h. es bedeutet eine Vergrösserung des Verhältnisses der spez. Wärmen bei konstantem Druck und Volumen C_p/C_v und damit eine Zunahme der Schallgeschwindigkeit.

Die Dispersionsgebiete verschieben sich bei zunehmendem Druck nach höheren Frequenzen, weil die Einstelldauer des Konzentrationsgleichgewichtes von der mittleren Stosszahl abhängt und diese prop. dem Druck ist.

Zu derartigen Dispersionsuntersuchungen wurde bisher fast ausschliesslich das sogenannte Schallinterferometer verwendet. Dasselbe besteht im Prinzip aus einer Schallquelle, gewöhnlich einem Piezoquarz, der sich ein Reflektor gegenüber befindet dessen Abstand verändert werden kann. Beobachtet wird die Rückwirkung der reflektierten Welle auf die Schallquelle, die sich z. B. in Anodenstromänderungen des den Quarz erregenden Hochfrequenzgenerators bemerkbar macht und die einen Maximalwert im Fall akustischer Resonanz erreicht, d. h. wenn der Abstand Quarz-Reflektor ein Vielfaches einer halben Schallwellenlänge beträgt. Es lässt sich daher durch Verschieben des Reflektors die Schallwellenlänge und damit bei bekannter Frequenz die Schallgeschwindigkeit bestimmen. Mit dem Interferometer lässt sich eine sehr grosse Genauigkeit erzielen und Messungen bis zu Frequenzen von etwa 1,5 Megahertz ausführen. Bei höheren Frequenzen versagt die Methode oder wird ungenau, weil dann infolge der grossen Schallabsorption die Ausbildung stehender Schallwellen nicht mehr mit hinreichender Intensität möglich ist.

Es schien daher berechtigt, einmal die Brauchbarkeit einer anderen Methode zu untersuchen, die zu Ultraschallmessungen in Flüssigkeiten seit langem mit grossem Erfolg benutzt wird. Diese Methode beruht auf dem von DEBYE und SEARS entdeckten Effekt, dass Ultraschallwellen auf senkrecht zu ihrer Fortpflanzungsrichtung hindurchgehendes Licht wie ein Beugungsgitter wirken, wobei die Anzahl der sichtbaren Beugungsordnungen von der Schallintensität abhängt und sich der Beugungswinkel α_n der n -ten Ordnung nach der für Strichgitter gültigen Formel

$$\sin \alpha_n = n \cdot \frac{\lambda}{\delta}$$

berechnet. Misst man daher, direkt oder indirekt, den Beugungswinkel so kann man wieder bei bekannter Schallfrequenz und Lichtwellenlänge λ die Schallwellenlänge δ bestimmen.

Obwohl der Debye-Searseffekt schon seit längerer Zeit auch in Gasen beobachtet worden war, wurde er bisher in diesen für genaue Schallgeschwindigkeitsmessungen ungeeignet gehalten. Es wurde nun von uns die mit der erwähnten Methode erzielbare Genauigkeit in verschiedenen Gasen untersucht. Wie erwähnt interessieren weniger die genauen Absolutwerte der Schallgeschwindigkeiten

als deren eventuell vorhandene Frequenzabhängigkeit. Um Fehler, die vor allem durch die Temperaturmessung entstehen können möglichst zu vermeiden, wurde daher der Quarz gleichzeitig in zwei Frequenzen erregt. Es entstehen dann die Beugungsbilder beider Frequenzen und man kann das Verhältnis der beiden Beugungswinkel mit demjenigen der Frequenzen vergleichen. Ist keine Schalldispersion vorhanden, so müssen die beiden Verhältnisse gleich sein, ändert sich dagegen die Schallgeschwindigkeit mit der Frequenz, so muss das Verhältnis der Winkel entsprechend von demjenigen der Frequenzen abweichen.

Mit einer solchen Anordnung wurden Versuche in CO_2 , O_2 , N_2 , A und Luft gemacht. Verwendet wurde ein Piezoquarz dessen Grundfrequenz 951 khz betrug und der in dieser sowie gleichzeitig in der 3. oder 5. Oberschwingung angeregt wurde. Das Verhältnis der Frequenzen wurde mit einem Präzisionswellenmesser bestimmt. Die optische Anordnung war die allgemein übliche: Das in einem Gasbehälter erzeugte Schallfeld wurde mit einem parallelen, monochromatischen Lichtbündel durchstrahlt und dieses hinter dem Behälter mit einer Konvexlinse gesammelt. Das in der Brennebene der Linse entstehende Beugungsbild wurde photographiert und auf der Platte ausgemessen.

Die erzielten Ergebnisse sind durchaus befriedigend, die erhaltenen Beugungsbilder waren scharf genug um das Verhältnis von Grund — zu 3. bzw. 5. Oberschwingung auf etwa $1\frac{0}{100}$ bzw. $1,5\text{--}2\frac{0}{100}$ genau bestimmen zu lassen. In den angegebenen Frequenzintervallen konnte in keinem der erwähnten Gase Dispersion festgestellt werden.

Da schon lange bekannt, dass in CO_2 ein Dispersionsgebiet vorhanden ist, das sich bei Normaldruck von etwa $2 \cdot 10^4\text{--}9 \cdot 10^5$ khz erstreckt, so wurde, um die Methode auch innerhalb eines Dispersionsgebietes auszuprobieren, dieses durch Druckerhöhung und Fremdgaszusatz nach dem Frequenzintervall 951—2853 khz hin verschoben. Bei diesem Versuch ergab sich, in Übereinstimmung mit der Erwartung, eine Schallgeschwindigkeitsänderung von ca. 2%, bei einer Messgenauigkeit von $2\frac{0}{100}$.

L'Audition d'un Concert et d'un Vrombissement lointain et le Scintillement des Etoiles

par A. PICCARD.

Si dans une salle de concert un instrument donne une note entretenue, l'auditeur percevra cette note par voie directe et par réflexions. S'il est à une certaine distance de l'instrument, l'énergie

perçue par réflexions dépassera l'énergie reçue par voie directe. Si la note émise est pure, sans harmoniques, et si l'état de la salle ne subit pas de variations, il doit se produire dans toute la salle des interférences telles que sur certaines surfaces fixes le son devient imperceptible. (Surfaces de silence.) Entre ces surfaces l'intensité du son varie suivant une loi sinusoïdale.

Plusieurs causes diminuent fort heureusement pour les amateurs de musique l'effet dont nous venons de parler: L'homme a deux oreilles qui généralement ne se trouvent pas simultanément sur des surfaces de silence. Si la durée d'émission est courte, les interférences n'ont pas le temps de se produire. De petites variations rapides dans l'état de la salle (variations locales de température, mouvement de l'air, déplacement d'objets solides) masquent le phénomène par le fait que les différentes ondes cessent d'être strictement cohérentes.

Dans des conditions favorables les interférences sont cependant très frappantes. Il suffit, par exemple, de se déplacer lentement dans une église pendant que l'organiste entretient une note pour entendre le son varier régulièrement d'intensité et par moment même s'évanouir presque complètement, surtout si l'on n'écoute que d'une oreille.

A part les variations d'intensité on observe d'une façon très frappante des variations de la couleur du son. En effet, les interférences se produisent en différentes places pour le son fondamental et pour les harmoniques. (Cela surtout pour l'orgue, où les « harmoniques », produits par d'autres tubes, ne sont pas rigoureusement harmoniques.) Si l'auditeur, obstruant une oreille, déplace sa tête de quelques décimètres, la qualité (le *colori*) du son perçu change du tout au tout.

Si un avion isolé monomoteur passe à grande altitude au-dessus d'un observateur, on perçoit généralement des variations irrégulières de l'intensité de son vrombissement. Ici il ne peut être question d'interférences. Ce sont les inhomogénéités de l'air qui modifient direction et durée de transmission des rayons sonores.

Si un grand essaim de bombardiers nous survole, ce phénomène se passe autrement pour chaque avion et nous ne le percevons plus.

Si une horloge lointaine sonne minuit, on observe souvent de fortes différences dans l'intensité des 12 coups. Ces différences peuvent être expliquées soit par les interférences, soit par les déviations des rayons sonores.

Le scintillement des étoiles peut être expliqué soit par simple déviation des rayons lumineux, soit par interférences résultant de

plusieurs déviations. Une déviation angulaire d'une minute à travers l'atmosphère produisant une différence de marche de l'ordre d'une longueur d'onde, la dispersion chromatique des gaz étant très faible et le scintillement des étoiles étant accompagné de variations de couleur allant du rouge au bleu, il paraît probable que les interférences interviennent efficacement dans la production du scintillement des étoiles.

Le freinage du rayonnement en théorie des quanta

par E. C. G. STUECKELBERG (Genève et Lausanne).

Une théorie classique des particules ponctuelles est possible grâce à la soustraction invariante de tous les termes divergents (DIRAC¹). Pour une particule de masse m soumise à un champ scalaire φ de fréquence μ ($[m] = [\mu] = [\varphi] = \text{cm}^{-1}$, l'équation de mouvement qui tient compte du freinage de rayonnement et qui est valide sans aucune restriction, a la forme :

$$m \ddot{\bar{q}} - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon^2}{4\pi} \ddot{\bar{q}} = \varepsilon \text{ grad } \varphi. \quad (1)$$

La section d'efficacité Q pour la diffusion des « photons » vaut

$$Q(\alpha) = Q(0) (1 + \delta^2)^{-1}; \quad \alpha = \frac{\mu}{m}; \quad \delta = \frac{1}{3} \frac{\varepsilon^2}{4\pi} \alpha. \quad (2)$$

Dans les deux limites $\mu \ll 2\pi m \varepsilon^{-2}$ et $\mu \gg 2\pi m \varepsilon^{-2}$, on a la valeur de Thompson

$$Q(\alpha) = Q(0) \left(1 - \frac{1}{9} \left(\frac{\varepsilon^2}{4\pi} \right)^2 \alpha^2 + \dots \right) \rightarrow Q(0) = 4\pi \frac{\varepsilon^4}{(4\pi m)^2} \frac{1}{3} \quad (3)$$

resp. une valeur indépendante de ε

$$Q(\alpha) \rightarrow 4\pi \frac{3}{\mu^2}. \quad (4)$$

Mais, par contre, la théorie des quanta, qui intervient dès que $\mu \sim m$, ne pouvait jusqu'à présent être appliquée qu'en négligeant toute influence du freinage du rayonnement. La section d'efficacité est donnée dans cette approximation par la formule de Klein-Nishina (scalaire)

$$Q(\alpha) = Q(0) \left(\frac{2+4\alpha+\alpha^2}{\alpha^2(1+2\alpha)} - \frac{1+\alpha}{\alpha^3} \log(1+2\alpha) \right). \quad (5)$$

¹) DIRAC, Proc. Roy. Soc. A. **167**, 148 (1938).

Les deux limites $\mu \ll m$ et $4\pi m \varepsilon^{-2} \gg \mu \gg m$ sont:

$$Q(\alpha) \rightarrow Q(0) \left(1 - 4\alpha + \frac{24}{5} \alpha^2 - \dots \right) \quad (6)$$

et

$$Q(\alpha) \rightarrow 4\pi \frac{\varepsilon^4}{32\pi^2 \mu^2} \quad (7)$$

Si l'on effectue la soustraction invariante de Dirac en théorie des quanta, une théorie non contradictoire est obtenue, dont le formalisme¹⁾ n'est autre chose que celui proposé récemment par HEISENBERG²⁾. Le facteur $(1 + \delta^2)^{-1}$, qui tient compte du freinage de radiation en théorie classique, doit, dans beaucoup de cas, être simplement remplacé par le facteur $(\sin \delta)^2 \delta^{-2}$. Pour $\mu \sim m$, la valeur classique de reste applicable et (5) devient

$$Q(\alpha) = Q(0) \left(1 - 4\alpha + \left(\frac{24}{5} - \frac{2}{27} \frac{\varepsilon^2}{4\pi} \right) \alpha^2 - \dots \right).$$

Pour $\mu \gg m$, dans le problème envisagé, la valeur de δ vaut $\varepsilon^2/8\pi$. Dans le cas peu probable où $\varepsilon^2/8\pi \gg 1$, on obtient, à la place de (7) $((\sin \delta)^2 \sim 1/2)$:

$$Q(\alpha) \rightarrow 4\pi \frac{1}{m\mu} \quad (8)$$

Dans une théorie quelconque dont il résulte pour une section $\mu \ll 4\pi m \varepsilon^{-2}$

$$Q(\alpha) = Q(0) \cdot f(\alpha) \quad (9)$$

le facteur $\delta(\alpha)$ tend, pour $\mu \gg 4\pi m \varepsilon^{-2}$, vers une valeur limite telle que (8) est vérifié si (seule condition) $f(\alpha)$ diminue moins fortement que $\alpha^{-1} \log \alpha$ (et a fortiori même si elle augmente). Le facteur numérique en (8) n'est juste que pour une distribution du rayonnement secondaire isotrope dans le système de repos du centre de gravité³⁾.

La théorie s'applique naturellement aussi à la largeur d'une raie spectrale (de fréquence μ_0). Le facteur classique $\gamma^2((\mu - \mu_0)^2 + \gamma^2)^{-1}$ devient donc, en théorie quantique, $(\sin(\gamma(\mu_0 - \mu)^{-1}))^2$.

¹⁾ STUECKELBERG, Nature (1943) (sous presse). Un exposé détaillé paraîtra dans les H.P.A.

²⁾ HEISENBERG, Z. f. Phys. **120**, 513 et 673 (1943).

³⁾ Ces calculs font l'objet d'une thèse actuellement en préparation à Genève.

Zur Frage der Resonanzabsorption von γ -Strahlen

von K. ZUBER (Zürich).

1. Die Wechselwirkung zwischen Licht und Materie ist immer dann sehr stark, wenn die Resonanzbedingung erfüllt ist. Falls die Linie im wesentlichen nur durch Strahlungsdämpfung verbreitert wird (Linie mit natürlicher Linienbreite), so findet sich für den Wirkungsquerschnitt der Absorption in der Mitte der Linie

$$\sigma_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{g_2}{g_1} \cdot \lambda_0^2$$

(g_1 und g_2 sind die statistischen Gewichte des Anfangs- bzw. Endzustandes für den Absorptionsprozess).

Für eine γ -Strahlung von $\lambda_0 = 2,5 \cdot 10^{-11}$ cm ($h\nu \approx 5$ MeV) ergäbe sich, mit $g_2/g_1 = 3$ gesetzt, $\sigma_0 \approx 6 \cdot 10^{-22}$ cm². Zum Vergleich mit dieser Zahl sei der Wirkungsquerschnitt für Comptonprozess und Paarbildung eines Bleiatoms als besonders hohen Wert angegeben: $\sigma' = 1,45 \cdot 10^{-23}$ cm². Die Resonanzabsorption wäre somit bedeutend stärker als die Absorption durch die genannten Prozesse.

Der Wirkungsquerschnitt der Resonanzabsorption wird verringert, wenn die Linie durch Dopplereffekt wesentlich verbreitert ist. Es bedeute Δ die natürliche Linienbreite, D die Dopplerbreite. Dann gilt, wenn $D \gg \Delta$ ist, für die Linienmitte

$$\sigma_{\max} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \cdot \frac{\Delta}{D} \cdot \sigma_0 = 0,74 \cdot \frac{\Delta}{D} \cdot \sigma_0$$

Es ist

$$\Delta = \frac{g_1}{g_2} \cdot 4\pi \frac{e^2}{mc^3} \cdot \nu_0^2 \cdot f \quad \text{und} \quad D = \frac{2\sqrt{2 \cdot \ln 2 \cdot R}}{c} \cdot \nu_0 \cdot \sqrt{\frac{T}{M}}$$

Hier bedeutet f die Oszillatorenstärke des Übergangs, e und m die Ladung und Masse des strahlenden Teilchens (für das optische Gebiet des Elektrons, für γ -Strahlen des Protons) und M die Masse des Atoms.

Obschon für γ -Strahlen die f -Werte sehr klein sind¹⁾ (der grösste bisher festgestellte Wert ist 10^{-3}) und obschon in der Formel für Δ die Masse des Protons im Nenner vorkommt, ist wegen der hohen Frequenz für γ -Strahlen das Verhältnis Δ/D von der gleichen Grössenordnung wie im optischen Gebiet. Nimmt man z. B. an, es sei $f = 2,8 \cdot 10^{-4}$ so ergibt sich mit $\lambda_0 = 2,5 \cdot 10^{-11}$ cm für Δ/D

¹⁾ H. A. BETHE, Rev. Mod. Physics **9**, 229, 1937.

ein Wert, der fünfmal grösser ist als der entsprechende Wert für die Hg-Linie 2537 Å.E. Es ergäbe sich dann

$$\sigma_{\max} = 3,25 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$$

d. h. ein Wert, der immer noch 25% des Wirkungsquerschnittes für Comptonprozess und Paarbildung eines Bleiatomes betragen würde und der daher der Beobachtung zugänglich sein sollte.

2. Es wurden Versuche mit den γ -Strahlen, die bei der $B^{11}(H, \gamma) C^{12}$ -Reaktion entstehen, durchgeführt. Die γ -Strahlung besteht aus drei Linien¹⁾, deren Quantenenergien 4,3, 11,8 und 16,6 MeV betragen und deren Intensitäten sich wie 7 : 7 : 1 verhalten. Zwei der Linien werden bei dem Übergang in den Grundzustand emittiert und sollten daher in Kohlenstoff Kern-Absorption zeigen.

Eine dicke Schicht aus amorphem Bor wurde mit Protonen von rund 180 kV bombardiert. Die unter 90° zum Protonenstrahl emittierte γ -Strahlung wurde mit Hilfe eines Zählrohres gemessen und ihre Durchlässigkeit für Paraffin (Schichtdicke 5,4 cm) bestimmt. Zur Kontrolle der Anordnung wurde auch die Durchlässigkeit in Blei für 1,0 und 1,8 cm Schichtdicke untersucht. Die Resultate sind in der Tabelle wiedergegeben. Zum Vergleich ist die berechnete Durchlässigkeit, die sich wegen des Comptonprozesses und der Paarbildung ergibt, angeführt²⁾.

	Paraffin	Pb (1,0 cm)	Pb (1,8 cm)
D _{exp} . . .	0,87 \pm 0,03	0,61 \pm 0,03	0,37 \pm 0,02
D _{ber} . . .	0,88	0,56	0,36

In Paraffin lässt sich keine zusätzliche Absorption durch Resonanz feststellen. Der Grund dafür ist wahrscheinlich der, dass der bei der Reaktion entstehende angeregte C-Kern eine Geschwindigkeit bekommt, die rund 1000mal grösser als die mittlere Geschwindigkeit der thermischen Bewegung ist. Obschon die Untersuchungsrichtung senkrecht zur Richtung der Protonen stand, so ist wegen des endlichen Öffnungswinkels der Messanordnung die Breite der Emissionslinien offenbar wesentlich grösser als die der Absorptionslinien. Durch diesen Umstand wird die Resonanzabsorption stark heruntergesetzt. Aus dem gleichen Grunde ist auch die nach einem radioaktiven Zerfall emittierte

¹⁾ W. A. FOWLER, E. R. GAERTTNER u. C. C. LAURITSEN, Phys. Rev. **53**, 628, 1938.

²⁾ W. HEITLER, The Quantum Theorie of Radiation, Oxford 1936.

γ -Strahlung für Versuche über Resonanzabsorption ungeeignet¹⁾. Am ehesten könnte Resonanzabsorption für die γ -Strahlung nachgewiesen werden, welche nach dem Einfangen von Neutronen thermischer Energie emittiert wird.

Zur Isomerie des Calciums

von O. HUBER, O. LIENHARD und H. WÄFFLER (E.T.H. Zürich).

Calcium besitzt 6 stabile Isotope mit den Massenzahlen 40 (relat. Häufigkeit 96,96%, 42 (0,64%), 43 (0,15%), 44 (2,06%), 46 (0,003%) und 48 (0,19%). Von den radioaktiven Calciumisotopen kennt man Ca^{39} (Halbwertszeit $T = 1,06$ sec), Ca^{41} ($T = 8,5$ d), Ca^{45} ($T = 180$ d) und Ca^{49} (2,5 h). Ausser diesen Radioaktiven fanden WALKE, THOMPSON und HOLT²⁾ auch noch eine 30 min-Aktivität an Calcium, die sich sowohl durch einen (d, p)- als auch (n, γ)-Prozess erzeugen liess, und welche sie versuchsweise einem isomeren Zustand des Ca^{49} zuordneten. Die gleiche Aktivität konnten auch wir an Calcium mit der Lithium-Gammastrahlung durch einen (γ, n)-Prozess erzeugen. Aus der Tatsache, dass der 30 min-Körper sowohl durch Anlagerung als auch durch Abspaltung eines Neutrons entsteht, folgt nun aber, dass er nur einem Calciumisotop zugeordnet werden kann, welches 2 stabile Nachbarn als Ausgangsisotope dieser Reaktionen besitzt. Ca^{46} und Ca^{48} fallen infolge ihrer Seltenheit als Ausgangsisotope für einen (γ, n)-Prozess ausser Betracht, so dass diese Aktivität nur dem Ca^{43} oder dem Ca^{41} zukommen kann. Weil Ca^{43} stabil ist und weil der radioaktive Übergang von Ca^{41} in K^{41} mit einer Halbwertszeit von 8,5 d erfolgt, so muss der 30 min-Körper eine *isomere Form eines dieser beiden Isotope* darstellen. Eine Zuordnung zu einem der beiden ist auf Grund der bisherigen Messungen noch nicht möglich.

Kernphotoeffekt unter Abspaltung eines Protons: $\text{Mg}^{26} (\gamma, p)\text{Na}^{25}$

von O. HUBER, O. LIENHARD, P. SCHERRER und H. WÄFFLER (E.T.H. Zürich).

In einer früheren Arbeit³⁾ fanden wir, dass die Lithium-gammastrahlung (Quantenenergie ≈ 17 MeV) in Magnesium ausser der bekannten 11,6-sec-Aktivität des Mg^{23} , welches in der Reaktion

¹⁾ K. ZUBER, Helv. Phys. Acta **16**, 407 (1943).

²⁾ H. WALKE, F. C. THOMPSON und J. HOLT, Phys. Rev. **57**, 177 (1940).

³⁾ O. HUBER, O. LIENHARD, P. SCHERRER und H. WÄFFLER: H.P.A. XVI, **33** (1943).

$\text{Mg}^{24} (\gamma, n) \text{Mg}^{23}$ entsteht, noch eine 62sec-Aktivität induziert. Ihre Zuordnung zu einem bestimmten Isotop konnte damals noch nicht erfolgen, da eine Entscheidung darüber, welcher der beiden möglichen Prozesse: a) $\text{Mg}^{26} (\gamma, p) \text{Na}^{25}$, b) $\text{Mg}^{26, 25} (\gamma, n) \text{Mg}^{25*, 24*}$ tatsächlich vorlag, auf Grund der Halbwertszeitbestimmung allein nicht möglich war. Na^{25} müsste ein gewöhnlicher β -Strahler sein, während es sich im Fall b) um einen isomeren Anregungszustand eines der beiden stabilen Isotope $\text{Mg}^{25, 24}$ handelte, welcher mit der Halbwertszeit von 62 sec in den Grundzustand übergeht. Um Aufschluss über die Natur der emittierten Strahlung zu erhalten, haben wir eine Absorptionsmessung in Aluminium durchgeführt. Diese ergab, dass unter der Annahme a) ein β -Spektrum mit der Maximalenergie von 2,8 MeV vorliegt, unter der Annahme b) hingegen eine Gammastrahlung mit einer Quantenenergie von 35 KeV. Die Kenntnis der Absorptionsverhältnisse erlaubt nun, aus der direkt gemessenen Ausbeute auf den Wirkungsquerschnitt σ des beobachteten Prozesses zu schliessen. Im Fall a) ergibt sich ein $\sigma = 3,8$, im Fall b), unter Berücksichtigung der Ansprechwahrscheinlichkeit unseres Zählrohres, ein $\sigma \approx 1100$. σ bedeutet hier den relativen Wirkungsquerschnitt, indem der Wert für den Kernphotoeffekt an Cu^{63} , $\sigma_{\text{Cu}^{63}}$, willkürlich gleich 100 gesetzt worden ist. Nun sind nach unseren Messungen¹⁾ die Wirkungsquerschnitte für den Kernphotoeffekt bei den leichten Elementen alle von der gleichen Grössenordnung und liegen zwischen 1 und 4; für Mg^{24} beträgt er z. B. 1,7. Ein σ von 1100 fällt also so stark aus allen anderen Werten heraus, dass wir die Deutungsmöglichkeit b) aus diesem Grunde ausschliessen zu können glauben. Die gefundene 62 sec-Aktivität ist somit dem Prozess $\text{Mg}^{26} (\gamma, p) \text{Na}^{25}$ zuzuschreiben. Die ausführliche Arbeit erscheint in den H.P.A.

Kristall-Bandpassfilter

von B. MATTHIAS (B.B.C. Baden) und P. SCHERRER (E.T.H. Zürich).

Quarkristalle werden in elektrischen Wellenfiltern an Stelle von elektrischen Schaltelementen gebraucht. Der Vorteil besteht darin, dass der Koeffizient

$$\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}},$$

in der Technik als Güte bezeichnet, um mehr als zwei Grössen-

¹⁾ Wird in den H.P.A. erscheinen.

ordnungen besser ist, als sich das mit den besten elektrischen Schaltelementen erreichen liesse. Hierdurch zeigen Kristallfilter fast rechteckige Dämpfungskurven, deren Herstellung auf rein elektrischem Weg einen sehr grossen Aufwand erfordern würde.

Die besten Bandpassfilter bestehen aus vier als Brücke geschalteten Zweigen, weshalb sie auch als Brückenfilter bezeichnet werden. Ein solches Filter ist für Frequenzen durchlässig, bei welchen die von einem Punkt ausgehenden Zweige, Reaktanzen mit entgegengesetztem Vorzeichen besitzen.

Die Reaktanz eines Kristalls ist im allgemeinen negativ, d. h. der Kristall entspricht einer Kapazität. An der Resonanzstelle wird die Reaktanz aber Null und steigt dann mit wachsender Frequenz, um bei der sogenannten Antiresonanz einen Pol zu haben. Zwischen Resonanz und Antiresonanz wirkt der Kristall als Induktivität.

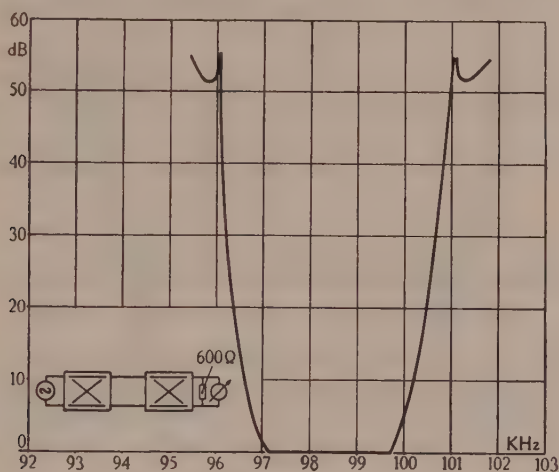


Fig. 1.

Für ein nur aus vier Kristallen bestehendes Filter ist also der doppelte Wert der Differenz dieser beiden Frequenzen die maximal erreichbare Bandbreite. Sie beträgt für Quarz etwa 0,8% der Durchlassfrequenz. Bei einer mittleren Durchlassfrequenz von 100 kHz wäre das Filter also zur Übertragung der Sprache schon unbrauchbar. Durch Zusatzspulen lässt sich der Durchlassbereich vergrössern, indem der Reaktanzverlauf jetzt noch eine zweite Nullstelle besitzt. Man kommt so theoretisch auf etwa 11% Bandbreite. Eine weitere Steigerung derselben würde die Dämpfung im Sperrbereich weit unter brauchbare Werte sinken lassen. Praktisch erhält man aber nur etwa 6% Bandbreite, indem sonst die Grösse der Zusatzspulen nurmehr auf Kosten von deren Güte wachsen könnte.

Der Abstand zwischen Resonanz und Antiresonanz wird durch die Formel

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_{\text{res}}} = \text{const.} \cdot \frac{E d^2}{\varepsilon}$$

E = Elastizitätsmodul

ε = Dielektrizitätskonstante

d = Piezomodul

bestimmt. Demnach sollte Seignettesalz durch seinen hohen Piezomodul keine Schwierigkeiten zur Erreichung einer genügenden Bandbreite bieten, da diese hier 8% der Durchlassfrequenz betragen würde. Leider ist aber die Güte von Seignettesalz um mindestens eine Grössenordnung kleiner als bei Quarz.

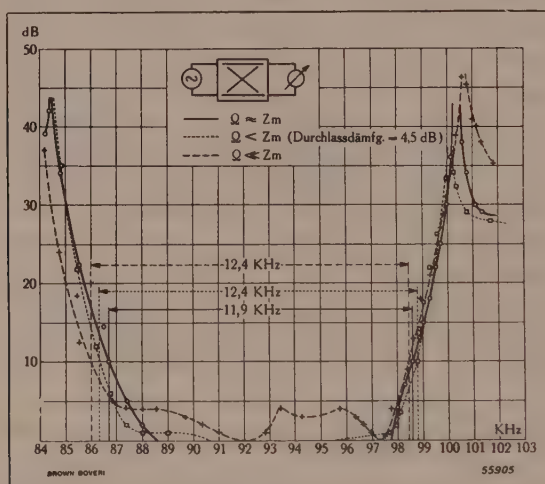


Fig. 2.

Ein guter Ausweg besteht nun in der Verwendung von gezüchteten KH_2PO_4 -Kristallen. Der Piezomodul ist hier etwa 10mal grösser als bei Quarz und die mechanische Festigkeit lässt eine genügende Güte erwarten. Unsere Messungen ergeben eine gleiche Güte wie bei Quarzkristallen und dabei eine grössere Distanz zwischen Resonanz und Antiresonanz. So war es möglich, gewöhnliche Sprachfilter zu bauen, wobei die Induktivität der Zusatzspulen nur etwa den dritten Teil des Wertes betrug, den sie in einem entsprechenden Quarzfilter hätte haben müssen (Fig. 1). Ausserdem konnte jetzt ein wirkliches Breitbandfilter gebaut werden. Die erzielte Bandbreite überschreitet 14% der mittleren Durchlassfrequenz und die Sperrdämpfung war so gross, dass das Filter allen praktischen Anforderungen genügt (Fig. 2).

Kernreaktionen an Chlor mit Neutronen

von A. GIBERT, F. ROGGEN und J. ROSSEL (E.T.H. Zürich).

Mit Hilfe einer chlordgefüllten Ionisationskammer mit linearem Verstärker wurden die (n, α) - und (n, p) -Reaktionen von Chlor untersucht. Bei Verwendung von d - d -Neutronen wurde ein Energiespektrum der Reaktionen gefunden, das eine grössere Anzahl von Maxima aufweist. Aus der maximalen Energietönung der Chlорumwandlungen (1,16 MeV) folgt eine obere Schranke für den Massenwert von Cl^{35} , nämlich 34,9805.

Mit *langsamen* Neutronen geht nur ein Prozess vor sich: $\text{Cl}^{35}(n, p)\text{S}^{35}$. Protonen und Schwefelkerne erhalten dabei zusammen eine kinetische Energie von 0,52 MeV. Da aus dem β -Spektrum von S^{35} eine Energietönung des Prozesses von 0,65 MeV folgt, wird die Entstehung des S^{35} in einem angeregten Zustand angenommen.

Den Energiebestimmungen wurde der mit α -Teilchen von uns experimentell ermittelte Wert der Ionisationsarbeit in Chlor von 23,5 eV pro Ionenpaar zugrunde gelegt.

Die ausführliche Arbeit erscheint in den H.P.A.

Elektrische Messung kleinster atmosphärischer Druckschwankungen

von L. SAXER und F. DESSAUER, Fribourg.

Für gewisse meteorologische Vorgänge ist die Messung kleiner Luftdruckschwankungen von Interesse. Im folgenden wird das Prinzip einer Apparatur beschrieben, die gestattet, Luftdruckschwankungen im ganzen den Meteorologen interessierenden Frequenzbereich zu messen.

Der druckempfindliche Teil der Apparatur besteht aus einer Metalldose, die oben mit einer Metallmembran verschlossen ist. Im Inneren befindet sich eine durchlöchernte Metallplatte, die zusammen mit der Metallfolie eine Kapazität bildet. Bei äusseren Druckschwankungen ändert sich der Abstand der Membran von der festen Platte und damit die Kapazität des Systems.

Damit die grossen, sehr langsamen Druckschwankungen nach Möglichkeit nicht zur Registrierung kommen, steht der Innenraum der Dose mit der umgebenden Aussenluft durch eine veränderliche Kapillare in Verbindung.

Zur Messung der Kapazitätsänderungen kann die bekannte Hut-Kühn-Oscillatorschaltung verwendet werden, in welcher die Druckdose die Kapazität des Anodenschwingkreises bildet. Die

Änderung des Gitter- oder des Anoden-Gleichstromes ist ein Mass für die Kapazitätsänderung der Druckdose.

Zur Eichung wird die Druckdose in ein abgeschlossenes Luftvolumen gebracht, in welchem mit einer Pumpe periodische sinusförmige Druckschwankungen erzeugt werden. Bei konstanter Frequenz ist der Ausschlag des Registrierinstrumentes (Anodenstrom) proportional der Druckamplitude. Man erreicht für eine Druckamplitude von 10^{-3} mm Hg ohne Kompensation des Anodenstromes Ausschläge von 4 cm bei einer Länge des Lichtzeigers von 1 m. Durch Kompensation kann die Empfindlichkeit noch beträchtlich erhöht werden. Mit Hilfe der erwähnten Kapillare werden die langperiodischen Druckschwankungen geschwächt. Die Durchrechnung gibt eine Frequenzabhängigkeit von folgender Form:

$$\frac{A_\nu}{A_\infty} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(k \cdot \nu)^2}}}$$

A_ν = Amplitude für die Frequenz ν ; A_∞ = Amplitude für die Frequenz ∞ ; k ist eine Apparatenkonstante.

Nach diesem Prinzip wurden zwei verschiedene Apparate hergestellt, von denen der eine aus dem Netz, der andere mit Batterien betrieben wurde. Gleichzeitige Registrierungen mit den beiden Apparaten ergaben identische Kurvenbilder, selbst wenn die zugehörigen Druckdosen in verschiedenen Räumen aufgestellt waren, womit die Zuverlässigkeit der Messmethode erwiesen ist.

Neben den durch die jeweilige Wetterlage bedingten, zum Teil auch periodischen Luftdruckschwankungen von relativ kleiner Frequenz tritt praktisch immer eine höherfrequente, von jedem Wetter unabhängige Schwankung auf. Die Frequenz dieser Schwankung kann zwischen 12—17 Perioden pro Minute variieren, meistens beträgt sie jedoch 13—15; ihre Amplitude ist im allgemeinen einige 10^{-4} mm Hg.

Die Messungen wurden bis anhin in verschiedenen Räumen des Physikalischen Instituts, sowie im Freien in der näheren Umgebung der Stadt Freiburg durchgeführt. Wir vermuten, dass die letzterwähnte Druckschwankung ausserhalb der Troposphäre sich gleichfalls zeigt. Wir haben die Absicht, die Messungen auch an andern vor allem höher gelegenen Orten durchzuführen und hoffen, auf diese Weise einige Aufschlüsse über die Ursache zu erhalten.

Bemerkung. Eine eingehendere Beschreibung der Apparatur und der Messergebnisse soll in abschbarer Zeit in den H.P.A. erscheinen.

Formdoppelbrechung

von A. Frey-Wyssling.

(12. VI. 1943.)

WIENER hat nachgewiesen, dass die Dielektrizitätskonstante von Mischkörpern aus *isotropen* Bestandteilen nach Richtungen verschieden ist, wenn der eine Mischbestandteil aus geordneten anisodiametrischen Partikeln besteht. Falls die Abmessungen der Teilchen verglichen mit den Wellenlängen des Lichtes klein sind, ergibt sich hieraus optische Anisotropie. WIENER hat Formeln für die Berechnung der Doppelbrechung der beiden Sonderfälle paralleler Kreiszylinder (Stäbchenmischkörper) und paralleler Lamellen (Schichtenmischkörper) angegeben, und die Erscheinung als Stäbchen- bzw. Schichtendoppelbrechung bezeichnet. Bezogen auf die Orientierungsachse des Mischkörpers ist die Stäbchendoppelbrechung stets positiv, die Schichtendoppelbrechung dagegen negativ. Man kann deshalb bei Kolloiden aus dem Vorzeichen dieser Doppelbrechung auf die *Form* der unsichtbaren Partikel schliessen. Es ist daher von mir vorgeschlagen worden, diese Erscheinungen zusammenfassend als *Formdoppelbrechung* zu benennen (FREY 1924), und diese Bezeichnung hat im Schrifttum allgemeine Anwendung gefunden.

Die Mischkörpertheorie von WIENER macht die Voraussetzung, dass die Durchmesser der Stäbchen oder Lamellen klein seien verglichen mit den Wellenlängen des Lichtes. Damit ist die Erscheinung der Formdoppelbrechung auf das submikroskopische Gebiet beschränkt; trotzdem kann man auch bei Paketen von Lamellen mit mikroskopischen Dicken eine der Formdoppelbrechung verwandte Erscheinung beobachten (SCHMIDT 1934, WÄLCHLI 1941). Nach unten hat WIENER die Grösse der Teilchendurchmesser nicht begrenzt, indem er im Extremfalle sogar Körper aus einem einzigen chemischen Elemente als „Mischkörper“ auffasst, denn er „besteht aus Atomen, die durch Zwischenräume voneinander getrennt seien“ (WIENER 1912, S. 517). Es ist daher wiederholt diskutiert worden, ob in Lösungen von hochmolekularen Fadenmolekülen eine Formdoppelbrechung im Sinne WIENERS zu erwarten sei (z. B. SCHMIDT 1938). Diese Frage kann heute an Hand der theoretischen Unter-

suchung der Strömungsdoppelbrechung von Flüssigkeiten durch SADRON (1937) entschieden werden.

Es sollen daher die Beziehungen, wie sie für submikroskopische Mischkörper (Partikel in Form von Micellarsträngen, Molekülbündeln oder Molekülpaketen) und amikroskopische Mischkörper (Partikel in Form von einzelnen Molekülen) gelten, klargelegt und miteinander verglichen werden.

1. Mischkörper mit submikroskopischen Bauelementen.

a) *Isotrope Stäbe oder Schichten.*

Für die Doppelbrechung des Stäbchen- und des Schichtenmischkörpers hat WIENER (1912) folgende Formeln abgeleitet:

$$\text{Stäbchen: } n_{\parallel}^2 - n_{\perp}^2 = \frac{\delta_1 \delta_2 (n_1^2 - n_2^2)^2}{(\delta_1 + 1) n_2^2 + \delta_2 n_1^2} \quad (1a)$$

$$\text{Schichten: } n_{\parallel}^2 - n_{\perp}^2 = \frac{\delta_1 \delta_2 (n_1^2 - n_2^2)^2}{\delta_1 n_2^2 + \delta_2 n_1^2} \quad (1b)$$

Hierin bedeuten n_1 den Brechungsindex der Stäbe oder Schichten, n_2 der Brechungsindex des Zwischenmediums, n_{\parallel} und n_{\perp} die Brechungsindices des Mischkörpers parallel und senkrecht zur Orientierungsachse. δ_1 und δ_2 sind die relativen Volumina der beiden Mischbestandteile ($\delta_1 + \delta_2 = 1$). Für die Anwendung dieser Formeln ist es von besonderem Vorteile, dass die Kenntnis der absoluten Dicke der Stäbchen oder Schichten nicht notwendig ist; man braucht nur ihr relatives Volumen zu kennen.

Bei der Untersuchung auf Formdoppelbrechung verändert man den Brechungsindex n_2 durch Variation des Imbibitionsmittels. Die Doppelbrechung nimmt dann mit steigendem n_2 ab, wird bei $n_1 = n_2$ Null und steigt dann wieder an. Trägt man n_2 als x in einem Koordinatensystem auf, wird die Abhängigkeit der Formdoppelbrechung durch eine Hyperbel beschrieben, die die x -Achse bei $n_1 = n_2$ tangiert (FREY-WYSSLING 1940).

b) *Zusammenwirkung von Form- und Eigendoppelbrechung.*

Die Theorie von WIENER setzt voraus, dass beide Mischbestandteile isotrop seien. Dies ist jedoch ein seltener Spezialfall; denn im allgemeinen sind submikroskopische Stäbchen oder Schichten aus Faden- oder Blättchenmolekülen aufgebaut, die sich optisch anisotrop verhalten. Die unsichtbaren Stäbchen oder Schichten besitzen daher eine *Eigendoppelbrechung*. AMBRONN

(1917, 1919) hat den Zusammenhang zwischen Stäbchen- und Eigendoppelbrechung aufgeklärt. Die Eigendoppelbrechung ist bei den Imbibitionsversuchen konstant. Die *Gesamtdoppelbrechung* des Mischkörpers setzt sich daher additiv aus Eigendoppelbrechung E + Formdoppelbrechung F zusammen.

Die Eigendoppelbrechung ist bei den bisher untersuchten Stäbchen- oder Schichtenmischkörpern als optisch einachsig befunden worden, wobei die optische Achse mit der Orientierungsachse des Mischkörpers zusammenfällt. E kann daher ausgedrückt werden durch $n_a - n_0$, wo n_a den ausserordentlichen und n_0 den ordentlichen Brechungsindex des Mischbestandteiles 1 bedeuten.

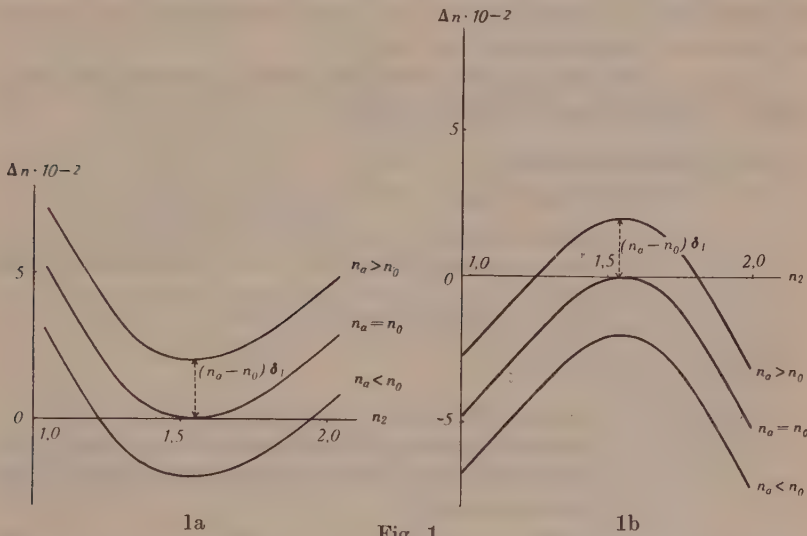


Fig. 1.

Doppelbrechungskurven nach WIENER. Abhängigkeit der Doppelbrechung Δn bei fehlender ($n_a = n_0$), positiver ($n_a > n_0$) und negativer ($n_a < n_0$) Eigendoppelbrechung $n_a - n_0$. $n_1 = 1,54$, $\delta_1 = 0,3$.

1 a) Stäbchenmischkörper. 1 b) Schichtenmischkörper.

In den Formeln von WIENER ist dann der Brechungsindex n_1 des Bestandteiles 1 keine Konstante, sondern er variiert zwischen n_a und n_0 je nach der Richtung, in welcher der Mischkörper vom linear polarisierten Lichte durchsetzt wird. MÖHRING (1926) hat indessen bewiesen, dass die Formeln von WIENER bei der Messgenauigkeit der Gangunterschiede, die bei biologischen Mischkörpern erreicht wird, gleichwohl anwendbar sind, wenn man für n_1 einen mittleren Brechungsindex $\frac{1}{2}(n_a + n_0)$ einsetzt.

Die Eigendoppelbrechung kann positiv oder negativ ausfallen; als seltener Sonderfall kann sie fehlen. Kombiniert mit positiver (Stäbchendoppelbrechung) und negativer (Schichtendoppelbrechung) Formdoppelbrechung ergeben sich daher sechs verschiedene Möglichkeiten des Verlaufes der Gesamtdoppelbrechung Δn bei Imbibitionsversuchen mit AMBRONN'schen Mischkörpern (FREY 1924, AMBRONN und FREY 1926), die in Fig. 1 dargestellt sind. Besonders interessant sind die Fälle, wo die Eigendoppelbrechung das umgekehrte Vorzeichen der Formdoppelbrechung besitzt, weil dann die Gesamtdoppelbrechung in Funktion von n_2 des veränderlichen Mischbestandteiles zweimal Null wird, so dass der Mischkörper isotrop oder, falls die Imbibitionsflüssigkeiten nicht die gleiche Dispersion wie der Mischbestandteil 1 aufweisen, in anomalen Interferenzfarben erscheint.

Folgende Mischkörper sind bisher optisch genauer untersucht worden (FREY-WYSSLING 1938, 1939):

Stäbchenmischkörper:

E positiv: Zellulosefasern, Seidenfibroin, gegerbte Sehnen, Nervenachsen

$E = \text{Null}$: Tonerdefasern, Kieselgur, Asche verkieselter Zellwände

E negativ: Chitin, Nitrozellulose

Schichtenmischkörper:

$E = \text{Null}$: entwachste Kutinschichten

E positiv: Nervenscheiden, Sehstäbchen des Auges, rote Blutkörperchen, Chloroplasten, wachshaltige Kutinschichten.

2. Mischkörper mit amikroskopischen Bauelementen.

Denkt man sich die submikroskopischen Stäbchen oder Schichten immer dünner, bis sie nur noch den Durchmesser einer einzigen Moleküldicke besitzen, so kann man die Formeln von WIENER nicht mehr anwenden, da man ja einzelnen Molekülen keinen Brechungsindex zuordnen kann. Anstelle des Brechungsvermögens tritt die optische Polarisierbarkeit. Da WIENER vermutete, die von ihm aufgefundenen Gesetzmässigkeiten lassen sich durch das ganze submikroskopische Gebiet bis hinunter zu molekularen Dispersionen verfolgen, soll diese Möglichkeit näher untersucht werden.

Hiefür steht eine Formel von SADRON (1937) zur Verfügung, die für rotationssymmetrische Moleküle gilt:

$$\begin{aligned} \Delta n \cdot \frac{n_m}{(n_m^2 + 2)^2} = & \frac{2\pi}{3} \left[\int (\alpha_a \cos^2 \Theta + \alpha_0 \sin^2 \Theta) dN \right. \\ & \left. - \int (\alpha_a \sin^2 \Theta + \alpha_0 \cos^2 \Theta) dN \right] \\ & + \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + 2} \left[\int (\varepsilon_a \alpha_a \cos^2 \Theta + \varepsilon_0 \alpha_0 \sin^2 \Theta) dN \right. \\ & \left. - \int (\varepsilon_a \alpha_a \sin^2 \Theta + \varepsilon_0 \alpha_0 \cos^2 \Theta) dN \right]. \end{aligned}$$

Hiebei bedeuten:

- Δn = die gesuchte Gesamtdoppelbrechung des Mischkörpers.
 n_m = der Brechungsindex des Mischkörpers bei idealer Unordnung der Mischbestandteile (statistische Isotropie).
 n_2 = der Brechungsindex des Lösungs- oder Imbibitionsmittels.
 α_a, α_0 = die ausserordentliche und ordentliche optische Polarisierbarkeit der rotationsellipsoidischen Moleküle.
 $\varepsilon_a, \varepsilon_0$ = die Formfaktoren der Moleküle in Richtung der Rotationsachse und senkrecht dazu.
 Θ = der variable Richtungswinkel zwischen der Rotationsachse der Ellipsoide und der festen Richtung, auf die die Doppelbrechung bezogen wird.
 dN = die Anzahl Moleküle mit dem Richtungswinkel Θ in der Volumeneinheit.

Die Formel ist von SADRON für die Berechnung der Strömungsdoppelbrechung von makromolekularen Lösungen abgeleitet worden. Beim Strömungsvorgange ergibt sich eine komplizierte Verteilungsfunktion von Θ , die durch das Widerspiel von Strömungsgefälle und BROWN'scher Bewegung gegeben ist. Bei der Auflösung der obigen Integrale zur Berechnung der Strömungsdoppelbrechung müssen daher der Geschwindigkeitsgradient, die Rotationsdiffusionskonstante und das Achsenverhältnis der ellipsoidischen Moleküle eingeführt werden. Wenn wir uns jedoch wie bei den WIENERschen Mischkörpern anstelle der Stäbchen parallelisierte endlose Fadenmoleküle und anstelle der Schichten parallelisierte endlos ausgebreitete Blättchenmoleküle vorstellen, deren Richtung unveränderlich ist, so vereinfacht sich die allgemeine Formel von SADRON beträchtlich. Der Winkel Θ ist konstant gleich 0° , so dass alle Glieder mit $\sin \Theta$ in Wegfall kommen. Berücksichtigt man ferner, dass für die Formfaktoren von Rotationsellipsoiden die Beziehung gilt $\varepsilon_a = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 = -\frac{1}{2} e$, so dass man also den ausserordentlichen und den ordentlichen Formfaktor durch die eine

Grösse e ersetzen kann, ergibt sich (vgl. PETERLIN und STUART 1943):

$$\Delta n = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{(n_m^2 + 2)^2}{n_m} \cdot N \left[\underbrace{(\alpha_a - \alpha_0)}_E - \underbrace{\frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + 2} \cdot e (2\alpha_a + \alpha_0)}_F \right]. \quad (2)$$

Die Gesamtdoppelbrechung Δn eines Mischkörpers, dessen Mischbestandteil 1 nicht aus submikroskopischen, sondern aus amikroskopischen Bauelementen (individualisierten Makromolekülen) besteht, ist somit nach (2) von den Hauptpolarisierbarkeiten α_a und α_0 der Moleküle abhängig. Der Ausdruck von SADRON besteht aus zwei Termen. Der erste lautet $\alpha_a - \alpha_0$. Er ist ausschliesslich von den optischen Eigenschaften der Makromoleküle abhängig und stellt daher die optische Eigenanisotropie der Moleküle dar. Er kann mit der Eigendoppelbrechung $n_a - n_0$ bei den AMBRONN'schen Mischkörpern verglichen werden. Der zweite Term enthält dagegen den Formfaktor e . Er ist also von der speziellen Form der Makromoleküle abhängig und stellt deshalb einen Ausdruck für die Formanisotropie vor.

Die Gesamtdoppelbrechung eines Mischkörpers mit amikroskopischen Bauelementen setzt sich daher, wie bei Mischkörpern mit submikroskopischen Bauelementen, aus einer vom Mischbestandteile 1 abhängigen *Eigenanisotropie* E und einer sowohl vom Mischbestandteile 2 (n_2) als auch vom Mischbestandteile 1 (α_a und α_0) abhängigen *Formanisotropie* F zusammen. Die Abhängigkeit der Gesamtdoppelbrechung Δn von n_2 ist aber anderer Art als nach der Formel von WIENER, wie aus folgender Gegenüberstellung hervorgeht.

3. Vergleich der beiden Doppelbrechungsformeln (1) und (2).

Um die Formel (2) mit den WIENER-Formeln (1) vergleichen zu können, muss zuerst ein Ausdruck aufgestellt werden, der nicht nur die Formanisotropie, sondern auch die Eigenanisotropie eines AMBRONN'schen Mischkörpers enthält.

Da bei der Imbibition von Mischkörpern meist Quellungserscheinungen auftreten, ist die Eigendoppelbrechung eine Funktion des Quellungsgrades. Wenn man unter dem Quellungsgrad q das Verhältnis des gequollenen Mischkörpers zu dem des ungequollenen Mischkörpers versteht, so beträgt die Eigendoppelbrechung nach KRATKY und PLATZEK (1938)

$$E = (n_a - n_0)/q.$$

Zwischen dem Quellungsgrade q und dem relativen Volumen δ_1 der aufgequollenen Kolloidsubstanz besteht die Beziehung

$$q = 1/\delta_1,$$

denn δ_1 ist das Verhältnis des Volumens der ungequollenen Substanz 1 zum Volumen des imbibierten Mischkörpers.

Die Formel $\Delta n = E + F$ geht daher unter Berücksichtigung, dass $n_{\parallel}^2 - n_{\perp}^2 = (n_{\parallel} - n_{\perp})(n_{\parallel} + n_{\perp})$ und $n_{\parallel} + n_{\perp} \cong 2 n_m$, in folgende Ausdrücke über:

$$\text{Stäbchen: } \Delta n = \delta_1 \left[(n_a - n_0) + \frac{1}{2 n_m} \cdot \frac{(n_1^2 - n_2^2)^2}{\left(\frac{1+\delta_1}{1-\delta_1}\right) n_2^2 + n_1^2} \right] \quad (3a)$$

$$\text{Schichten: } \Delta n = \delta_1 \left[(n_a - n_0) - \frac{1}{2 n_m} \cdot \frac{(n_1^2 - n_2^2)^2}{\left(\frac{\delta_1}{1-\delta_1}\right) n_2^2 + n_1^2} \right] \quad (3b)$$

Bei der Formel von SADRON kann das relative Volumen δ_1 ebenfalls eingeführt werden, wenn man Zähler und Nenner mit dem Volumen v eines einzelnen Makromoleküles multipliziert. Da N die Anzahl Moleküle pro Volumeneinheit ist, erhält man

$$v \cdot N = \delta_1.$$

Unter Berücksichtigung, dass der Formfaktor e für stäbchenförmige Rotationsellipsoide $1/2$ und für abgeplattete scheibenförmige Rotationsellipsoide -1 beträgt (SADRON 1937; PETERLIN und STUART 1943), erhält man für

$$\begin{aligned} \text{Fadenmoleküle: } \Delta n = \frac{2\pi}{3v} \cdot \frac{(n_m^2 + 2)^2}{n_m} \\ \cdot \delta_1 \left[(\alpha_a - \alpha_0) - \frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + 2} (\alpha_a + \frac{1}{2} \alpha_0) \right] \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \text{Blättchenmoleküle: } \Delta n = \frac{2\pi}{3v} \cdot \frac{(n_m^2 + 2)^2}{n_m} \\ \cdot \delta_1 \left[(\alpha_a - \alpha_0) + \frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + 2} (2\alpha_a + \alpha_0) \right] \end{aligned} \quad (4b)$$

Man erkennt hieraus, dass die Formdoppelbrechung von Fadenmolekülen prinzipiell *negativ* ist, da der Term für F negativ ausfällt, während die Theorie von WIENER für Stäbchen gerade umgekehrt positive Formdoppelbrechung ergibt. Für Mischkörper aus Blättchenmolekülen liefert (4b) dagegen *positive* Formdoppelbrechung, während diese beim Schichtenmischkörper (3b) negativ

ist! Obwohl also die Voraussage, dass Moleküle ebenso wie anisodiametrische Kolloidteilchen einen Formdoppelbrechungseffekt erzeugen, richtig ist, zeigt die Theorie, dass sich das Vorzeichen dieses Effektes umkehrt, wenn man von den submikroskopischen zu amikroskopischen Dimensionen übergeht!

Auch für die Zusammenwirkung von Eigendoppelbrechung und Formdoppelbrechung fallen die Verhältnisse ganz anders aus als für AMBRONN'sche Mischkörper. Wenn man die Abhängigkeit der Gesamtdoppelbrechung Δn von n_2 aufzeichnen will, so stösst man auf die Schwierigkeit, dass n_m selbst eine Funktion von n_2 ist. Bei der Strömungsdoppelbrechung ist die Konzentration der Sole so gering, dass SADRON $n_m = n_2$ also gleich dem Brechungsindex des Lösungsmittels setzt. Im anderen Extremfalle eines nur wenige Prozente Quellungsmittel enthaltenden Geles mit parallelisierten Fadenmolekülen darf man $n_m \sim n_1$ setzen, das heisst, der Faktor $(n_m^2 + 2)^2/n_m$ ist in erster Näherung konstant. Die Zusammenwirkung von Form- und Eigendoppelbrechung ergibt sich dann aus Fig. 2.

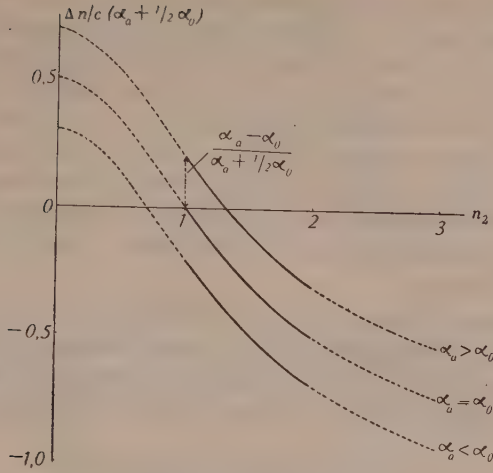
Setzt man das konstante Produkt $\frac{2\pi}{3v} \cdot \frac{(n_m^2 + 2)^2}{n_m} \cdot \delta_1 = C$, und trägt $n/C \cdot (\alpha_a + \frac{1}{2}\alpha_0)$ in Funktion von n_2 auf, erhält man die Kurven von Fig. 2a. Bei fehlender Eigenanisotropie ($\alpha_a = \alpha_0$) nimmt die Doppelbrechung von $+\frac{1}{2}$ auf -1 ab, wenn man n_2 von 0 bis ∞ wachsen lässt. Bei $n_2=1$ wechselt die Kurve als annähernde Gerade vom positiven ins negative Gebiet hinüber. Im Gebiete von $n_2 = 1$ bis $n_2 = 2$, das für die üblichen Imbibitions-mittel allein in Frage kommt, ist die Doppelbrechung negativ.

Besitzen die Moleküle eine Eigenanisotropie, wie dies in der Regel der Fall ist, so verschiebt sich die Kurve nach oben oder nach unten, je nachdem ob $\alpha_a - \alpha_0$ grösser oder kleiner als Null ist. Im ersten Falle kann man von positiver, im zweiten dagegen von negativer Eigenanisotropie sprechen. Nur wenn positive Eigenanisotropie vorliegt, kann eine positive Gesamtdoppelbrechung auftreten, die mit zunehmendem n_2 Null und schliesslich negativ wird. Ein Minimum wie bei den WIENER-Kurven tritt nicht auf!

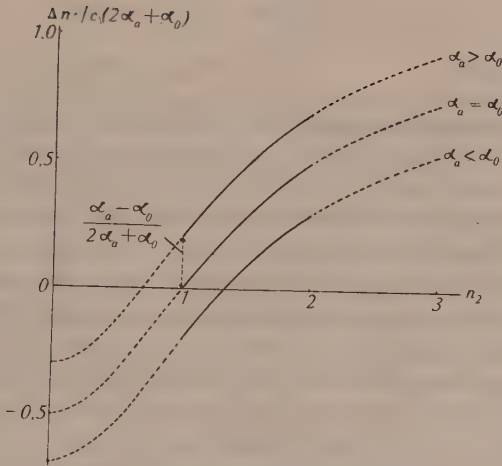
Wichtig ist der Schnittpunkt der Doppelbrechungskurve mit der n_2 -Achse, denn dort gilt

$$\alpha_a - \alpha_0 = \frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + 2} (\alpha_a + \frac{1}{2}\alpha_0), \quad (5)$$

woraus das Verhältnis α_a/α_0 der unbekannten Polarisierbarkeiten von Fadenmolekülen berechnet werden kann (vgl. Tab. 2).



2a) Fadenmischkörper.



2b) Blättchenmischkörper.

Fig. 2.

Doppelbrechungskurven nach SADRON. Abhängigkeit der Doppelbrechung Δn vom Brechungsindex des Imbibitionsmittels n_2 bei fehlender ($\alpha_a = \alpha_0$), positiver ($\alpha_a > \alpha_0$) und negativer ($\alpha_a < \alpha_0$) Eigenanisotropie der Moleküle.

$$n_m = \text{konstant}, \quad C = \frac{2\pi}{3v} \cdot \frac{(n_m^2 + 2)^2}{n_m} \cdot \delta_1;$$

Für Blättchenmoleküle ergeben sich inbezug auf die n_2 -Achse spiegelbildliche Kurven (Fig. 2b). Dies gilt, solange man die Doppelbrechung auf die Rotationsachse der Scheibenmoleküle bezieht. Bei Orientierungsversuchen stellt sich die kurze Scheibenachse jedoch senkrecht zur Orientierungsrichtung ein, so dass sich — bezogen auf die Orientierungsrichtung — das Vorzeichen der Doppelbrechung umkehrt. Der Verlauf der Doppelbrechungskurve ist dann der gleiche wie bei Fadenmolekülen, so dass man auf diesem Wege nicht entscheiden kann, ob stäbige oder blättchenartige Moleküle vorliegen.

Etwas komplizierter sind die Verhältnisse, wenn der Mischkörper arm an Bestandteil 1 ist (Sole, stark gequollene Gele). Dann liegt der von SADRON in Betracht gezogene Fall vor, dass $n_m \cong n_2$ ist. Die Ausdrücke E und F lauten dann für den Fadenmischkörper

$$E = (\alpha_a - \alpha_0) (n_2^3 + 4 n_2 + 4/n_2)$$

$$F = -(\alpha_a + 1/2 \alpha_0) (n_2^3 + n_2 - 2/n_2)$$

Für die graphische Darstellung wählen wir:

$$E' = \frac{\alpha_a - \alpha_0}{\alpha_a + 1/2 \alpha_0} (n_2^3 + 4 n_2 + 4/n_2)$$

$$F' = - (n_2^3 + n_2 - 2/n_2)$$

Die Eigendoppelbrechung ist daher nicht mehr konstant, sondern eine Funktion von n_2 . Während nach der Formel von WIENER und auch nach Gl. 4 die Eigendoppelbrechung durch eine zur n_2 -Achse parallele Gerade dargestellt wird, liegt hier eine kräftig gekrümmte Minimumkurve vor.

Auch die Formdoppelbrechungskurve hat einen anderen Verlauf als in Fig. 2. Aber es ist wiederum so, dass sie für $n_2 = 1$ als ungefähre Gerade vom positiven ins negative Gebiet hinüberwechselt. Fig. 3a und b zeigt die resultierenden Gesamtdoppelbrechungskurven bei positiver Eigenanisotropie der Fadenmoleküle. Für das praktisch in Betracht kommende Gebiet $n_2 = 1-2$ ergibt sich prinzipiell der gleiche Verlauf wie in Fig. 2. Da die beiden Kurvenscharen von Fig. 2 und Fig. 3 die beiden Extremfälle für $n_m = n_1$ und $n_m = n_2$ darstellen, müssen alle experimentell zu erwartenden Doppelbrechungskurven zwischen diesen prinzipiell gleich verlaufenden Sonderfällen drin liegen. Man kommt daher zum Schlusse, dass für Fadenmischkörper immer eine negative Formdoppelbrechung zu erwarten ist, die nur im Falle von positiver Eigenanisotropie über Null ins positive Gebiet hinauf kompensiert

werden kann. Für Mischkörper aus Blättchenmolekülen mit negativer Eigenanisotropie gelten die entsprechenden Verhältnisse mit umgekehrten Vorzeichen (Fig. 3b).

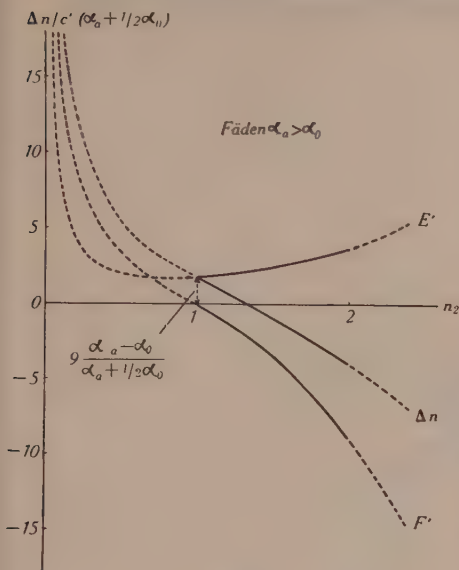


Fig. 3a.

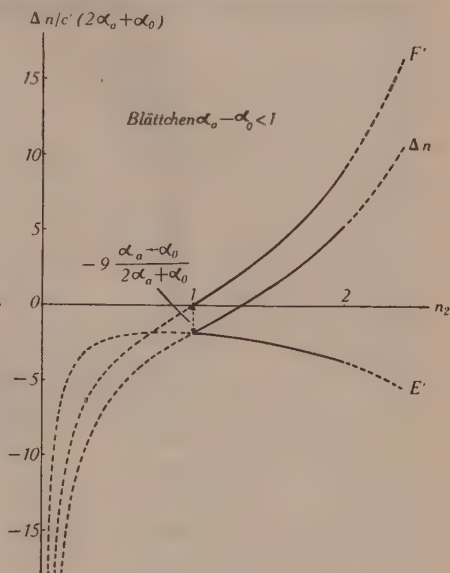


Fig. 3b.

Doppelbrechungskurven nach SADRON. Zusammensetzung der Gesamtdoppelbrechung Δn aus Formdoppelbrechung F' und Eigendoppelbrechung E' eines Mischkörpers, wenn $n_m = n_2$; $C' = \frac{2\pi}{3v} \cdot \delta_1$.

3a) Fadenmischkörper bei positiver Eigenanisotropie der Moleküle $\frac{\alpha_a}{\alpha_0} = 1,4$ (bei negativer Eigenanisotropie ($\alpha_a < \alpha_0$) würde E im negativen Gebiete verlaufen und die Δn -Kurve würde entsprechend nach unten verschoben).

3b) Blättchenmischkörper bei negativer Eigenanisotropie der Moleküle $\frac{\alpha_a}{\alpha_0} = 0,54$ (bei positiver Eigenanisotropie ($\alpha_a > \alpha_0$) würde E im positiven Gebiete verlaufen und die n -Kurve entsprechend nach oben verschoben).

4. Beispiele.

SIGNER hat die Strömungsdoppelbrechung von Polystyrol in verschiedenen Lösungsmitteln gemessen. Nach SADRON müssen die erhaltenen Messpunkte auf einer Geraden liegen, wenn man die Doppelbrechung gegen $\frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + 2}$ austrägt. Wie Fig. 4 zeigt, bleibt die Kurve praktisch auch gerade, wenn man sie gegen n_2 aufträgt, wodurch der Unterschied gegenüber den gekrümmten WIENER-Kurven deutlich zum Ausdruck kommt.

Fig. 5 ist ein zweites Beispiel, das zeigt, wie die Abhängigkeit der Doppelbrechung von n_2 des Dispersionsmittels bei molekularen Dispersionen in erster Näherung linear verläuft. Es handelt sich um Lösungen von Nitrocellulose, deren Strömungsdoppelbrechung

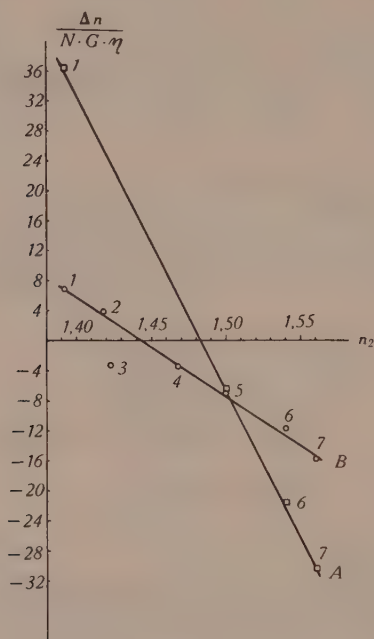


Fig. 4.

Abhängigkeit der Strömungsdoppelbrechung von Polystyrollösungen (Konzentration $c \rightarrow 0$) vom Brechungsindex n_2 des Lösungsmittels (Daten bei SADRON 1937)

N = Anzahl der gelösten Fadenmoleküle.

G = Geschwindigkeitsgradient in der Strömungstrommel.

η = Viskosität der Lösung (für $c \rightarrow 0$ Viskosität des Lösungsmittel).

Lösungsmittel:	1 Butylacetat	$(n_2)_D = 1,392$
	2 Dioxan · 1,1 H ₂ O	1,418
	3 Dioxan rein	1,423
	4 Decalin	1,468
	5 Toluol	1,500
	6 Äthylenbromid	1,540
	7 Brombenzol	1,560

A = Polystyrol' vom Molekulargewicht 193000

B = „ „ „ 175000

von SIGNER in verschiedenen Lösungsmitteln gemessen worden ist. Die Daten, die in Figg. 4 und 5 in Funktion von n_2 graphisch zur Darstellung gelangt sind, findet man bei SADRON (1937) tabellarisch zusammengestellt. Es geht aus ihnen hervor, dass Mischkörper mit

Fadenmolekülen im Bereiche von $n_2 = 1,3$ bis $1,6$ eine lineare Abhängigkeit ihrer Formdoppelbrechung vom Brechungsindex des Imbibitionsmittels (Lösungsmittel, Quellungsmittel) aufweisen.

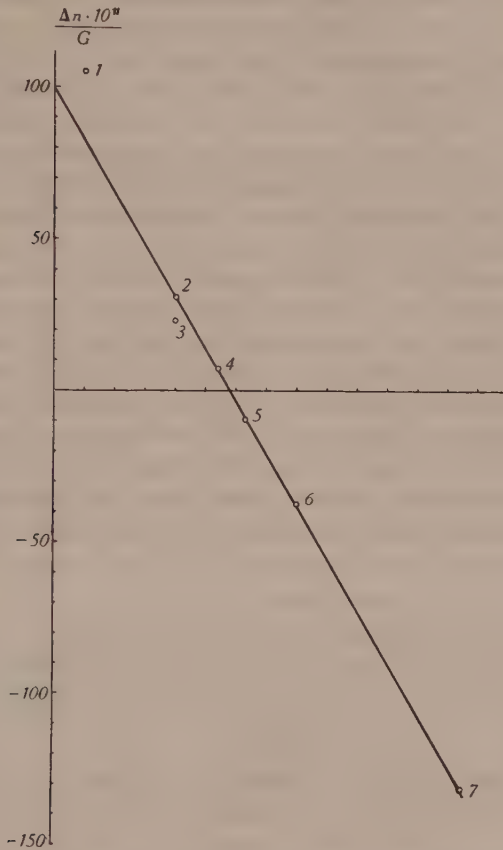


Fig. 5.

Abhängigkeit der Strömungsdoppelbrechung von Nitrocelluloselösungen (Konzentration 1,5%) vom Brechungsindex n_2 des Lösungsmittels. (Daten bei SADRON 1937).

G = Geschwindigkeitsgradient in der Strömungstrommel.

η = Viskosität der Lösung.

Lösungsmittel: 1	Methanol	$(n_2)_D$	1,330
2	Methylacetat		1,360
3	Aceton		1,360
4	Äthylacetat		1,374
5	Butanon		1,383
6	Amylacetat		1,400
7	Cyclohexanon		1,455

Mit der Formel von SADRON (4) lässt sich die Doppelbrechung von makromolekularen Lösungen vollständig erfassen. Es erhebt sich nun die Frage, wie es sich bei Gelen verhält. Den Gelen liegen je nach ihrem Feinbau zwei verschiedene Bautypen zugrunde: entweder besteht das Gelgerüst aus kristallisierten Micellarsträngen (AMBRONN'sche Mischkörper) oder aus individualisierten untereinander verhängten Fadenmolekülen. Im ersten Falle liegt ein *Micellargerüst*, im zweiten dagegen ein *Molekulargerüst* vor. Hinsichtlich der Doppelbrechung wäre nun zu erwarten, dass für den ersten Typus die Mischkörpertheorie von WIENER (3) gilt, wie AMBRONN gezeigt hat, für den zweiten Typus dagegen die von SADRON abgeleiteten Beziehungen (4).

VON VERMAAS (1940, 1942) liegen Beobachtungen an gedehnten Nitrocellulosegelen vor, die er so gedeutet hat, wie wenn sich die beiden Möglichkeiten überlagern würden. Er zieht von der gemessenen Gesamtdoppelbrechung die Eigendoppelbrechung, die bei seinen Nitrocellulosefäden $-322 \cdot 10^{-5}$ beträgt, und die nach WIENER berechnete Stäbchendoppelbrechung ab. Es bleibt dann eine sehr beträchtliche Restdoppelbrechung übrig, die er als *Adsorptionsdoppelbrechung* auffasst und mit A bezeichnet. Nach VERMAAS setzt sich die Gesamtdoppelbrechung eines Geles daher folgendermassen zusammen:

$$\Delta n = \delta_1 E + S + A,$$

wobei E die Eigendoppelbrechung des parallelisierten getrockneten Geles, S die nach WIENER berechnete Stäbchendoppelbrechung und A die zusätzliche Adsorptionsdoppelbrechung bedeuten.

Tabelle 1.

Doppelbrechung von Nitrocellulosefäden nach VERMAAS (1941, S. 135).

	$(n_2)_D$	δ_1	$\Delta n \cdot 10^5$ (beob.)	$\delta_1 E \cdot 10^5$	$S \cdot 10^5$	$A \cdot 10^5$	$\frac{\Delta n \cdot 10^5}{\delta_1}$
Trichloräthylen .	1,475	0,655	-209	-211	+21	-19	-319,8
Tetrachloräthan .	1,497	0,566	-412	-182	+8	-238	-729,2
Sek. Butyljodid .	1,503	0,599	-339	-193	+3	-149	-566,1
Methyljodid . .	1,530	0,610	-366	-197	0	-169	-600,2
Äthylenbromid. .	1,538	0,573	-380	-184	+3	-199	-665,0

VERMAAS stellt sich vor, dass das Zusatzglied A dadurch zustande komme, dass die Imbibitionsflüssigkeit vom Gelgerüste gerichtet adsorbiert werde. Wie Tabelle 1 zeigt, sind die gefundenen Effekte sehr beträchtlich, so dass man nicht wohl annehmen kann, sie seien durch Adsorptionerscheinungen an micellaren Gel-

strängen bedingt. VERMAAS nimmt deshalb an, dass das Gelgerüst stellenweise bis zu den Fadenmolekülen hinunter aufgespalten sei, und dass in jenen Gebieten diese starken Adsorptionseffekte zustande kommen. Bevor eine solche Theorie näher diskutiert werden kann, muss jedoch geprüft werden, ob nicht die Formel von SADRON eine Erklärung der beobachteten Effekte erlaubt, ohne dass eine neue Hypothese (Adsorption) zu Hilfe genommen werden muss.

Wenn man annimmt, dass WIENER-Doppelbrechung und molekulare Doppelbrechung zusammenwirken, so ist es schwer, abzuschätzen, welcher Anteil der Gesamtdoppelbrechung dem micellaren und welcher dem molekularen Gerüstanteil zukommt, solange nicht bekannt ist, wieviel Prozent von der Gerüstsubstanz kristallisiert ist. Jedenfalls geht es kaum an, mit VERMAAS einen AMBRONN'schen Mischkörper anzunehmen, wenn seine Eigendoppelbrechung und die WIENER'sche Stäbchendoppelbrechung zusammen nur einen so geringen Teil von Δn ausmachen. Viel eher liegt der umgekehrte Fall im Bereiche der Möglichkeit, dass das Imbibitionsmittel überall intramolecular quillt, wenn es ihm schon gelingt, an gewissen Stellen zwischen die einzelnen Fadenmoleküle einzudringen. Unter diesen Umständen müsste man die gesamte Doppelbrechung nach SADRON deuten, und die Abhängigkeit von n_2 müsste dann linear erscheinen. Um die beobachteten Werte von Tabelle 1 miteinander vergleichen zu können, müssen sie auf den gleichen Quellungsgrad umgerechnet werden, was in der letzten Spalte geschehen ist. Wie Fig. 6 zeigt, streuen diese Werte stark. Berechnet man mit Hilfe der Ausgleichsrechnung die Gerade, die die 5 Punkte darzustellen gestattet, so schneidet sie die n_2 -Achse bei 1,362, d. h. ganz in der Nähe des entsprechenden Schnittpunktes von Fig. 5, die die Strömungsdoppelbrechung von Nitrocellulose wiedergibt. Es entsteht daher kein Widerspruch, wenn man die Nitrocellulose-Fäden von VERMAAS als molekulare Mischkörper auffasst und die Doppelbrechungserscheinungen nach SADRON zu deuten versucht. Nur wenn es gelingen sollte, die Doppelbrechungskurve mit steigendem n_2 wieder zum Ansteigen zu bringen, wäre ein Beweis für einen WIENER'schen Mischkörper vorhanden. Solange man experimentell nur absteigende Doppelbrechungskurven findet und den aufsteigenden Hyperbelast nicht nachweisen kann, liegt kein schlüssiger Hinweis für WIENER'sche Formdoppelbrechung vor.

Durch diese Ausführungen ist keineswegs bewiesen, dass den Nitrocellulosegelen von VERMAAS ein Molekulargerüst zukommt. Sondern es ist nur gezeigt, dass eine derartige Annahme zu keinem

Widersprüche führt, während die Deutung der optischen Befunde bei der Voraussetzung eines Micellargerüsts auf Schwierigkeiten stösst. Wahrscheinlich liegt wie VERMAAS annimmt, teils micellare und teils molekulare Zerteilung der Nitrocellulose vor; dieser Fall kann jedoch von keiner der bestehenden Theorien vollständig erfasst werden.

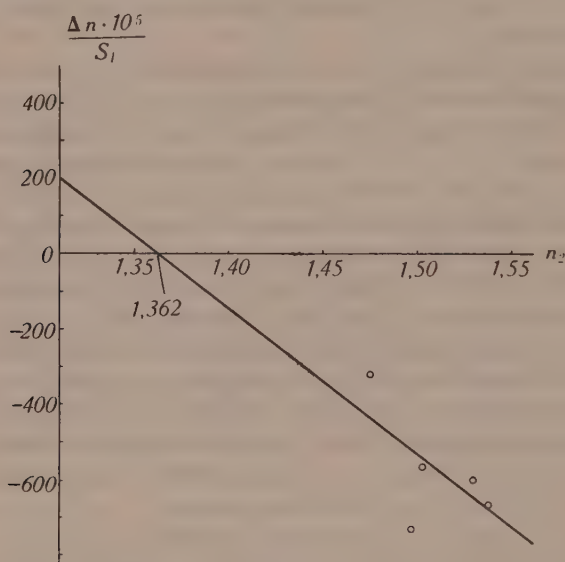


Fig. 6.

Doppelbrechung von Nitrocellulosefäden, die nach der Abhängigkeit ihrer Doppelbrechung von n_2 zu schliessen keinen AMBRONN'schen Mischkörper vorstellen (vgl. Tabelle 1).

Da der Schnittpunkt der SADRON'schen Doppelbrechungsgeraden mit der n_2 -Achse nach Gl. (5) gestattet, das Verhältnis der Polarisierbarkeiten α_a/α_0 der Fadenmoleküle anzugeben, sind in Tabelle 2 die entsprechenden Daten zusammengestellt. Man

Tabelle 2.

Verhältnis der Polarisierbarkeiten α_a/α_0 von Fadenmolekülen.

	$(n_2)_{\Delta n=0}$	$\frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + 2}$	$\frac{\alpha_a}{\alpha_0}$
Polystyrol (193000) nach SIGNER . .	1,483	0,285	1,593
Polystyrol (175000) nach SIGNER . .	1,443	0,265	1,545
Nitrocellulose nach SIGNER	1,378	0,230	1,459
Nitrocellulose nach VERMAAS	1,362	0,223	1,435

erkennt beim Polystyrol, dass das Verhältnis α_a/α_0 vom Polymerisationsgrade der Fadenmoleküle abhängt, und bei der Nitrocellulose, dass die Messungen an einem Gele (VERMAAS) zu ähnlichen Werten führen wie die Strömungsdoppelbrechung von einem Sole (SIGNER).

Die Formeln von SADRON sind nur anwendbar, solange die Imbibitionsflüssigkeit ungeordnet in den Fadenmischkörper eingelagert wird. Erfolgt dagegen eine Ausrichtung der Flüssigkeitsmoleküle durch das Gelgerüst, so treten neue Anisotropie-Effekte auf, die in der hier behandelten Theorie nicht enthalten sind. VERMAAS hat festgestellt, dass bei Imbibition seiner Nitrocellulosefäden mit aromatischen Verbindungen stark positive Doppelbrechungseffekte auftreten, die der Theorie von WIENER widersprechen; sie können aber auch nicht nach SADRON gedeutet werden, da bei den Brechungsindizes n_2 , die den aromatischen Flüssigkeiten zukommen, die Doppelbrechung negativ ausfallen müsste. In diesem Falle, wo keine der vorhandenen Theorien die Beobachtungstatsachen deuten kann, ist es wohl erlaubt, mit VERMAAS eine Veränderung der optischen Erscheinungen durch eine zusätzliche gegenseitige Beeinflussung von Gelgerüst und Imbibitionsflüssigkeit anzunehmen, falls jegliche Verseifung von Nitroestergruppen ausgeschlossen werden kann. Sofern also keine chemische Reaktion erfolgt, mag es gerechtfertigt sein, von einer gerichteten Adsorption zu sprechen.

5. Zusammenfassung.

Beim Übergange von Mischkörpern mit submikroskopischen (micellaren) zu solchen mit amikroskopischen (molekularen), anisodiametrischen Bauelementen bleibt die Erscheinung der *Formdoppelbrechung* erhalten. Sie äussert sich darin, dass die Doppelbrechung des Mischkörpers eine Funktion des Brechungsindex n_2 der Imbibitionsflüssigkeit (Quellungsmittel, Lösungsmittel) ist. Beim micellaren Mischkörper folgt diese Abhängigkeit nach WIENER dem Gesetze einer hyperbolischen Minimumkurve, während sie beim molekularen Mischkörper nach SADRON in erster Näherung eine Gerade vorstellt. Für den Zylindermischkörper ist die Formdoppelbrechung nach WIENER positiv, nach SADRON dagegen negativ; für lamellare Mischkörper ist umgekehrt die WIENER-Doppelbrechung negativ, die Formdoppelbrechung nach SADRON hingegen positiv!

Diese Verhältnisse müssen berücksichtigt werden, wenn man Doppelbrechungsuntersuchungen an Gelen vornimmt, deren fester

Anteil kein Micellargerüst, sondern ein Molekulargerüst vorstellt, wie dies bei sehr wasserreichen Biogelen (z. B. Cytoplasma) zu erwarten ist.

Pflanzenphysiologisches Institut der E. T. H., Zürich.

Literaturverzeichnis.

- AMBRONN, H. Kolloid-Z. **20**, 173 (1917). Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1919, S. 299.
- AMBRONN & FREY. Das Polarisationsmikroskop. Leipzig 1926.
- FREY, A. Kolloid-Beih. **20**, 209 (1924).
- FREY-WYSSLING, A. Submikroskopische Morphologie des Protoplasmas und seiner Derivate. Berlin 1938.
- FREY-WYSSLING, A. Zeiss-Nachr. **3**, 54 (1939).
- FREY-WYSSLING, A. Kolloid-Z. **90**, 33 (1940).
- KRATKY & PLATZEK. Kolloid-Z. **84**, 268 (1938).
- MÖHRING, A. Kolloid-Beih. **23**, 152 (1926).
- PETERLIN & STUART, Hand- u. Jahrb. d. chemischen Physik, Bd. 8, Abschnitt. I B, S. 96 (1943).
- SADRON, G. J. Physique et Radium **8**, 481 (1937).
- SIGNER, R. Trans. Far. Soc. **1935**, S. 165.
- SIGNER & SADRON. Helv. Chim. Acta **9**, 1324 (1936).
- SCHMIDT, W. J. Z. wiss. Mikroskopie **51**, 364 (1934).
- SCHMIDT, W. J. Z. wiss. Mikroskopie **55**, 476 (1938).
- VERMAAS, D. Z. physik. Chem. **52** (B), 131 (1942).
- VERMAAS, D. Deformatie en oriëntering van nitrocellulosegelen. Diss. Utrecht 1941.
- WÄLCHLI, O. Diplomarbeit (unveröffentlicht).
- WIENER, O. Physikal. Z. **5**, 332 (1904). — Ber. Ak. Wiss. Leipzig **62**, 256 (1909). — Abhdlgn. Ak. Wiss. Leipzig **33**, 507 (1912). — Kolloid-Beih. **23**, 189 (1926).

Die Konversionslinien im β -Spektrum des UX

von H. Bradt, H.-G. Heine und P. Scherrer

(25. VIII. 1943.)

I. Einleitung.

Ein UX-Präparat — UX_1 , UX_2 und das mit UX_2 isomere UZ im radioaktiven Gleichgewicht — emittiert bekanntlich, ähnlich wie eine RaE-Quelle, eine im Vergleich zu anderen radioaktiven Substanzen nur äusserst schwache γ -Strahlung¹⁾. Die Messungen von STAHEL und GUILLISSEN²⁾ zeigen, dass es sich bei der γ -Strahlung des RaE um reine „Bremsstrahlung“ handelt; die γ -Strahlung des UX enthält jedoch überdies härtere monochromatische Komponenten einer eigentlichen Kern- γ -Strahlung, deren Konversionslinien zuerst von MEITNER³⁾ im magnetischen Spektrographen nachgewiesen und dem UX_2 zugeordnet worden sind. Es werden von ihr fünf benachbarte, sehr schwache Linien angegeben, die sich auf der Photoplatte von dem durch das kontinuierliche β -Spektrum erzeugten Untergrund nur wenig abheben sollen. Die Intensitäten sind nur visuell geschätzt worden. MARSHALL⁴⁾, welcher das kontinuierliche β -Spektrum des UX_2 mit einer Ionisationskammer als Nachweisinstrument ausgemessen hat, findet bei 686 keV eine β -Linie der absoluten Intensität $(3,2 - 4,0) \cdot 10^{-3}$ Konversionselektronen pro Zerfall; eine zweite, ungefähr fünfmal schwächere Linie bei 765 keV scheint angedeutet. Diese Linien liegen in der Umgebung des Maximums des kontinuierlichen UX_2 - β -Spektrums; MARSHALL ist geneigt, sie mit den beiden intensiveren der von MEITNER angegebenen Linien zu identifizieren, obwohl die $(H\varrho)$ -Werte der letzteren um 5% grösser sind.

Bedenkt man, dass, nach dem Ergebnis der Messungen der absoluten Intensität der γ -Strahlung des UX von STAHEL und COUMOU⁵⁾, nur wenig mehr als ein Quant auf 100 Zerfallsprozesse ausgesandt wird, so erscheint die Intensität der von MARSHALL

¹⁾ Zuerst genauer untersucht von HAHN und MEITNER, Ztschr. f. Physik **17**, 157, 1923.

²⁾ STAHEL und GUILLISSEN, Journ. de physique **1**, 12, 1940.

³⁾ L. MEITNER, Handbuch der Physik, Bd. XXII/1, S. 135, 1933.

⁴⁾ MARSHALL, Proc. Roy. Soc. **173**, 391, 1939.

⁵⁾ STAHEL und COUMOU, Physica **2**, 707, 1935.

ausgemessenen β -Linie erstaunlich gross. MARSHALL berechnet für sie einen K -Konversionskoeffizienten von 0,07, indem er für die absolute Intensität der entsprechenden γ -Strahlung auf Grund unpublizierter Messungen von J. A. GRAY den Wert $5 \cdot 10^{-2}$ Quanten pro Zerfall annimmt. Nach STAHEL und COUMOU ist aber der fast viermal kleinere Wert von $1,4 \cdot 10^{-2}$ Quanten pro Zerfall einzusetzen¹⁾, womit sich ein K -Konversionskoeffizient von der für 800 keV-Strahlung enormen Grössenordnung von 0,2 ergibt.

Wir haben im β -Spektrographen das UX_2 - β -Spektrum, insbesondere im Energiebereich 650–850 keV, mit Koinzidenz-Zählrohren genau vermessen, um die MARSHALL'sche Linie in ihre Komponenten auflösen zu können und um den Konversionskoeffizienten neu zu bestimmen.

II. Beschreibung der Apparatur.

1. Der Spektrograph.

Die wesentlichsten Teile des Spektrographen²⁾, der nach der DANYSZ'schen Halbkreisemethode arbeitet, sind aus Fig. 1 ersichtlich. Bei seiner Dimensionierung mussten wir uns nach einem Elektromagneten richten, der Polflächen von $20 \times 27 \text{ cm}^2$ und einen Luftspalt von 4,5 cm besitzt. In der Zeichnung wurde zugunsten einer grösseren Anschaulichkeit auf Darstellung eines einheitlichen Schnittes durch die Kammer verzichtet. Der Spektrograph ist für Koinzidenz-Untersuchungen von Paar-Emissionsprozessen entworfen worden; daher sein symmetrischer Aufbau.

Das Gehäuse ist aus Messing zusammengelötet, das Blenden-system aus Aluminium hergestellt. Zur Verminderung der Streustrahlung sind die Wände mit 2 mm Celluloid ausgekleidet. Alle Einführungen sind mit Pizcin abgedichtet (in Fig. 1 nicht mitgezeichnet). Der Kasten wird durch eine doppelte Gummidichtung, zwischen Deckel und Gehäuse, deren Zwischenraum mit dem Vorvakuum verbunden wird, abgeschlossen. Da der ganze Kasten zwischen die Polschuhe des Magneten gehängt wird, wird der Deckel zur Erreichung der mechanischen Festigkeit noch mit der Grundplatte verschraubt.

¹⁾ Wir diskutieren diesen Wert im Teil IV genauer; nach mündlicher Mitteilung von Prof. STAHEL ist der von den genannten Autoren mit der Ionisationskammer gemessene Wert der pro Zerfall in Form von härterer γ -Strahlung ausgesandten Energie auf 10–20% sicher als richtig anzunehmen und der von MARSHALL mitgeteilte Wert GRAY's auszuschliessen.

²⁾ Der Spektrograph wurde als Diplomarbeit von Herrn M. WEBER gebaut.

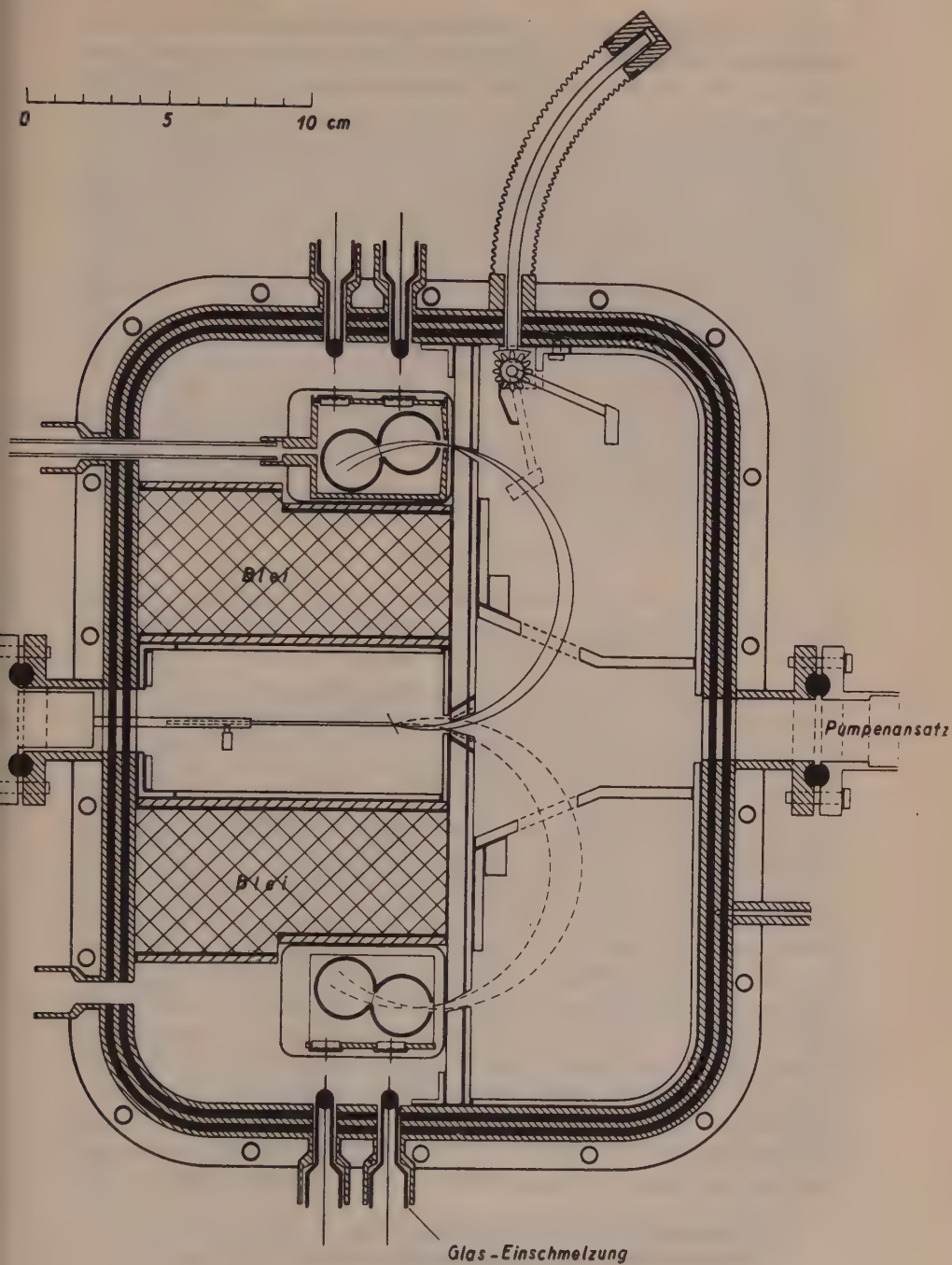


Fig. 1. β -Spektrograph.

Der Krümmungsradius der Elektronenbahnen beträgt 5 cm. Sämtliche Spalte zur Ausblendung dieser Bahnen haben eine Höhe von 10 mm und sind leicht auswechselbar. Bei der vorliegenden Messung war der mittlere Spalt 3 mm und der vor den Zählrohren befindliche obere 0,3 mm breit; es war darauf geachtet worden, die von FEATHER¹⁾ angegebenen geometrischen Bedingungen zu erfüllen. Die gestrichelt eingezeichneten Bahnen werden von einem mittleren Spalt von 5 mm und einem vor den unteren Zählrohren befindlichen Spalt von 3 mm begrenzt. Die Blenden im rechten Kammerteil dienen nur zum Abfangen von gestreuten Elektronen. Als Halterung der radioaktiven Quelle dient eine leicht gebaute Gabel, die in einem Sockel so justiert wird, dass das Präparat in 20 mm Abstand von der Spaltebene zu liegen kommt. Der Sockel wird mit einem Gummiring abgedichtet und von aussen mit dem Spektrographengehäuse verschraubt. Der Spektrograph wird mit einer Quecksilberdiffusionspumpe auf Hochvakuum ausgepumpt, wobei der Hg-Dampf mit Kohlensäureschnee ausgefroren wird.

2. Die Zählrohre.

Zur Verminderung des Nulleffektes (Höhenstrahlung, γ -Strahlung des Präparates, Streuelekttronen) wird mit zwei in Koinzidenz geschalteten Zählrohren gearbeitet, die hintereinander in Richtung der ausgeblendeten Elektronenbahn angeordnet sind. Zur Messung des Nulleffektes wird ein Schirm²⁾ mit Hilfe eines Tombakrohres in den Strahlengang geschwenkt; der Schirm ist nur wenig grösser als der Querschnitt des Strahlenbündels an dieser Stelle.

Um die Absorption und Streuung der β -Teilchen in den die Zählrohrfenster bedeckenden Folien herabzusetzen, werden die Zählrohre nicht einzeln abgedichtet, sondern es werden beide Zählrohre zusammen in einem *vakuumdichten Kästchen* untergebracht. Der Eintrittsspalt des Kästchens ist mit einer 4 μ -Cellophanfolie verschlossen, die nun nicht mehr den Atmosphärendruck, sondern bloss noch den achtmal kleineren Druck des Füllgases gegen das Hochvakuum auszuhalten hat. Die beiden Zählrohre werden durch ein ca. 0,5 μ dickes, leicht versilbertes Perocellin-IIäutchen getrennt. Dieses verhindert, dass eine Entladung in einem Zählrohr auch das zweite zum Ansprechen bringen kann.

Die eine Seitenwand des Kästchens ist mit einer 5 mm dicken Grundplatte verschraubt, in die die Zählrohre versenkt und damit gleichzeitig justiert werden. Für das untere Zählrohrpaar ist nur

¹⁾ FEATHER, Cambr. Phil. Soc. **36**, 224, 1940.

²⁾ FLAMMERSFELD, Ztschr. f. Phys. **112**, 727, 1939.

dieser Teil, der in das Kästchen seitlich hineingeschoben und dann mit Pizeña abgedichtet wird, eingezeichnet. Bei dem oberen Zählrohrpaar ist das ganze Kästchen in Fig. 1 dargestellt.

Die *Messingzählrohre* haben eine Wandstärke von 1 mm, einen inneren Durchmesser von 20 mm und eine Länge von 35 mm. Das erste Fenster ist $3 \times 14 \text{ mm}^2$, die beiden mittleren sind $5 \times 16 \text{ mm}^2$ gross und um $17,5^\circ$ gegen das erste nach unten versetzt. Die freie Länge des 0,2 mm dicken Wolfram-Zähldrahtes, der von den Cibavitverschlüssen der Zählrohre gehalten wird, beträgt 22 mm. An ihn wird über einen Widerstand von 20 Meg Ω die ca. 1200 Volt betragende Arbeitsspannung gelegt; die Zählrohrmäntel werden mit dem Gehäuse zusammen geerdet. Das Kästchen wird zuerst mit dem Spektrographen zusammen evakuiert und dann mit 10 mm Hg Äthylalkohol und 100 mm Hg Argon gefüllt. Die Zählrohre werden während der Messung mit einem Oszillographen auf einwandfreies Arbeiten (Freiheit von Nachentladungen) kontrolliert. Der benutzte Koinzidenzverstärker arbeitet mit einem Auflösungsvermögen von $2 \cdot 10^{-7} \text{ sec}^1$; die Zahl der zufälligen Koinzidenzen ist also verschwindend klein.

3. Eichung des Spektrographen.

Die magnetische Feldstärke, die bis 2000 Oersted auf 0,1% genau homogen ist, wurde durch Herausziehen eines kleinen Spulenkörpers aus der Mitte des Luftspaltes gemessen. Um sicher auf der „jungfräulichen Kurve“ des Eisens zu arbeiten, wurde der Magnet mittels Wechselstrom stets von neuem entmagnetisiert. Da nur Feldstärken bis 2000 Oersted für die Messung notwendig sind, befindet man sich stets weit ausserhalb des Sättigungsgebietes des Eisens, so dass der Strom-Feldverlauf praktisch linear ist.

Diese Tatsache ermöglicht es, unabhängig von der Kenntnis von H und q durch Messung einer gut bekannten Radium-Linie eine Eichkurve für den Spektrographen zu erhalten. Dafür wurde von uns die β -Linie T des RaC mit $Hq = 5873,3$ (ELLIS²) verwendet. Der Magnetstrom wurde dabei, wie bei allen späteren Messungen, mit einem Eichinstrument und einer Kompensationsschaltung auf 0,01 Amp. genau gemessen. Die Übereinstimmung mit dem aus der gemessenen Feldstärke und dem berechneten Bahnradius erhaltenen Wert war sehr gut.

¹) BRADT und SCHERRER, *Helv. Phys. Acta* **16**, 251, 1943.

²) ELLIS, *Proc. Roy. Soc.* **143**, 350, 1933.

III. Messung des UX- β -Spektrums.

1. Die Quelle.

Das UX₁ wurde mit der Trägersubstanz Cer als Fluorid gefällt; das Gewicht des aktiven Niederschlags betrug ca. 2 mg und die Intensität ca. $\frac{1}{10}$ mCurie. Auf einen kleinen Rahmen aus dünnem Kupferdraht wurde ein etwa 0,5 μ dickes Perocellin-Häutchen aufgespannt und darauf das aktive Präparat auf eine Fläche von $2 \times 10 \text{ mm}^2$ verteilt und mit einem Tropfen Canadabalsam zum Haften gebracht. Die so erhaltene Quelle wurde in dem Präparathalter schräg zum ausgeblendeten Strahl befestigt, wie dies in Fig. 1 angedeutet ist. Die Elektronen müssen, um in die Kammer zu gelangen, also nur äusserst wenig Materie und die dünne Perocellinfolie durchdringen. Die dadurch verursachte Absorption ist in dem von uns ausgemessenen Energiebereich zu vernachlässigen.

2. Das kontinuierliche UX₂- β -Spektrum.

Es wurde zunächst das Verhältnis der Zahl der Stösse in dem ersten Zählrohr zur Zahl der Koinzidenzen in beiden Zählrohren bestimmt. Oberhalb von $H\varrho = 3400$ Oersted·cm ist sein Wert unabhängig von der Energie der β -Teilchen gleich 1,9 während er mit abnehmender Elektronenenergie rasch ansteigt. Bei 60 keV werden nur noch ein Siebentel der Elektronenstösse als Koinzidenzen gezählt, was vor allem von der stärkeren Streuung der langsamen Elektronen in der Eintrittsfolie herrührt. Es wurden deshalb bis $H\varrho = 3400$ nicht wie sonst die Koinzidenzen, sondern die Einzelstösse im ersten Zählrohr gemessen und das Resultat durch Division mit 1,9 an die Koinzidenzmessungen angeschlossen. Während der Nulleffekt bei Einzelstossmessungen ca. 23 pro min beträgt und in geringem Mass feldabhängig ist, ist er bei den Koinzidenz-Messungen kleiner als 1 pro min und von der Feldstärke völlig unabhängig.

Mit den, zur Erreichung eines guten Auflösungsvermögens gewählten, engen Spalten (siehe II. 1.) und dieser Quelle wurden im Maximum 200 Koinz./min gemessen. Alle Messpunkte wurden in mehreren Serien von je 5 Minuten Messdauer pro Punkt bestimmt. Um daraus die wahre Energieverteilung zu bestimmen, müssen die so erhaltenen Mittelwerte noch durch Division mit den entsprechenden $H\varrho$ -Werten auf ein von $H\varrho$ unabhängiges Auflösungsvermögen des Spektrographen korrigiert werden.

Das kontinuierliche β -Spektrum wurde im Bereich $H\varrho = 900$ bis 8100 gemessen. Da in diesem Bereich der Verlauf des Spek-

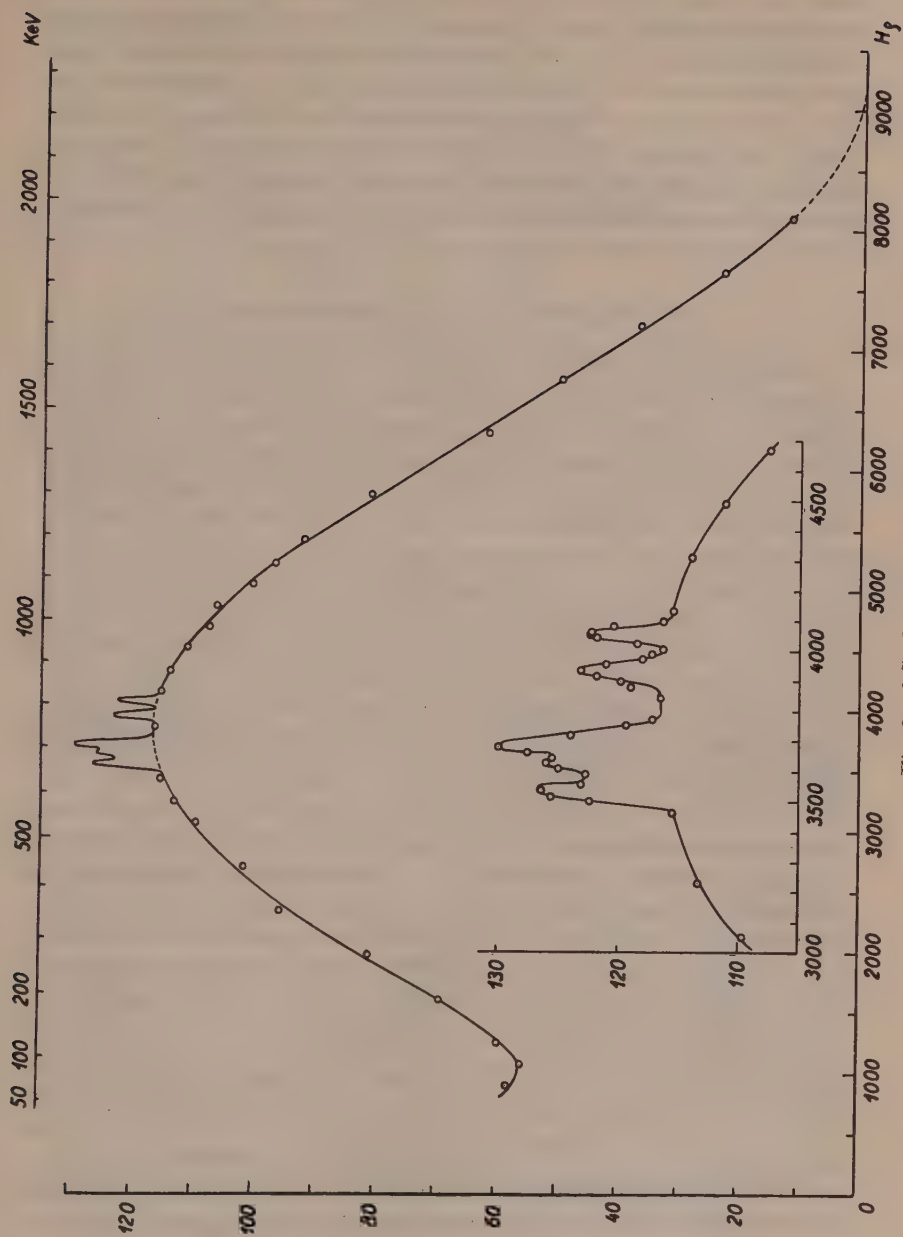


Fig. 2. β -Spektrum des UX_2 .

trums aus der Arbeit von MARSHALL¹⁾ gut bekannt ist, wurde er von uns nur soweit genau gemessen, als dies zur Bestimmung des Verhältnisses der Zahl der Zerfallselektronen zur Zahl der Konversionselektronen notwendig war. Der Abfall der Intensität des Spektrums bei hohen Energien stimmt mit der Messung von MARSHALL gut überein. Bei kleineren Energien spielt die Absorption im Präparat und der Zählrohrfolie schon eine erhebliche Rolle, so dass aus unseren Messungen über das anschliessende UX_1 -Spektrum nichts ausgesagt werden kann.

3. Die Linien des UX_2 - β -Spektrums.

Das Resultat unserer Messungen ist in Fig. 2 dargestellt; die genauen Werte der Lage der Linien sind in Tabelle 1 mit den Ergebnissen von MEITNER²⁾ und MARSHALL¹⁾ zusammen wiedergegeben. Die stärkste Linie hebt sich um 13% vom Untergrund ab; die mittlere Linienbreite ist $\Delta H_Q = 70$ Oersted·cm, entsprechend 0,04 Amp. Die Messgenauigkeit beträgt einige Promille. Es werden mit Sicherheit vier Linien gemessen, welche der Konversion von zwei γ -Linien in der K - und L_I -Schale des U_{II} zuzuordnen sind; eine fünfte Linie ist angedeutet. Die Energiedifferenz der Linien 3 und 5 von 102 keV stimmt innerhalb der Messgenauigkeit mit der Differenz der 94 keV betragenden Bindungsenergie der K - und L_I -Schale von Uran überein. Die Energiedifferenz der Linien 1 und 4 resp. 2 und 4 beträgt 109 resp. 85 keV, so dass Linie 4 wohl als Überlagerung der L_I -Konversionslinien der 0,782 MeV und der 0,806 MeV γ -Linien zu betrachten ist.

Nr. der Linie	Meitner		Marshall		Bradt, Heine u. Scherrer					
	(H_Q)	Int.	(H_Q)	Int.	(H_Q)	E_{keV}	Int.	Zu- ordn.	$h\nu_{keV}$	
1	3622	s			3540	666	st	K	782	
2	3710	s	3600	st	3625	690	s	K	806	
3	3765	st			3685	706	st	K	822	
4	4017	s	3900(?)	s	3935	775	m	L_I		
5	4140	m			4055	808	m	L_I		

Tabelle I: β -Linien des UX_2 .

Die relativen Abstände der einzelnen Linien voneinander stimmen innerhalb unserer Messgenauigkeit mit denen von MEITNER

¹⁾ MARSHALL, loc. cit.

²⁾ MEITNER, loc. cit.

genau überein. Die absolute Lage der Linien ist, gegenüber den von MEITNER angegebenen Werten um 3% nach kleineren Energien verschoben, damit aber in Übereinstimmung mit der Lage der beiden von MARSHALL gefundenen Linien.

IV. Die γ -Strahlung des UX.

Die durchdringende γ -Strahlung einer unbedeckten UX-Quelle setzt sich zusammen aus folgenden Komponenten:

1. Dem Linienspektrum, ausgesandt von dem durch den β -Zerfall des UX_2 -Kerns angeregten U_{II} -Kern.

2. Dem analogen Linienspektrum, induziert durch den β -Zerfall des UZ. Da UX_2 und UZ isomere Kerne sind, kann ihr Zerfall zu gleichen Niveaus des U_{II} -Kerns führen und die beiden Spektren können identische Linien besitzen. Dies wird insbesondere dadurch nahegelegt, dass die Härte der UZ- γ -Strahlung einer Quantenenergie entspricht, die von der gleichen Grössenordnung ist wie die Energie der zu den MEITNER'schen Linien gehörenden γ -Strahlung.

3. Der „inneren“ Bremsstrahlung oder „Impulsstrahlung“, welche ein kontinuierliches Energiespektrum besitzt. Sie entsteht infolge der „Bremsung“ der Zerfallselektronen im Coulombfeld des durch den β -Zerfall entstandenen Kerns.

Die absolute gesamte *Intensität der UX- γ -Strahlung* ist von STAHEL und COUMOU¹⁾ durch Ionisationsmessungen bestimmt worden. Sie finden für die Energie, die im Mittel pro Zerfall in Form von harter γ -Strahlung ausgesandt wird (die nachzuweisende Strahlung muss die 1 cm dicke Wand einer eisernen Ionisationskammer durchdringen), den Wert 13,0 keV. Die Absorptionskurve ist sehr genau exponentiell, mit dem Absorptionskoeffizienten $0,83 \text{ cm}^{-1}$, entsprechend einer relativ homogenen Strahlung der mittleren Quantenenergie 950 keV. (Die Zahl der im Mittel pro Zerfall ausgesandten Quanta wird daraus zu $13,0:950 = 1,37 \cdot 10^{-2}$ berechnet.) Doch ist zu berücksichtigen, dass in den 13,0 keV die Energie der „äusseren“ Bremsstrahlung, erzeugt im Aluminiumabsorber, in dem die β -Strahlen gebremst werden, inbegriffen ist. Nach STAHEL und KIPFER²⁾ beträgt diese Energie etwa 15% der gesamten Energie, d. h. ca. 2 keV.

Die γ -Strahlung des UZ ist in letzter Zeit von FEATHER und BRETSCHER³⁾ und von FEATHER und DUNWORTH⁴⁾ untersucht wor-

1) STAHEL und COUMOU, loc. cit.

2) STAHEL und KIPFER, Helv. Phys. Acta **9**, 492, 1936.

3) FEATHER und BRETSCHER, Proc. Roy. Soc. **165**, 530, 1938.

4) FEATHER und DUNWORTH, Proc. Roy. Soc. **168**, 566, 1938.

den. Diese Autoren stellen fest, dass der UZ -Kern pro Zerfall zwei Quanten von ungefähr 700–800 keV simultan emittiert. Da nach den erstgenannten Autoren das Verzweungsverhältnis $UZ:UX_2$ den Wert $1,5 \cdot 10^{-3}$ hat und da die Quantenenergie der UZ -Strahlung, wie oben bemerkt, ungefähr (wenn nicht genau) die gleiche ist wie diejenige der UX_2 -Strahlung, so emittiert das mit UX_1 und UX_2 im radioaktiven Gleichgewicht befindliche UZ nur etwa ein Fünftel der gesamten γ -Strahlung des UX . Das UX_1 emittiert nach HAHN und MEITNER überhaupt keine durchdringende γ -Strahlung.

Wir haben die Intensität und spektrale Energieverteilung der inneren Bremsstrahlung des UX_2 auf Grund der von KNIPP und UHLENBECK¹⁾ berechneten Formel ausgerechnet. Die gute Übereinstimmung dieser Formel mit der Erfahrung wird durch die Messungen von STAHEL und GUILLISSEN²⁾ an der γ -Strahlung des RaE und durch diejenigen von CHIEN-SHIUNG-WU³⁾ an der γ -Strahlung des Radiophosphors P^{32} bewiesen. Für die Verteilungsfunktion $P(W_e)$, die das Energiespektrum der Zerfallselektronen beschreibt, benutzen wir dabei die Relativwerte von Fig. 2.

Es bedeuten im folgenden:

W_e = die ursprüngliche Energie eines Zerfallselektrons (inkl. Ruhenergie)

k = die Energie eines ausgesandten Photons der Bremsstrahlung

$W = W_e - k$ = die dem Zufallselektron der ursprünglichen Energie W_e nach Emission eines Quants der Energie k verbleibende Energie.

Dabei sind alle Energien in Einheiten mc^2 auszudrücken. p_e und p bezeichnen die zu den Energien W_e und W gehörenden Impulsbeträge in Einheiten mc , $\alpha = 1/137$ ist die Feinstrukturkonstante. Nach KNIPP und UHLENBECK ist dann

$$\Phi(W_e, k) dk = \frac{\alpha p}{\pi p_e \cdot k} \left(\frac{W_e^2 + W^2}{W_e \cdot p} \log(W + p) - 2 \right) dk$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein den zerfallenden Kern mit der ursprünglichen Energie W_e verlassendes Elektron im Coulombfeld des Kerns ein Lichtquant emittiert, dessen Energie im Intervall $k \dots k + dk$ liegt.

$$S(k) \cdot dk = dk \cdot \int_1^{W_e} \Phi(W_e, k) \cdot P(W_e) dW_e$$

¹⁾ KNIPP und UHLENBECK, Physica **3**, 425, 1936.

²⁾ STAHEL und GUILLISSEN, loc. cit.

³⁾ CHIEN-SHIUNG-WU, Phys. Rev. **59**, 481, 1941.

ist dann die Wahrscheinlichkeit der Emission eines Lichtquants im Energieintervall $k \dots k + dk$ pro Zerfall. Die Energieverteilungsfunktion

$$J(k) = k \cdot S(k)$$

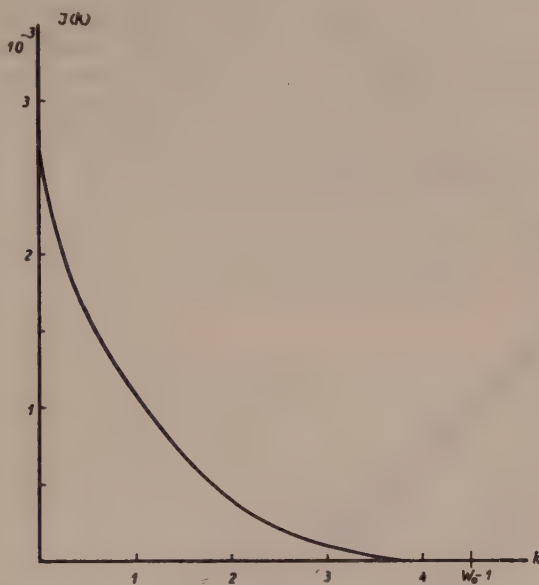


Fig. 3.

Spektrale Energieverteilung der inneren Bremsstrahlung des UX_2 .

(Nach KNIPP und UHLENBECK.)

ist in Fig. 3 dargestellt. Die gesamte pro Zerfall des UX_2 in Form von innerer Bremsstrahlung ausgesandte Energie berechnet sich zu

$$\underline{J = \int_0^{W_0-1} J(k) dk \cdot mc^2 = 0,0035 mc^2 = 1,8_0 \text{ keV / Zerfall}}$$

Davon entfallen 0,4 keV auf Quanten mit Energien < 150 keV, die praktisch nicht in die Ionisationskammer gelangen können. Zu der gemessenen Energie von 13 keV liefert also die innere Bremsstrahlung einen Beitrag von maximal 1,4 keV = 11 %.

In Fig. 4 ist (Kurve 2) die für Blei als Absorbermaterial berechnete Absorptionskurve der inneren Bremsstrahlung in logarithmischem Massstab aufgetragen. Die hinter einer Filterdicke d vorhandene Intensität ergibt sich aus der Gleichung

$$J_d = \int_0^{W_0-1} J(k) e^{-\mu(k)d} dk \cdot mc^2$$

Kurve 1 der Fig. 4 ist die zu einem Absorptionskoeffizienten $\mu = 0,95 \text{ cm}^{-1}$ gehörige logarithmische Absorptionskurve: dieser Absorptionskoeffizient entspricht der mittleren Absorbierbarkeit der γ -Strahlung, die zu den von uns gemessenen Linien gehört. Kurve 3 ist die logarithmische Absorptionskurve einer γ -Strahlung, die sich für $d = 0$ energiemässig zusammensetzt aus 11% innerer Bremsstrahlung und aus 89% 800 keV- γ -Strahlung ($\mu = 0,95 \text{ cm}^{-1}$ Pb). Kurve 4 ist die zu $\mu = 0,83 \text{ cm}^{-1}$, dem von STAHEL und COUMOU experimentell bestimmten Absorptionskoeffizienten, gehörende Absorptionskurve.

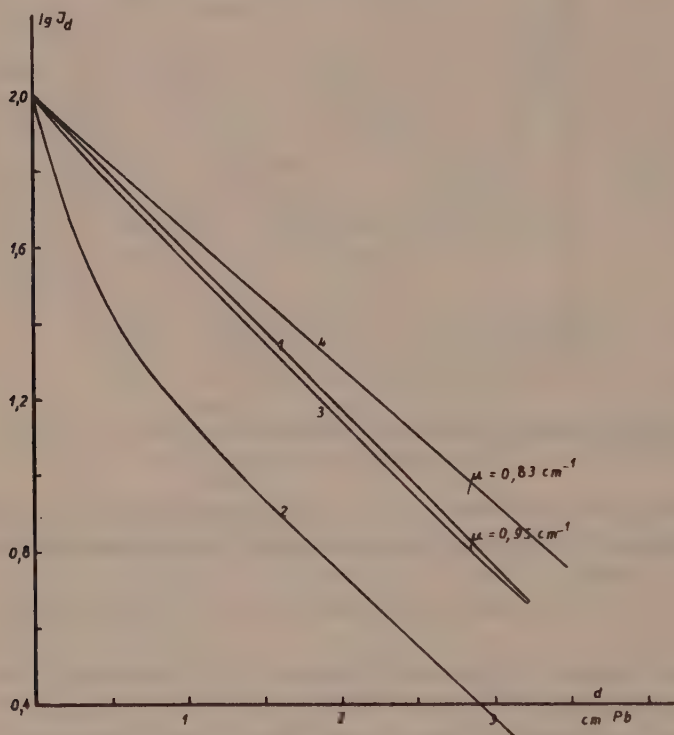


Fig. 4.

Absorption in Blei:

- 1: der 800 keV-Liniengruppe ($\mu = 0,95 \text{ cm}^{-1}$)
- 2: der inneren Bremsstrahlung des UX_{β}
- 3: einer γ -Strahlung, zusammengesetzt aus 89% 800 keV Strahlung und 11% Bremsstrahlung
- 4: der UX - γ -Strahlung nach STAHEL und COUMOU ($\mu = 0,83 \text{ cm}^{-1}$)

Ist — wie wir glauben — der Unterschied der gemessenen Absorptionskurve 4 von der berechneten Kurve 3 reell, d. h. ist

die grössere Durchdringungsfähigkeit der Strahlung nicht durch die unvermeidlichen Mängel der experimentellen Anordnung vorgetäuscht, so bedeutet dies, dass die Kern- γ -Strahlung des ($UX_2 + UZ$) noch energiereichere Linien als die der 800 keV-Strahlung aufweist¹⁾; bei normaler Konversionswahrscheinlichkeit wären die entsprechenden Linien im β -Spektrum so schwach, dass man sie kaum noch nachweisen könnte. Auf das Vorhandensein solcher Linien ist auch im Handbuchartikel von MEITNER hingewiesen worden (S. 143); doch haben die Messungen von HAHN und MEITNER, auf die dort Bezug genommen wird, für die harte Komponente der UX - γ -Strahlung einen zu kleinen Wert des Absorptionskoeffizienten ergeben ($\mu = 0,72 \text{ cm}^{-1}$), wie dies aus der Diskussion dieser Messungen im zitierten Artikel von STAHEL und COUMOU hervorgeht.

V. Konversionswahrscheinlichkeit der ausgemessenen Liniengruppe.

Aus der Fig. 2 können wir direkt die Zahl der pro Zerfall ausgesandten K - resp. L -Konversionselektronen entnehmen, indem wir die zu den Linien gehörenden Flächen im $(H\rho)$ -Diagramm durch die zum Kontinuum gehörende Fläche dividieren. Die Genauigkeit der Messung ist jedoch nicht gross genug, dass es sinnvoll wäre, dies für jede der beiden (resp. der drei) Linien im einzelnen auszuführen. Wir berechnen deshalb nur einen mittleren Konversionskoeffizienten für die ganze, aus zwei oder drei benachbarten Linien bestehende 800 keV-Gruppe.

Die Anzahl der aus der K -Schale resp. L -Schale von der Liniengruppe ausgelösten Elektronen pro Zerfall ergibt sich aus Fig. 2 zu

$$\underline{N_e^K = 4,3 \cdot 10^{-3}} \quad \text{resp.} \quad \underline{N_e^{L_I} = 1,2 \cdot 10^{-3}}$$

Dieser Wert für N_e^K ist zu vergleichen mit dem von MARSHALL angegebenen Wert $(3,2 - 4,0) \cdot 10^{-3}$.

Nach dem Ergebnis von STAHEL und COUMOU ist auch die Anzahl N_q der Quanten der 800 keV-Liniengruppe pro Zerfall als bekannt anzusehen, unter der Voraussetzung, dass keine anderen härteren Linien von vergleichbarer Intensität vorhanden sind. Von den 13,0 keV Energie der γ -Strahlung pro Zerfall entfallen dann (nach Abzug der Anteile der äusseren und inneren Bremsstrahlung)

¹⁾ Siehe auch die Zählrohr-Absorptionsmessungen von SIZOO und COUMOU, *Physica* **3**, 921, 1936.

13,0 — 2,0 — 1,4 = 9,6 keV auf diese Liniengruppen, entsprechend $N_q = 9,6:802 = 1,2 \cdot 10^{-2}$. Damit wird

$$\frac{N_e^K}{N_q} = 0,36 \quad \frac{N_e^L}{N_q} = 0,10$$

und die *Konversionskoeffizienten* ergeben sich zu

$$\alpha_K = \frac{N_e^K}{N_q + N_e} = 0,25 \quad \alpha_L = \frac{N_e^L}{N_q + N_e} = 0,069$$

$$\alpha_K/\alpha_L = 3,6$$

Sind noch andere härtere Linien von vergleichbarer Intensität vorhanden, so wären die Konversionskoeffizienten noch grösser. Die angegebenen Werte sind somit als Minimalwerte zu betrachten. Aber schon sie sind für eine relativ energiereiche γ -Strahlung ausserordentlich hoch. Für eine *Dipollinie* gleicher Energie wäre theoretisch¹⁾ $N_e^K/N_q = 0,0042$ für elektrische, $N_e^K/N_q = 0,057$ für magnetische Strahlung zu erwarten; für eine *Quadrupollinie* gleicher Energie ein Wert von $N_e^K/N_q = 0,013$ für elektrische, $N_e^K/N_q = 0,11$ für magnetische Strahlung. Um auf einen Wert der Grössenordnung 0,3 zu kommen, müssen wir schon magnetische *Octopolstrahlung* heranziehen, für die sich nach FISK und TAYLOR $N_e^K/N_q = 0,23$ ergibt.

Es ist natürlich auch in Betracht zu ziehen, dass eine der beiden Linien von 782 keV resp. 822 keV, ähnlich wie die 1,42 MeV RaC-Linie, überhaupt vollständig in der Elektronenhülle konvertiert. Wäre das z. B. für die 822 keV-Linie der Fall, so käme man für die andere Linie mit „normaler“ Strahlung aus.

Das gemessene Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten für *K*-Konversion und *L*-Konversion ist von der gleichen Grössenordnung wie etwa dasjenige der 612 keV RaC-Linie, das von ELLIS²⁾ zu $\alpha_K:\alpha_L = 4,5$ bestimmt wurde. Die Theorie liefert für dieses Verhältnis den Wert 7.

¹⁾ Wir benutzen die für $Z = 84$ von TAYLOR und MOTT, Proc. Roy. Soc. **138**, 665, 1932 (elektrische Strahlung) und von FISK und TAYLOR, Proc. Roy. Soc. **146**, 178, 1934 (magnetische Strahlung) berechneten Werte, multipliziert mit einem Faktor $(92/84)^3 = 1,3$, welcher die angenäherte Z^3 -Proportionalität des Konversionskoeffizienten berücksichtigt.

²⁾ RUTHERFORD, CHADWICK und ELLIS, Radiations from radioactive Substances, S. 364.

VI. Diskussion der Möglichkeit einer Entstehung der UX_2 -Linien durch sukzessive Quanten-Emission.

Die Tatsache, dass der durch den UZ -Zerfall angeregte U_{II} -Kern zwei Quanten sukzessive emittiert, legt den Gedanken nahe, dass die beiden Linien von 782 keV und 822 keV ebenfalls durch sukzessive Quantenemission entstehen, oder dass sogar der relativ seltene β -Übergang des UX_2 , der zur Emission dieser Linien Anlass gibt, zum gleichen Niveau des U_{II} -Kerns führt wie der normale β -Zerfall des UZ . Dies scheint uns aber mit Sicherheit nicht der Fall zu sein: die sukzessive γ -Emission des UZ ist von FEATHER und DUNWORTH durch (γ, γ) -Koinzidenzmessungen festgestellt worden. Da bei einer im Gleichgewicht befindlichen $(UX_1 + UX_2 + UZ)$ -Quelle die UZ - γ -Strahlung nur ein Fünftel der Gesamtstrahlung ausmacht und die Bremsstrahlung einen noch kleineren Bruchteil, müsste, wenn die ausgesprochene Vermutung zuträfe, die absolute (γ, γ) -Koinzidenzhäufigkeit mit einer $(UX_1 + UX_2 + UZ)$ -Quelle fünfmal grösser sein als mit einer, durch Abtrennen des UX_1 daraus gewonnenen reinen UZ -Quelle. Wir haben mit UX -Quellen (γ, γ) -Zählrohrkoinzidenzen untersucht und gefunden, dass sich, bei Ausschaltung von Effekten der Comptonstreuung¹⁾, nahezu alle gemessenen (γ, γ) -Koinzidenzen durch die γ -Strahlung des UZ allein erklären lassen. Sukzessive Emission der zwei Linien kann also beim UX_2 -Zerfall nur dann in Betracht kommen, wenn eine der beiden Linien vollständig in der Elektronenhülle konvertiert. Ein solcher Übergang könnte aber auch dann nicht identisch sein mit dem durch den UZ -Zerfall induzierten, weil bei letzterem die (γ, γ) -Koinzidenzen nachweisbar sind. Es scheint fraglich, ob die vorhandenen Daten zur Aufstellung eines Niveauschemas ausreichen.

Zusammenfassung. Mit einem magnetischen Spektrographen, in dem die Elektronen mit zwei in Koinzidenz geschalteten Zählrohren registriert werden, wurden im Spektrum des UX_2 vier sehr benachbarte β -Linien geringer Intensität ausgemessen. Es sind dies

¹⁾ In einer früheren kurzen Notiz („Positronenerzeugung durch β -Strahlen“, *Helv. Phys. Acta* **14**, 319, 1941) haben wir bemerkt, dass die Anzahl der UX - (γ, γ) -Koinzidenzen zu gross ist, als dass sie sich allein durch die Anwesenheit des UZ erklären liesse. Da wir uns nur für eine Richtungskorrelation sukzessiv emittierter Quanten interessierten, blieb die Herkunft dieser Koinzidenzen noch ungeklärt. Inzwischen haben wir aber feststellen können, dass dieser „Überschuss“ an Koinzidenzen dem Comptoneffekt zuzuschreiben war; er konnte durch Bedeckung der Zählrohre mit geeigneten Bleifiltern zum Verschwinden gebracht werden.

die K - und L_T -Konversionslinien zweier γ -Linien von 782 keV und 822 keV. Von den von uns gemessenen absoluten Intensitäten der β -Linien und der bekannten Anzahl N_q der pro Zerfall ausgesandten γ -Quanten berechnen sich für die beiden Linien mittlere Konversionswahrscheinlichkeiten zu:

$$\frac{N_e^K}{N_q} = 0,36 \qquad \frac{N_e^L}{N_q} = 0,10$$

Der Charakter der γ -Strahlung, die eine für 800 keV ausserordentlich grosse Konversionswahrscheinlichkeit besitzt, wird diskutiert.

Physikalisches Institut der E.T.H., Zürich.

Streuung schneller Elektronen an Jodkernen

von **Werner Sigrist.**

(7. VIII. 1943.)

Zusammenfassung. Es wird mit der Wilsonkammer die elastische Streuung schneller Elektronen an Jodkernen gemessen. Für Elektronen von 1—3 MeV wird der Wirkungsquerschnitt in seiner Energie- und Winkelabhängigkeit in Übereinstimmung mit der Mott'schen Formel gefunden.

I. Einleitung.

Elektronen, welche in Materie eindringen, treten in Wechselwirkung mit den Kraftfeldern der Atomkerne und ihrer Hüllenelektronen. Dadurch werden die Elektronen abgebremst und aus ihrer Bahn abgelenkt.

Bei grösseren Elektronengeschwindigkeiten kann die Ablenkung von der Bremsung als praktisch unabhängig angenommen werden, erstere — die elastische Streuung — wird durch die Atomkerne, letztere — die unelastische Streuung — allerdings auch verbunden mit einer Ablenkung, wird im wesentlichen durch die Elektronenhülle hervorgerufen.

Die Wilsonkammer mit Magnetfeld bietet nun die Möglichkeit, diese Erscheinungen in einwandfreier Weise zu unterscheiden, sofern als streuendes Medium ein Gas verwendet wird. Die Bahn eines am Atomkern elastisch gestreuten Elektrons besteht aus zwei Ästen einer Kreisbahn mit gleicher Krümmung, denn infolge der grossen Masse des Kernes im Vergleich zu derjenigen des Elektrons findet praktisch keine Impulsübertragung auf den Kern statt. Bei einer unelastischen Streuung verliert das Elektron einen Teil seiner Energie. Das äussert sich darin, dass die Bahnkrümmung nach der Streuung grösser ist als vorher. Findet die Streuung an der Elektronenhülle statt, so geht diese Energiedifferenz in die kinetische Energie des Stosspartners über; bei der Streuung am Kern muss eine dieser Energiedifferenz entsprechende Bremsstrahlung ausgesandt werden. Bei relativ kleiner Energieübertragung ist, wie in Abschnitt V 4 gezeigt wird, infolge der Vielfachstreuung die Krümmungsänderung allerdings oft nicht messbar, zugleich ist aber auch die Richtungsänderung klein. Es liessen sich somit nur bei kleinen Ablenkungen elastische von unelastischen Streuungen nicht

unterscheiden. Da aus verschiedenen Gründen die Auswertung von Streuungen unter 15° ausgeschlossen wurde, ist somit keine Verfälschung des Resultates durch unelastische Streuungen zu befürchten. Die unelastische Streuung an den Hüllenelektronen ist hingegen leicht zu erkennen, da meistens ein Elektron aus der Hülle fortgerissen wird und eine Gabelung der Spur eintritt. Bei Streuungen von schnellen Elektronen (mit kinetischen Energien, die gross sind gegen die Bindungsenergien der Hüllenelektronen) an schweren Kernen ist der Anteil der unelastischen Streuung zudem klein gegenüber der elastischen Kernstreuung.

II. Theoretische Streuintensität.

Die klassische Berechnung der Streuung geladener Teilchen im Coulomb'schen Feld eines Atomkerns wurde erstmals von RUTHERFORD¹⁾ ausgeführt. Auf Elektronen angewendet, erhält man, unter Berücksichtigung der relativistischen Massenveränderlichkeit des bewegten Teilchens, für den Wirkungsquerschnitt einer Streuung um den Winkel ϑ in den Raumwinkel $d\Omega$ die Formel

$$I(\vartheta) d\Omega = \frac{1}{4} \left(\frac{Ze^2}{m_0 c^2} \right)^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^4 \sin^4 \vartheta/2} d\Omega = R(\vartheta) \cdot d\Omega. \quad (1)$$

Es bedeuten: Z = Atomnummer des streuenden Kernes

m_0 = Ruhemasse des Elektrons

e = Ladung des Elektrons

$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\text{Geschwindigkeit des Elektrons}}{\text{Lichtgeschwindigkeit}}$

MOTT²⁾ hat die Streuung wellenmechanisch unter Zugrundelegung der Dirac'schen Theorie berechnet und gibt eine Entwicklung nach $Z\alpha$ an, wobei α die Feinstrukturkonstante bedeutet

$$\left(\alpha = \frac{2 \pi e^2}{\hbar c} = 1/137 \right).$$

Diese Formel gilt nur für leichte Kerne ($Z\alpha \ll 1$) und lautet

$$I(\vartheta) d\Omega = R(\vartheta) (1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta/2 + \pi \beta \alpha Z \sin \vartheta/2 \cos^2 \vartheta/2 + \dots) d\Omega. \quad (2)$$

Man sieht, dass dieser Ausdruck für kleine Streuungen in die Rutherford'sche Formel übergeht.

Nach URBAN³⁾ fällt in der Mott'schen Formel im Glied αZ der Faktor $\cos^2 \vartheta/2$ weg. Die Streuformel lautet in diesem Fall

$$I(\vartheta) d\Omega = R(\vartheta) (1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta/2 + \pi \beta \alpha Z \sin \vartheta/2 + \dots) d\Omega. \quad (3)$$

Diese Korrektur fällt indessen nur bei grösseren Streuwinkeln und schwereren Kernen in Betracht.

Leider gilt, wie schon gesagt, die Mott'sche Entwicklung nur für leichte Kerne, für schwere Kerne existiert bis heute keine entsprechende Formel, hingegen hat MOTT eine exakte numerische Berechnung für die Streuung von Elektronen an Gold um einen Winkel von 90° und MASSEY⁴⁾ eine solche für die Winkelverteilung der Streuung an Quecksilberkernen angegeben. Fig. 1 und 2 geben

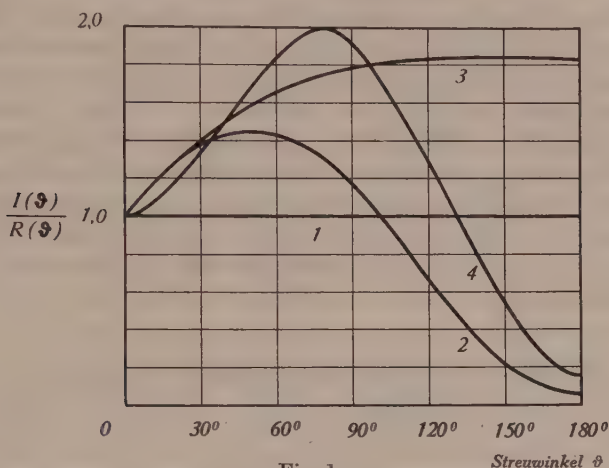


Fig. 1.

Streuung an Hg ($Z=80$) Theoretisch.

1=Formel von RUTHERFORD. 2=Formel von MOTT. 3=Formel von URBAN.
4= Numerische Berechnung von MASSEY.

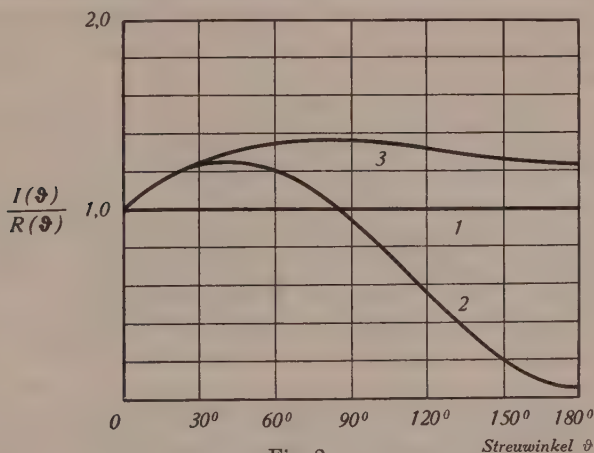


Fig. 2.

Streuung an J ($Z=53$) Theoretisch.

1=Formel von RUTHERFORD. 2=Formel von MOTT.
3=Formel von URBAN.

eine Zusammenstellung der theoretischen Resultate der Streuung von 1,7 MeV Elektronen an Quecksilber bzw. an Jod.

Als Abszisse ist der Streuwinkel, als Ordinate das Verhältnis der Streuung zur Rutherford'schen Streuung $R(\vartheta)$ aufgetragen. Aus diesen Figuren geht hervor, dass bei Hg bis zu Winkeln von ungefähr 45° die verschiedenen Formeln annähernd mit dem numerischen Wert von MASSEY übereinstimmen; die Mott'sche Formel passt sich besser dem Verlauf der von MASSEY berechneten Kurve an, die Absolutwerte sind aber bei Winkeln über 60° etwa zweimal zu klein.

Die Formel von URBAN weicht erst bei Winkeln über 120° erheblich von der Kurve von MASSEY ab. Man darf annehmen, dass für die Streuung am leichteren Jodkern die Übereinstimmung der verschiedenen Formeln noch bedeutend besser ist. Der Auswertung der experimentellen Resultate wird die Mott'sche Formel (2) zugrundegelegt.

III. Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen.

Es sei auf die ausführliche Zusammenstellung und Diskussion der experimentellen Arbeiten von BLEULER⁵⁾ verwiesen. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass für die leichten Kerne die Übereinstimmung mit der Theorie, von einigen wenigen Fällen abgesehen, befriedigend ist. Bei den mittleren und schweren Kernen sind hingegen die experimentellen Werte fast durchwegs um einen Faktor 2 bis 6 kleiner als die entsprechenden theoretischen Werte von MOTT und gemäss Fig. 1 ist natürlich die Diskrepanz zwischen den experimentellen Messungen und den Kurven von URBAN und MASSEY noch grösser. Insbesondere für die Streuung von Elektronen mit einer Energie von 0,7—1,2 MeV an Jodkernen haben CHAMPION und BARBER⁶⁾ einen Wert gefunden, der nur 0,4mal so gross ist wie der theoretische von MOTT.

Eine Nichtübereinstimmung der Experimente mit der Theorie würde nun besagen, dass ausser der der Theorie zugrundeliegenden Coulomb'schen Kraft zwischen Kern und Elektron noch ein anderes Kraftfeld vorhanden ist, welches für diese Anomalie verantwortlich gemacht werden müsste. Eine Zusatzkraft mit kurzer Reichweite, entsprechend dem die Streuung von Protonen an Protonen erklärenden Potentialtopf der Reichweite e^2/m_0c^2 und der Tiefe von ca. 10 MeV, kann für die Abweichung nicht verantwortlich gemacht werden, da die Elektronen wegen ihrer grossen Wellenlänge von $\lambda \simeq 10^{-10}$ cm von einer solchen Kraft nur unmerklich beeinflusst würden. Es könnten nach JAUCH⁷⁾ bei ein-

zelenen Kernen wohl Resonanzeffekte auftreten, gleichzeitig würden aber auch die Röntgenterme stark verschoben. Eine solche Zusatzkraft kommt also zur Erklärung einer Streuanomalie nicht in Frage, ebenso fällt der Einfluss des magnetischen Kernmomentes nicht in Betracht, da nach JAUCH die magnetische Streuung für Energien bis zu 3 MeV verschwindend klein ist gegen die Coulomb'sche Streuung.

Aus diesen Tatsachen muss man wohl den Schluss ziehen, dass nicht die theoretischen, wohl aber ein Teil der experimentellen Arbeiten mit Ungenauigkeiten oder mit Fehlern behaftet sind. Es ist dies um so eher möglich, als — besonders bei Messungen mit der Wilsonkammer — viele zum Teil grosse Korrekturen berücksichtigt werden müssen, um aus der beobachteten auf die wahre Anzahl der Streuungen schliessen zu können. Bei vielen Messungen ist zudem die statistische Genauigkeit sehr gering.

In der vorliegenden Arbeit wird daher vor allem auf diese Korrekturen und auf genügende statistische Genauigkeit Wert gelegt. Es wird darum nur das Energiegebiet von 1—3 MeV untersucht, um in einem relativ kleinen Energiebereich viele Streuungen zu erhalten.

IV. Apparatur.

Die benützte, vollautomatische Wilsonkammer wurde in der Arbeit von BOSSHARD und SCHERRER³⁾ genau beschrieben. Es handelt sich, von einigen kleinen Abänderungen abgesehen, um die gleiche Apparatur, mit welcher SCHERRER und ZÜNTI⁴⁾ Streumessungen an Argon und BLEULER⁵⁾ solche an Fluor gemacht haben.

Der Expansionsraum enthält das streuende Gasgemisch bei geringem Unterdruck gegen die Atmosphäre. Die Expansion geschieht pneumatisch, indem der Raum unter dem mit einem Tombakrohr abgedichteten Kolben rasch evakuiert wird. Alle Bewegungen werden durch eine Nockenwelle gesteuert. Die Steuerung der Beleuchtung geschieht vollständig elektrisch. Die Dauer der Beleuchtung und die Verzögerung des Beleuchtungseinsatzes können bequem und unabhängig voneinander eingestellt werden.

Der für die Aufnahmen nutzbare, durch vier seitlich angebrachte Soffitenlampen beleuchtete Raum hat einen Durchmesser von 17 cm und eine Tiefe von 1,65 cm. Die Aufnahmekameras für die stereoskopischen Bilder sind symmetrisch zur Achse der Wilsonkammer angeordnet und gegeneinander um einen Winkel

von $21,5^\circ$ geneigt. Die Aufnahmen wurden auf Kodak Super XX und auf Agfa Isopan Ultra 23/10 Din Normalfilm gemacht.

Das Magnetfeld wird durch zwei auf Aluminiumkörper gewickelte Helmholtzspulen von je 283 Windungen erzeugt. Zur Verhütung einer grossen Erwärmung werden die Spulen erst kurz vor der Expansion unter Strom gesetzt. Unmittelbar nach der Beleuchtung wird den Spulen ein kleiner Widerstand parallel geschaltet; dadurch wird der bei der Abschaltung der Spulen auftretende Öffnungsfunke erheblich gedämpft. Alle Aufnahmen wurden bei einem Feld von 1000 Oersted gemacht. Die Feldstärke im beleuchteten Raum wurde mit Hilfe einer Probespule und eines ballistischen Galvanometers gemessen, nachdem die Probespule im bekannten Magnetfeld einer langen, eisenlosen Spule geeicht worden war, Trotzdem sich kaum 10 cm unterhalb der beleuchteten Schicht ein dicker, als Kolbenführung dienender Eisenstempel befindet, ist das Feld völlig homogen nach Richtung und Grösse. Im ganzen für die Auswertung der Spuren in Frage kommenden Raum beträgt die Abweichung vom Mittelwert weniger als 1%.

Die verwendeten Elektronen entstammen einem Präparat von 5 mgr Radium, das kontinuierliche β -Spektrum von RaB + RaC reicht bis 3,16 MeV. Die Elektronen werden durch eine Elektronenlinse mit magnetischem Längsfeld durch ein dünnes Glimmerfenster in die Wilsonkammer hineingeworfen. Die Elektronenlinse blendet einerseits einen gewissen Energiebereich aus dem Spektrum aus, anderseits schirmt sie die unerwünschte γ -Strahlung teilweise ab.

V. Auswertung.

Zur Berechnung der Zahl der theoretisch zu erwartenden Streuungen müssen von jeder Spur folgende Bahnelemente gemessen werden:

a) Der Krümmungsradius ϱ_0 der Bahn.

Daraus können gemäss den Gleichungen

$$H \varrho_0 = \frac{m_0 c^2}{e} \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ Oersted} \cdot \text{cm}$$

und

$$E = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \text{ Erg}$$

Geschwindigkeit $v = \beta c$ und kinetische Energie E berechnet werden.

b) Länge der Bahn l .

c) Ablenkwinkel ϑ bei allfälligen Streuungen.

1. *Technik der Auswertung.*

Die beiden Filme werden durch die in genau gleicher gegenseitiger Lage wie bei der Aufnahme sich befindenden Objektive in natürlicher Grösse auf ein durch ein Kugelgelenk allseitig schwenkbares und verschiebbares Tischchen zurückprojiziert. Wenn sich die beiden Bilder einer Bahn auf dem Tischchen decken, so hat man ein nach Grösse und Orientierung genau gleiches Bild wie bei der Aufnahme. Die richtige Einstellung kann nach KLARMANN und BOTHE¹⁰⁾ dadurch erleichtert werden, dass die Lichtbündel der Projektionslampen durch eine rotierende Scheibe abwechselnd unterbrochen werden. Auf der Projektionsebene tanzen dann die Bilder der Bahnen hin und her. Wenn die Ebene richtig eingestellt ist, decken sich die beiden Bilder und das betreffende Bahnstück bleibt in Ruhe. Diese „Flimmereinrichtung“ macht die Auswertung aber sehr mühsam, da die Augen rasch ermüden. Es wurde darum folgender Weg eingeschlagen: Die beiden Filme werden durch ein rotes bzw. grünes Filter projiziert; es entsteht aus jeder Bahn ein grünes und ein rotes Bild, im übrigen Teil des Gesichtsfeldes überlagern sich die beiden Projektionen zu einer weisslichen Farbe. Nun wird die Projektionsebene verschoben, bis sich das grüne und das rote Bild decken. In diesem Fall kommt von keiner Lampe mehr Licht auf dieses Bahnstück und es erscheint schwarz. Dieser auftretende Farbumschlag ist ein sehr empfindlicher Nachweis für die richtige Lage der Projektionsebene.

Bei der Abbildung von abgelenkten Bahnen wird das Bildtischchen so eingestellt, dass es mit der Streuebene, d. h. mit der Ebene der beiden Tangenten am Knick der Bahn zusammenfällt. Der Winkel zwischen den beiden Tangenten stellt dann gerade den Streuwinkel in natürlicher Grösse dar.

Da der grösste Teil der Bahnen nicht abgelenkt wird und ziemlich genau horizontal verläuft, tritt eine Vereinfachung der Auswertung ein. Bei diesen Bahnen können Länge und Krümmungsradius gerade in wahrer Grösse in einer festen horizontalen Ebene gemessen werden. Nur bei Streuungen, wo nach der Ablenkung das Elektron im allgemeinen eine Schraubenlinie beschreibt, müssen die Bahnelemente in einer schiefen Ebene, der Schmiegungeebene, durch den Streupunkt gemessen werden. In diesem Fall kann aus der Projektion auf die Horizontalebene die Horizontalgeschwindigkeit und aus der Neigung φ der Schraubenlinie die Vertikalkomponente der Geschwindigkeit berechnet werden.

Radius und Länge der Bahnen werden auf die übliche Weise mittels Testkreisen, welche auf Celluloid eingeritzt sind, ausgemessen.

2. Theoretischer Wirkungsquerschnitt.

Zum Vergleich mit dem Experiment muss die Formel (2) integriert werden, und man erhält für eine Streuung um einen Winkel zwischen ϑ_1 und ϑ_2 folgenden Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma(\vartheta_1, \vartheta_2) = 2\pi \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} I(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad (4)$$

$$= \pi Z^2 \left(\frac{e^2}{m_0 c^2} \right)^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^4} \left\{ \operatorname{ctg}^2 \vartheta/2 + 2\beta^2 \lg \sin \vartheta/2 + 2\pi\beta\alpha Z \frac{(1 - \sin \vartheta/2)^2}{\sin \vartheta/2} \right\} \Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$$

Zur weiteren Berechnung kann $\sigma(\vartheta_1, \vartheta_2)$ in der Form

$$\sigma(\vartheta_1, \vartheta_2) = Z^2 \sigma_1(\vartheta_1, \vartheta_2) + Z^3 \sigma_2(\vartheta_1, \vartheta_2) \quad (5)$$

geschrieben werden.

Durchläuft ein Elektron in einem Gasgemisch mit N_i Kernen der Ladungszahl Z_i pro cm^3 eine Strecke von L cm, so erleidet es im Mittel $n(\vartheta_1, \vartheta_2)$ Ablenkungen zwischen ϑ_1 und ϑ_2 , wobei

$$n(\vartheta_1, \vartheta_2) = \sum N_i Z_i^2 L \cdot \sigma_1(\vartheta_1, \vartheta_2) + \sum N_i Z_i^3 L \cdot \sigma_2(\vartheta_1, \vartheta_2).$$

3. Geometrische Korrekturen.

Es ist von ausserordentlicher Wichtigkeit, eindeutig entscheiden zu können, wann eine Streuung als solche erkannt und ausgemessen werden kann und wann eine solche infolge geometrischer oder experimenteller Umstände nicht erkannt wird, oder wenigstens einer genauen Messung nicht zugänglich ist, und somit nicht gezählt werden darf.

Es sind darum gewisse von der Geometrie der Wilsonkammer, insbesondere von der begrenzten Schichtdicke und der speziellen Lage der Streuebene bedingte Korrekturen nötig, um von der beobachteten Zahl n_{exp} auf die wirkliche Zahl n der Streuungen schliessen zu können. In den Arbeiten von SCHERRER und ZÜNTI⁹⁾ und BLEULER⁵⁾ sind die nötigen Korrekturen eingehend begründet und berechnet worden. In der vorliegenden Arbeit wird jede Streuung gezählt, wenn:

- a) beide Äste der Streuung eine Mindestlänge von $b = 1,5$ cm haben,
- b) wenn die Streuung nicht in den ersten oder letzten 1,5 cm der Bahn stattfindet,
- c) wenn die Streuebene weniger als 45° gegen die Horizontalebene geneigt ist.

Im übrigen werden nur scharfe, gut begrenzte Spuren berücksichtigt, da nur bei solchen eine exakte Ausmessung möglich ist und die Gewähr besteht, dass das Elektron erst nach der Expansion in die Kammer eingetreten ist und somit der Berechnung von $\Sigma N_i Z_i^2$ der Druck im expandierten Zustand zugrunde zulegen ist.

Infolge der Bedingung b) wird von jeder Spur eine Länge $2b = 3$ cm subtrahiert. Die Summe dieser reduzierten Bahnlängen ergibt die in der Formel (6) enthaltene Länge L . Zur Berücksichtigung der Bedingungen a) und c) wird jedes Bahnelement von L mit einem vom Streuwinkel abhängigen Gewichtungsfaktor $\bar{g}(\vartheta_1, \vartheta_2)$ versehen; \bar{g} ist der Mittelwert der Funktionen

$$g(\vartheta) = \frac{1}{2} - \frac{b \sin \vartheta}{\pi d} (2 - \sqrt{2})$$

im betrachteten Winkelbereich. Dieser Gewichtungsfaktor stellt die Wahrscheinlichkeit dar, mit welcher eine im Bahnelement vorkommende Streuung ausgewertet werden kann. Diese Korrektur hängt wesentlich von der Dicke der beleuchteten Schicht ab. Da aber die Beleuchtungsgrenze nicht sehr scharf ist, wurde bei der Auswertung bei jeder Spur, welche oben oder unten aus der beleuchteten Schicht herauslief, mittels eines die genaue Schichtbegrenzung darstellenden Zeigers der genaue Austrittspunkt der Spur aus der Schicht markiert. Die obere und untere Grenzstellung des Zeigers wurden durch zwei Stellringe festgehalten. Die so markierte Schicht hatte eine Dicke von $d = 1,65$ cm.

In Tabelle I sind die für die verschiedenen Winkelbereiche massgebenden Gewichtungsfaktoren zusammengestellt.

Tabelle I.

Winkelbereich	15–20°	20–30°	30–45°	45–60°	60–90°	90–180°
Gewichtungsfaktor $\bar{g}(\vartheta_1, \vartheta_2)$	0,449	0,429	0,394	0,365	0,338	0,392

Für die theoretisch zu erwartende Zahl der messbaren Streuungen erhalten wir somit aus Gleichung (6)

$$n_{\text{th}}(\vartheta_1, \vartheta_2) = \Sigma N_i Z_i^2 L \bar{g}(\vartheta_1, \vartheta_2) \cdot \sigma_1(\vartheta_1, \vartheta_2) + \Sigma N_i Z_i^3 L \bar{g}(\vartheta_1, \vartheta_2) \sigma_2(\vartheta_1, \vartheta_2) \quad (7)$$

wobei σ_1 und σ_2 aus den Gleichungen (4) und (5) zu entnehmen sind.

4. Korrektur infolge der Vielfachstreuung.

Infolge der Vielfachstreuung weicht die beobachtete Bahn von der der Energie entsprechenden Kreisbahn mit dem Radius ϱ ab. Dadurch wird die Energiemessung etwas gefälscht, was sich in einer wenn auch relativ kleinen Änderung des Spektrums bemerkbar macht. Diese Änderung wirkt sich infolge der Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes auf die Zahl der zu erwartenden Streuungen aus.

Wenn Θ die mittlere, infolge der Vielfachstreuung bedingte, auf die Horizontalebene projizierte Winkelablenkung nach Durchdringung der Schichtdicke 1 bedeutet, so beträgt die dadurch bedingte mittlere Krümmungsänderung $\kappa = \Theta / 1$.

Nach WILLIAMS¹¹⁾ ist die infolge der Vielfachstreuung zu erwartende zusätzliche Krümmung k_s annähernd gegeben durch eine Gauss'sche Verteilung

$$W(k_s) dk_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\kappa} e^{-\frac{k_s^2}{2\kappa^2}} dk_s. \quad (8)$$

Die Wurzel aus dem mittleren Quadrat der zusätzlichen Krümmung beträgt

$$\kappa = \sqrt{2\pi} \cdot \frac{e}{H\varrho} \frac{\sqrt{\Sigma N_i Z_i^2}}{\sqrt{1}\beta} \cdot \alpha_m$$

α_m ist eine mit β , 1 und $\Sigma N_i Z_i^2$ nur langsam variierende Grösse. Die relative Krümmungsänderung beträgt demnach

$$\frac{\kappa}{k} = \frac{1}{H} \sqrt{2\pi} \frac{e}{\beta} \frac{\sqrt{\Sigma N_i Z_i^2}}{\sqrt{1}} \alpha_m = \frac{H_s}{H} \quad (9)$$

wobei mit H_s das Magnetfeld bezeichnet ist, das eine gleiche Krümmung erzeugen würde wie die Vielfachstreuung.

Tabelle II.

ϱ	1 cm	α_m	H_s Oe	$\frac{H_s}{H}$
12	11	3,20	136,5	0,136
10	10,5	3,20	140,0	0,140
8	10	3,19	144,3	0,144
6	9	3,18	154,3	0,154
4,5	7	3,16	178,7	0,178

Tabelle II gibt eine Übersicht über die in Formel (9) interessierenden Grössen. Der Mittelwert von $\Sigma N_i Z_i^2$ betrug bei den

Messungen $1,38 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$. Für 1 ist die mittlere beobachtete Länge einer Elektronenbahn eingesetzt.

Man sieht, dass die Vielfachstreuung doch einen relativ grossen Einfluss auf die Energiemessung hat, denn die mittlere Schwankung der $H\rho$ -Werte beträgt immerhin 13—18%. Genauere Bestimmung der Energie wäre nur dann möglich, wenn das Streuvermögen des Gases herabgesetzt würde; in diesem Falle wären aber bedeutend mehr Aufnahmen nötig, um dieselbe statistische Genauigkeit zu erlangen.

Nun lässt sich aber der Einfluss dieser Unbestimmtheit der Energie auf die Zahl der zu erwartenden Streuungen leicht abschätzen, wie BLEULER⁵⁾ gezeigt hat.

Es sei $N(k)dk$ die Länge aller Bahnen mit einer wahren Krümmung zwischen k und $k + dk$. Für das gemessene Spektrum $N_g(k)dk$ erhalten wir dann aus Gleichung (8)

$$N_g(k) dk = \int_{-\infty}^{+\infty} N(k + k_s) dk W(k_s) dk_s$$

Entwicklung von $N(k + k_s)$ nach k_s und Berücksichtigung der Glieder bis k_s^2 ergibt

$$N_g(k) dk = N(k) dk \left\{ 1 + \kappa^2 \frac{d^2 N(k)}{dk^2} \cdot \frac{1}{2 N(k)} \right\}. \quad (10)$$

Gehen wir von der Krümmung k auf den Krümmungsradius ϱ über, so erhalten wir wegen $N(k)dk = L(\varrho)d\varrho$ und $k = 1/\varrho$

$$= L(\varrho) d\varrho \left\{ 1 + \left(\frac{H_s}{H} \right)^2 \left(3 + \frac{3\varrho}{L(\varrho)} \frac{dL(\varrho)}{d\varrho} + \frac{\varrho^2}{2L(\varrho)} \frac{d^2 L(\varrho)}{d\varrho^2} \right) \right\}. \quad (11)$$

Zur Berechnung des wahren Spektrums dürfen wir im Korrekturglied, da es sich ja nur um eine Abschätzung handelt, $L(\varrho)$ durch $L_g(\varrho)$ ersetzen und erhalten

$$L(\varrho) = \frac{L_g(\varrho)}{1 + (H_s/H)^2 \left(3 + \frac{3\varrho}{L_g(\varrho)} \frac{dL_g(\varrho)}{d\varrho} + \frac{\varrho^2}{2L_g(\varrho)} \frac{d^2 L_g(\varrho)}{d\varrho^2} \right)}. \quad (12)$$

Der Einfluss der Vielfachstreuung auf die Zahl $n_g(k, \vartheta_1, \vartheta_2)dk$ der zu erwartenden Streuungen lässt sich folgendermassen berechnen:

$$n_g(k, \vartheta_1, \vartheta_2) dk = dk \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(k + k_s) N(k + k_s) W(k_s) dk_s$$

Entwicklung von σ und N nach k_s ergibt bei Berücksichtigung der Glieder bis k_s^2

$$n_g(k, \vartheta_1, \vartheta_2) dk = dk \sigma(k) N(k) \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{d^2 \sigma}{dk^2} + \frac{2}{N \sigma} \frac{d\sigma}{dk} \frac{dN}{dk} + \frac{d^2 N}{N dk^2} \right) \kappa^2 \right)$$

Unter Anwendung von Gleichung (10) erhalten wir

$$n_g(k, \vartheta_1, \vartheta_2) dk = dk \sigma(k) N_g(k) \cdot (1 + \varepsilon) \quad (13)$$

mit

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{H_s}{H} \right)^2 \frac{N(k)}{N_g(k)} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{d^2 \sigma}{dk^2} + \frac{2}{\sigma N} \frac{d\sigma}{dk} \frac{dN}{dk} \right) \quad (14)$$

Nun gehen wir wieder von der Variablen k auf ϱ über. Wenn wir in der Mott'schen Formel (4) der Einfachheit halber das Glied in αZ vernachlässigen, erhalten wir, indem wir β durch ϱ ausdrücken,

$$\sigma(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{A}{\varrho^2} + \frac{B}{\varrho^4} \quad (15)$$

$$\text{mit } A = \pi \left(\frac{Zec}{H} \right)^2 \left(\text{ctg}^2 \vartheta_1 / 2 - \text{ctg}^2 \vartheta_2 / 2 + 2 \lg \frac{\sin \vartheta_1 / 2}{\sin \vartheta_2 / 2} \right)$$

$$B = \pi \left(\frac{Zmc^3}{H^2} \right)^2 (\text{ctg}^2 \vartheta_1 / 2 - \text{ctg}^2 \vartheta_2 / 2)$$

Gleichung (14) ergibt dann schliesslich

$$\varepsilon = - \left(\frac{H_s}{H} \right)^2 \frac{L}{L_g} \left(\frac{3A\varrho^2 + 2B}{A\varrho^2 + B} + \frac{2\varrho}{L} \frac{dL}{d\varrho} \frac{A\varrho^2 + 2B}{A\varrho^2 + B} \right) \quad (16)$$

Es bleibt nun noch zu berücksichtigen, dass wir experimentell den Wirkungsquerschnitt nicht bei einer bestimmten Energie, entsprechend einem Krümmungsradius ϱ , sondern nur in einem Energieintervall, gegeben durch $\varrho \pm \Delta\varrho/2$, bestimmen können. In einem solchen Intervall erhalten wir $N(\varrho, \vartheta_1, \vartheta_2)$ Streuungen

$$N(\varrho, \vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{1}{\Delta\varrho} \int_{-\frac{\Delta\varrho}{2}}^{+\frac{\Delta\varrho}{2}} \sigma(\varrho + \varrho_s) L(\varrho + \varrho_s) d\varrho_s$$

Entwicklung und Integration ergibt

$$N(\varrho, \vartheta_1, \vartheta_2) = \sigma L (1 + \delta) \quad (17)$$

$$\text{mit } \delta = (1/12) \left(\frac{\Delta\varrho}{\varrho} \right)^2 \left(\frac{3A\varrho^2 + 10B}{A\varrho^2 + B} - \frac{2\varrho}{L} \frac{dL}{d\varrho} \frac{A\varrho^2 + 2B}{A\varrho^2 + B} + \frac{\varrho^2}{2L} \frac{d^2 L}{d\varrho^2} \right). \quad (18)$$

Diese Korrektur ist klein, da der ganze Energiebereich in so kleine Intervalle eingeteilt wurde, dass $\Delta \varrho / \varrho \leq 0,1$ war.

Unter Berücksichtigung aller Korrekturen erhalten wir nun aus den Gleichungen (7), (13) und (17) folgendes Resultat:

Die Zahl $N_{\text{th}}(\varrho, \vartheta_1, \vartheta_2)$ der in einem Energieintervall, welches durch $\varrho \pm \Delta \varrho / 2$ gegeben ist, theoretisch zu erwartenden Streuungen um einen Winkel zwischen ϑ_1 und ϑ_2 beträgt

$$N_{\text{th}}(\varrho, \vartheta_1, \vartheta_2) = (1 + \varepsilon) (1 + \delta) L_g \bar{g}(\vartheta_1, \vartheta_2) (\sigma_1(\vartheta_1, \vartheta_2) \sum N_i Z_i^2 + \sigma_2(\vartheta_1, \vartheta_2) \sum N_i Z_i^3) \quad (19)$$

Diese Zahl ist mit der im Experiment gefundenen Zahl $N_{\text{exp}}(\varrho, \vartheta_1, \vartheta_2)$ zu vergleichen. Man sieht aus Gleichung (17), dass die durch die Vielfachstreuung bedingte Änderung des Spektrums nicht direkt in die Zahl der Streuungen eingeht, sondern nur indirekt durch die Korrekturen ε und δ .

VI. Die Messungen.

1. Kammerfüllung.

Als streuendes Gas wurde Methyljodid CH_3J verwendet; CH_3J ist bei Zimmertemperatur flüssig, sein Dampfdruck beträgt bei 20°C 331 mm Hg. Damit die Vielfachstreuung nicht zu stark störte, wurde die Kammer aber nur mit einem Druck von ca. 150 mm Hg Methyljodid-Dampf gefüllt. Der Rest der Füllung bestand aus Stickstoff (bei einigen Messungen auch aus Wasserstoff) und aus dem üblichen Alkohol-Wasserdampfgemisch. In expandiertem Zustand betrug der totale Druck in der Wilsonkammer ca. 430 mm Hg. Die für die Streuung massgebenden Summen betragen

$$\begin{aligned} \sum N_i Z_i^2 &= 1,38 \cdot 10^{22} \\ \sum N_i Z_i^3 &= 0,68 \cdot 10^{24} \end{aligned}$$

dabei beträgt der Anteil der Jodkerne an $\sum N_i Z_i^2$ 94%. Das Streuvermögen der andern Kerne fällt also kaum in Betracht.

Das Methyljodid wird durch das Licht langsam zersetzt, und reagiert sehr langsam mit Wasser. Um einer unbestimmten Änderung des Streuvermögens der Kammerfüllung vorzubeugen, wurde diese höchstens 8 Stunden lang verwendet, vor jeder längeren Messreihe wurde die Kammer wieder frisch gefüllt. Zur Kontrolle wurde eine Füllung mehrere Tage belassen und dann durch eine in flüssige Luft getauchte Kühlschlange ausgepumpt. Das CH_3J sowie das Alkohol-Wasserdampfgemisch kondensierten, und es wurden etwa 90% der eingefüllten Menge wieder gewonnen. Eine wesentliche Änderung des Streuvermögens kann also nicht stattgefunden haben.

$$L_k(\rho), L(\rho)$$

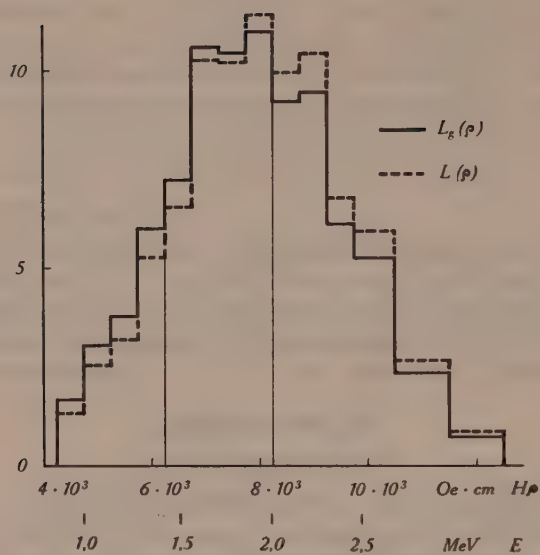
$$\text{cm/Oe} \cdot \text{cm}$$


Fig. 3.

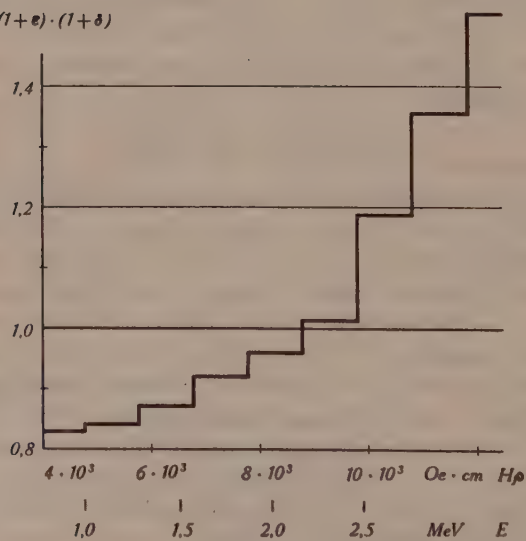
$$(1 + \epsilon) \cdot (1 + \delta)$$


Fig. 4.

2. Ergebnisse.

Es wurden ca. 2700 Aufnahmen bei einem Magnetfeld von 1000 Oersted hergestellt. Besonderer Wert wurde darauf gelegt, dass die einzelnen Aufnahmen nicht zu viele Spuren aufwiesen, da bei vielen Spuren die Auswertung erschwert wird und leicht Fehler entstehen, indem einerseits durch kreuzende Spuren Streuungen vorgetäuscht werden oder andererseits der Beobachtung entgehen. Durchschnittlich wies eine Aufnahme 3—5 Spuren auf.

Die totale Länge aller Spuren betrug ca. 620 m, die reduzierte Bahnlänge noch 459 m. Fig. 3 zeigt das gemessene und das nach Gleichung (10) berechnete wahre Energiespektrum.

Auf der Abszisse ist die Energie der Elektronen, auf der Ordinate die Bahnlänge in cm pro 1 Oersted · cm aufgetragen. Die 14 Energieintervalle sind in drei grössere Energiebereiche zusammengefasst, entsprechend der Zusammenfassung der Resultate in Tabelle III.

In Fig. 4 ist die Korrekturgrösse $(1 + \varepsilon) \cdot (1 + \delta)$ in Abhängigkeit der Energie aufgezeichnet.

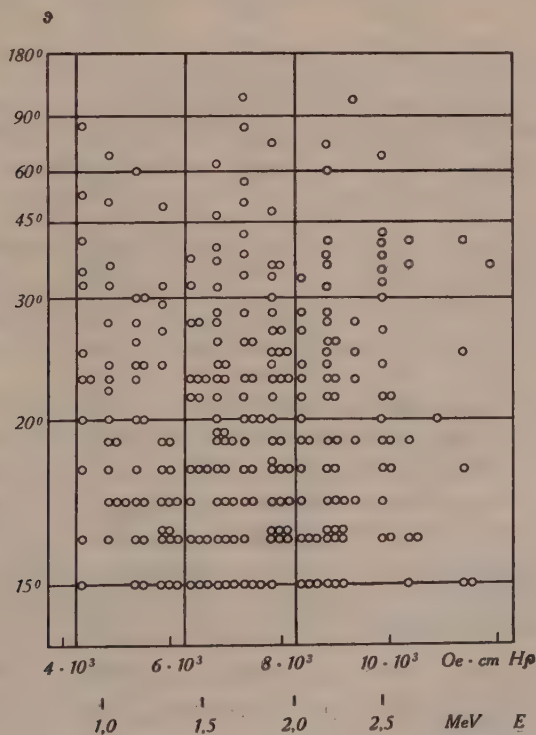


Fig. 5.

Im Grunde genommen hängen ε und δ noch vom Streuwinkel ab, der Einfluss ist aber sehr klein und vernachlässigbar. Der Faktor $(1 + \delta)$ ist sehr nahe an 1, δ ist etwa 20mal kleiner als ε , der Einfluss der endlichen Breite des Energieintervalls ist also sehr klein gegen den Einfluss der Vielfachstreuung. Wenn auch ε am oberen Rand des Spektrums gross ist, so ändert sich an der Zahl der zu erwartenden Streuungen sehr wenig, da infolge der kurzen Bahnlänge bei grossen Energien nur wenige Streuungen vorkommen.

Fig. 5 zeigt die übliche Darstellung der gemessenen Streuungen als Funktion des Streuwinkels und der Energie.

Tabelle III.

Energie H_0 $Oe \cdot cm$		4250-6250	6250-8250	8250-12000	4250-12000
MeV		0,86-1,44	1,44-2,04	2,04-3,16	0,86-3,16
Bahnlänge L m		72,5	194,3	192,0	458,8
15-20°	N_{exp}	31,0	48,5	38,0	117,5
	N_{th}	30,01	48,35	31,58	109,94
	$\frac{N_{exp}}{N_{th}}$	1,03	1,00	1,20	$1,07 \pm 0,09$
20-30°	N_{exp}	18,0	37,0	25,0	80,0
	N_{th}	21,28	33,99	22,27	77,54
	$\frac{N_{exp}}{N_{th}}$	0,85	1,09	1,22	$1,03 \pm 0,11$
30-45°	N_{exp}	8,0	11,5	14,5	34,0
	N_{th}	9,19	14,25	9,43	32,87
	$\frac{N_{exp}}{N_{th}}$	0,87	0,81	1,54	$1,03 \pm 0,17$
45-60°	N_{exp}	3,5	4,0	0,5	8,0
	N_{th}	2,96	4,61	2,92	10,49
	$\frac{N_{exp}}{N_{th}}$	1,18	0,87	0,17	$0,76 \pm 0,35$
60-180°	N_{exp}	2,5	4,0	3,5	10,0
	N_{th}	2,31	3,62	2,34	8,27
	$\frac{N_{exp}}{N_{th}}$	1,07	1,10	1,50	$1,21 \pm 0,32$
15-180°	N_{exp}	63,0	105,0	81,5	249,5
	N_{th}	65,75	104,82	68,54	239,5
	$\frac{N_{exp}}{N_{th}}$	$0,96 \pm 0,13$	$1,00 \pm 0,10$	$1,19 \pm 0,11$	$1,04 \pm 0,06$

In Tabelle III sind die gemessene Zahl N_{exp} und die nach Formel (19) berechnete Zahl N_{th} der Streuungen für die verschiedenen Energie- und Winkelbereiche zusammengestellt. Streuungen, welche auf der Grenze der Winkelbereiche liegen, sind je zur Hälfte beiden Bereichen zugeordnet.

Für den totalen Winkel- und Energiebereich sind noch die statistischen Fehler angegeben.

3. Diskussion.

Anhand der Übersicht in Tabelle III kann folgendes Resultat festgehalten werden:

Die Streuung von Elektronen an Jodkernen wird im Energiebereich von 1—3 MeV durch die Mott'sche Formel richtig wiedergegeben. Die Abweichungen liegen für alle Winkelbereiche innerhalb der statistischen Schwankungen. Die grössere Abweichung im Energiebereich von 2—3 MeV liegt noch innerhalb der Fehlergrenzen, denn ausser der statistischen Schwankung sind noch folgende Fehlerquellen zu berücksichtigen:

a) Fehler von $\Sigma N_i Z_i^2$:

Infolge Temperaturschwankung während der Messung muss hie und da das Expansionsverhältnis etwas geändert werden, ferner besteht eine gewisse Ungenauigkeit in der Bestimmung der Partialdrucke der einzelnen Gase. In der Berechnung von $\Sigma N_i Z_i^2$ entsteht dadurch ein maximaler Fehler von 5%.

b) Geometrische Korrekturen:

Die Dicke der beleuchteten Schicht kann mittels des Zeigers genau abgegrenzt werden, der Fehler beträgt höchstens $\pm 0,2$ mm, das entspricht einer Unsicherheit des Streuquerschnittes von ca. 1%.

Der Fehler in der Bestimmung der Bahnlänge trägt maximal 2% zum Fehler des Wirkungsquerschnittes bei.

Wesentlich stärker fällt die Unbestimmtheit der Streuebene ins Gewicht. Da die Tangenten, welche die Streuebene bestimmen, nicht sichtbar sind und anderseits die räumlich gekrümmten Spuren manchmal ziemlich rasch aus dieser Ebene herauslaufen, kann ihre Neigung oft nicht sehr genau bestimmt werden. Der dadurch bedingte Fehler kann mit 6% veranschlagt werden.

c) Ungenauigkeit des Magnetfeldes:

Nach je 5 Aufnahmen wurde das Magnetfeld kontrolliert und neu eingestellt. Der totale Fehler infolge Spannungsschwankungen,

Inhomogenität des Feldes und Eichfehlern beträgt etwa 2%, der Fehler in der Bestimmung des Wirkungsquerschnittes somit etwa 4%.

d) Andere Fehler:

Trotz aller Sorgfalt bei der Herstellung der Aufnahmen entstehen auch schlechte Spuren oder Aufnahmen mit zuviel Spuren. Es können dadurch bei der mühsamen Auswertung Fehler entstehen, welche sich kaum abschätzen lassen. Da aber auf den 2700 Aufnahmen nur ganz wenige zweifelhafte Streuungen gezählt wurden, dürfte auch dieser Fehler klein sein.

Alle diese Fehler ergeben zusammen mit der statistischen Schwankung von 6% eine mittlere Unbestimmtheit des Wirkungsquerschnittes von maximal 15%.

Wir erhalten somit für die Streuung von Elektronen von 1—3 MeV im Winkelbereich von 15° bis 180° das Ergebnis

$$\frac{N_{\text{exp}}}{N_{\text{th}}} = 1,04 + 0,15.$$

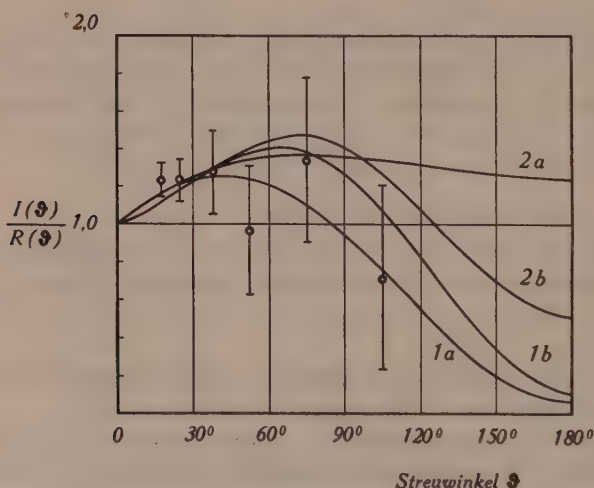


Fig. 6.

○ = Experimenteller Wert. 1a = Formel von MOTT. 1b = Interpolation der \bar{K} -Kurve von MASSEY auf die Kurve von MOTT. 2a = Formel von URBAN. 2b = Interpolation der Kurve von MASSEY auf die Kure von URBAN.

In Fig. 6 ist die Winkelabhängigkeit der gemessenen Streuung dargestellt im Verhältnis zur Rutherford'schen Formel (1). Zum Vergleich sind die Kurven von MOTT und URBAN eingezeichnet.

Ferner ist noch eine Interpolation der numerisch berechneten Kurven von MASSEY von Quecksilber auf Jod enthalten. Dieser Interpolation liegt die Annahme zugrunde, dass die Abweichung zwischen den Kurven von MOTT und MASSEY resp. URBAN und MASSEY (Fig. 1) im wesentlichen durch den Term $(\alpha Z)^2 f(\vartheta)$ in Gleichung (2) hervorgerufen wird, und dass für leichte Kerne ($\alpha Z \ll 1$) alle drei Kurven zusammenfallen.

Die Figur zeigt, dass die auf diese Weise korrigierten Kurven von MOTT und URBAN erst bei Winkeln über 120° um mehr als 30% voneinander abweichen. Anhand der Messpunkte kann darum kaum entschieden werden, welche Kurve der Wirklichkeit besser entspricht. Das scheint uns aber auch nicht wesentlich zu sein, da beide Formeln gemäss Voraussetzung nur für leichte Kerne Gültigkeit haben, für Jod ($Z = 53$) also nur mit Vorsicht anzuwenden sind. Wesentlich ist nur, dass die Übereinstimmung mit der Theorie so gut ist, dass nicht auf eine unbekannte Wechselwirkung zwischen Atomkern und Elektron geschlossen werden muss.

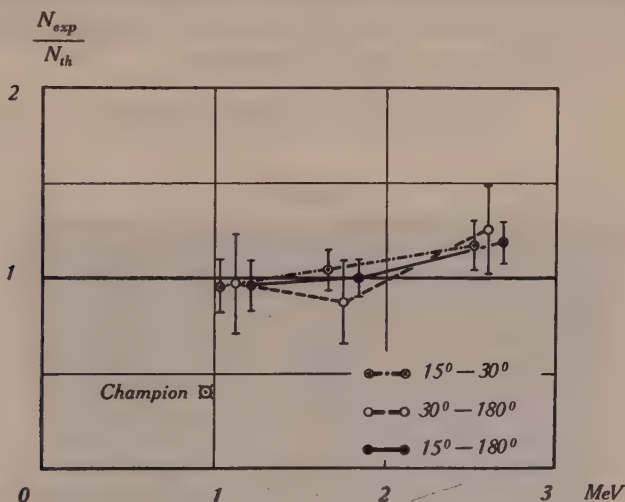


Fig. 7.

4. Zusammenfassung.

Für die Streuung von Elektronen von 1—3 MeV an Jodkernen wird, im Gegensatz zu den Messungen von CHAMPION und BARBER⁶), welche für $N_{exp}/N_{th} = 0,4$ erhalten haben, Übereinstimmung mit der Mott'schen Formel gefunden. Es ist allerdings zu bemerken, dass sich die Messungen von CHAMPION und BARBER auf Energien von 0,7—1,2 MeV beziehen. Aus Tabelle III

könnte man ja in der Tat herauslesen, dass die Streuung für kleine Energien unternormal und für grosse Energien übernormal ist. Fig. 7 zeigt den Wert $N_{\text{exp}}/N_{\text{th}}$ mit den zugehörigen Fehlergrenzen in Abhängigkeit von der Energie.

Da die Abweichungen von der Mott'schen Formel aber sehr klein sind und innerhalb der Fehlergrenzen liegen, kann von einer systematischen Abweichung wohl kaum gesprochen werden.

Die Figuren 8—11 zeigen einige Aufnahmen von Streuungen in ca. halber natürlicher Grösse.

In Fig. 8 ist eine unelastische Streuung eines Elektrons von etwa 1,8 MeV an einem Hüllenelektron sichtbar. Sehr deutlich ist die Gabelung der Spur und die Abnahme der Energie bemerkbar.

Die Figuren 9—11 zeigen elastische Kernstreuungen um Winkel von 55° , 65° und ca. 130° . In Fig. 11 erscheint der gestreute Ast sehr kurz, da er stark gegen die Horizontalebene geneigt ist und rasch aus der beleuchteten Schicht herausläuft.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER, bin ich für das stete Interesse an dieser Arbeit und für viele fördernde Diskussionen zu grossem Dank verpflichtet.

Zürich, Physikalisches Institut der E. T. H.

Literatur.

- 1) RUTHERFORD, Phil. Mag. **21**, 669 (1911).
- 2) MOTT, Proc. Roy. Soc. A **124**, 445 (1929); **135**, 429 (1932).
- 3) URBAN, Zschr. f. Phys. **119**, 67 (1942).
- 4) MASSEY, Proc. Roy. Soc. **181**, 14 (1942).
- 5) BLEULER, Helv. Phys. Acta **15**, 613 (1942).
- 6) CHAMPION und BARBER, Phys. Rev. **55**, 111 (1939).
- 7) JAUCH, Helv. Phys. Acta **13**, 451 (1940).
- 8) BOSSHARD und SCHERRER, Helv. Phys. Acta **14**, 85 (1941).
- 9) SCHERRER und ZÜNTLI, Helv. Phys. Acta **14**, 111 (1941).
- 10) KLARMANN und BOTHE, Zschr. f. Phys. **101**, 489 (1936).
- 11) WILLIAMS, Proc. Roy. Soc. A **169**, 531 (1939); Phys. Rev. **58**, 292 (1940).

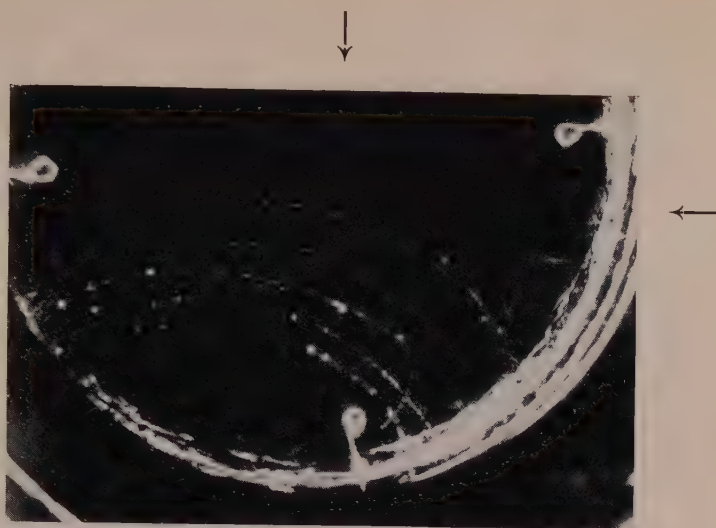


Fig. 8.

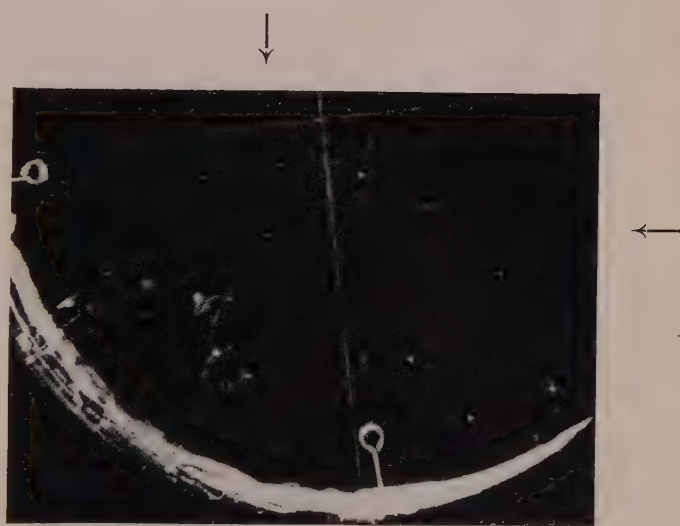


Fig. 9.

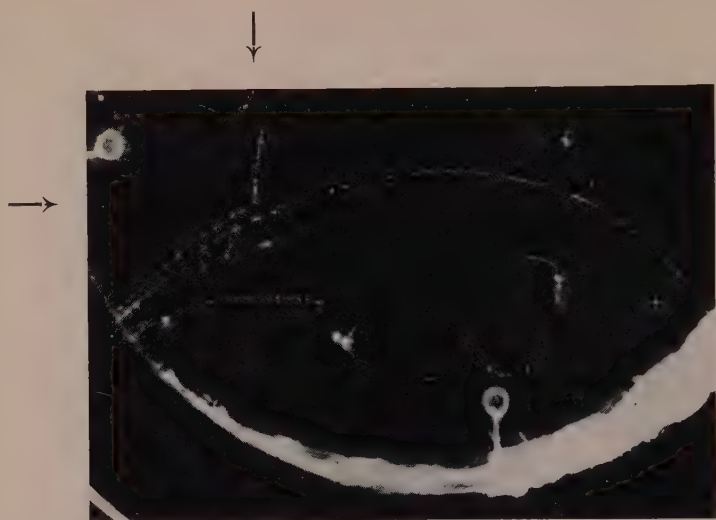


Fig. 10.

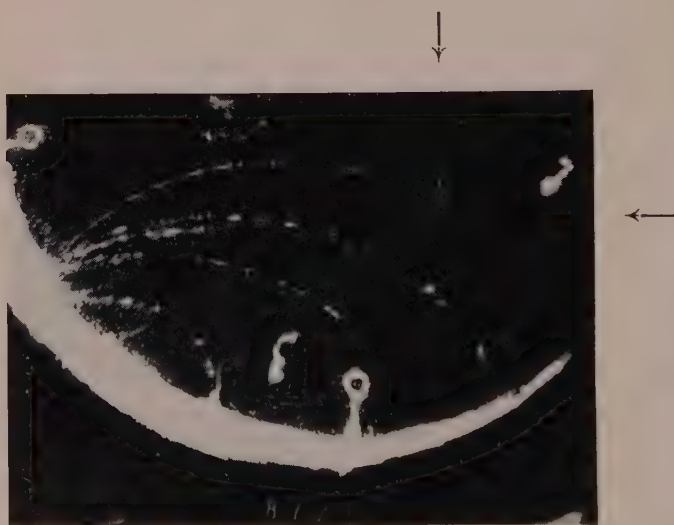


Fig. 11.

Das Problem der Emission leichter positiver Teilchen durch β -Strahler

von H. Bradt, H.-G. Heine und P. Scherrer.

(27. IX. 1943.)

Auf Wilsonkammer-Aufnahmen, ausgeführt mit einer in der Wilsonkammer befindlichen, negative Zerfallselektronen aussendenden β -aktiven Quelle, findet man unter etwa hundert von der Quelle ausgehenden Elektronenspuren eine Spur entgegengesetzter Krümmung. Diese „positiven“ Spuren sind sonst von den Elektronenspuren nicht zu unterscheiden. Mit einer $\text{Th}(\text{B} + \text{C} + \text{C}'')$ -Quelle sind solche Spuren von CHADWICK, BLACKETT und OCCHIALINI¹⁾, mit $\text{Ra}(\text{B} + \text{C})$ -Quellen von SKOBELZYN und STEPANOWA²⁾, von DA SILVA³⁾ und von SIZOO und BARENDREGT⁴⁾, mit UX- und $^{32}_{15}\text{P}$ -Quellen von SIZOO, BARENDREGT und GRIFFIOEN⁵⁾ beobachtet worden.

Bei der Interpretation dieser Spuren ist man auf ganz ausserordentliche Schwierigkeiten und auf so krasse Widersprüche gegen Theorie und gesicherte Tatsachen gestossen, dass die experimentellen Resultate der genannten Autoren angezweifelt worden sind. Von diesen wurden die positiven Spuren als Bahnen von der Quelle ausgesandter, positiver Elektronen betrachtet. Allerdings erscheinen auch die Bahnen zur Quelle zurückkehrender (z. B. an den Wänden der Wilsonkammer reflektierter) negativer Elektronen als positive Spuren; doch sprachen die mitgeteilten Beobachtungen entschieden dafür, dass höchstens ein kleiner Bruchteil der vorhandenen positiven Spuren so zustande gekommen sein könnte.

Wir standen den mit der Wilsonkammer erhaltenen Resultaten äusserst kritisch gegenüber und versuchten, durch eigene Experimente die Ergebnisse der genannten Autoren und die Stichhaltigkeit der gegen diese Ergebnisse vorgebrachten Argumente zu überprüfen.

¹⁾ CHADWICK, BLACKETT und OCCHIALINI, Proc. Roy. Soc. **144**, 235, 1934.

²⁾ SKOBELZYN u. STEPANOWA, Journ. de phys. **6**, 1, 1935.

³⁾ DA SILVA, Ann. de phys. **11/12**, 504, 1939.

⁴⁾ SIZOO und BARENDREGT, Physica **6**, 1085, 1939.

⁵⁾ BARENDREGT u. SIZOO, Physica **7**, 490, 1940. SIZOO, BARENDREGT und GRIFFIOEN, Physica **7**, 860, 1940.

I. Wilsonkammer-Untersuchungen.

Die Anordnung ist die gleiche wie bei Sizoo und Mitarbeitern (Fig. 1). Das aktive Material wird jeweils in eine abgeschmolzene Glaskapillare von 20—30 μ Wandstärke und 0,8 mm lichter Weite gebracht. (Das von der Kapillare reflektierte Licht lässt die Quelle in der Reproduktion dicker als auf dem Film erscheinen.) Um übersichtliche Bilder zu erhalten, werden nur sehr schwache und nahezu punktförmige Quellen verwendet; ebenso erleichtern Stereoaufnahmen zu entscheiden, welche Bahnen von der Quelle ausgehen und welche nicht. Es wurden von uns zunächst die natürlichen β -Strahler UX_2 und $Th(C + C'')$ untersucht. Die durch Ausmessen der Elektronenspuren (Bahnlänge > 3 cm) erhaltenen Energiespektren stimmen gut mit den von LECOIN¹⁾ angegebenen überein.

Die auf den Aufnahmen vorhandene Anzahl von Spuren reflektierter resp. gestreuter Elektronen, die bei geeigneter Anfangsrichtung eine Chance hätten durch die Quelle zu gehen, beträgt etwa 0,1 pro Expansion. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Spur eines reflektierten Elektrons auf dem Film durch die Quelle zu gehen scheint, ist von der Grössenordnung des Verhältnisses von Präparatfleck-Durchmesser zum Durchmesser der Wilsonkammer und beträgt bei uns etwa $\frac{1}{50}$. Das heisst, nur auf etwa 500 Aufnahmen wird die Spur eines reflektierten Elektrons nicht als solche erkannt und folglich als positive Spur angesehen werden. Diese Abschätzung wurde auch noch auf andere Weise quantitativ bestätigt, indem bei der Auswertung der Filme an zwei verschiedenen Stellen der Wilsonkammer kleine Kreisflächen vom gleichen Durchmesser wie der Präparatfleck als fiktive „Quellen“ markiert wurden, und die Anzahl der durch sie hindurchgehenden „positiven Spuren“ (reflektierter negativer Elektronen) ausgezählt wurde. Diese Zahl ist nur ein kleiner Bruchteil der Zahl der von der wirklichen Quelle ausgehenden positiven Spuren.

In Tabelle I ist die Anzahl der eindeutig von der Quelle ausgehenden positiven Spuren (N^+), sowie ihr Verhältnis zur Zahl der ausgemessenen Elektronenbahnen (N^-), wiedergegeben, zusammen mit den entsprechenden, von anderen Autoren bestimmten Werten.

Unsere Aufnahmen bestätigen also grössenordnungsmässig die von Anderen erhaltenen Resultate; die $(II\varrho)$ -Verteilung der positiven Spuren ist beim UX_2 wie beim $Th(C + C'')$ vergleichbar mit derjenigen der RaB-Elektronenspuren.

Beim RaE , das auf die gleiche Weise untersucht wurde, haben wir nun ebenfalls positive Spuren sicher nachweisen können. Um

¹⁾ LECOIN, Journ. de phys. **9**, 81, 1938.

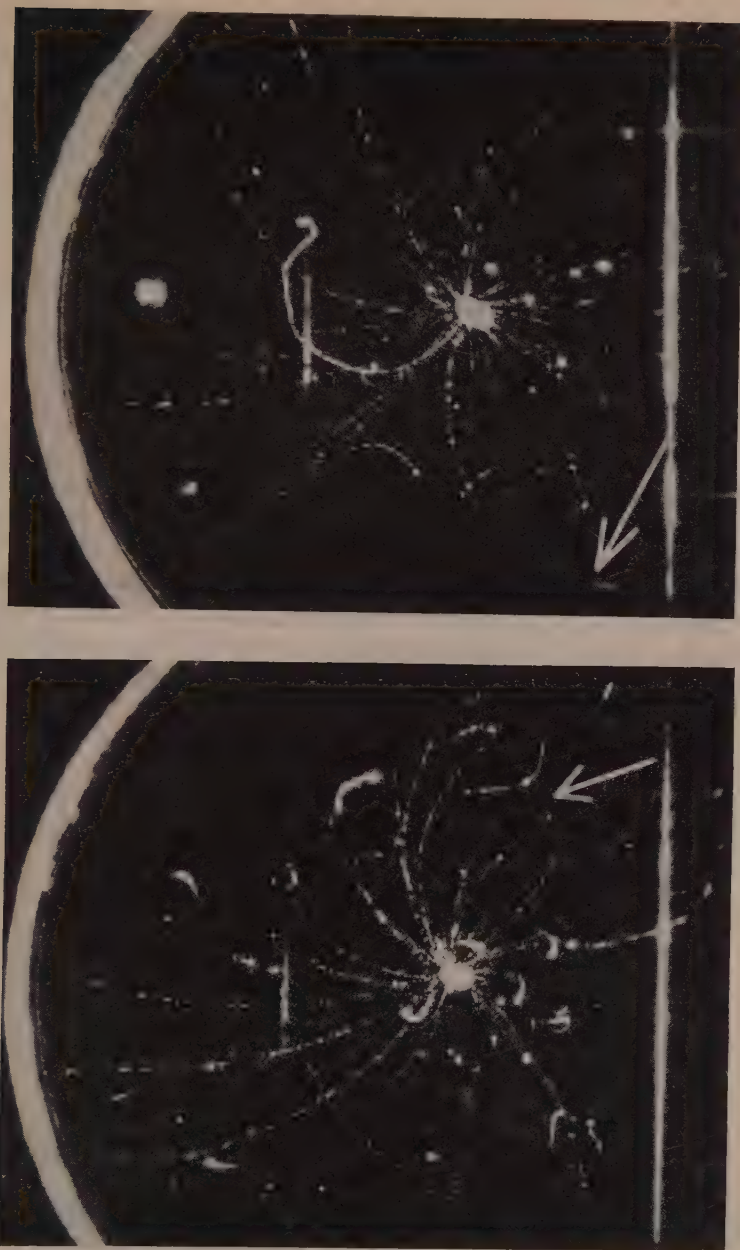


Fig. 1.

Wilsonkammer-Aufnahmen mit $(\text{He} + \text{H}_2)$ als Füllgas: RaE-Quelle.
Der Krümmung der positiven Spuren entsprechen 80 keV resp. 175 keV.

die Zahl der Mehrfachstreuungen herabzusetzen, wurde ein Teil dieser Aufnahmen mit ($H_2 + He$) als Füllgas der Wilsonkammer gemacht; Fig. 1 gibt zwei solcher Aufnahmen wieder. Bei der zweiten Aufnahme ist die Bewegungsrichtung des Teilchens, welches die positive Spur erzeugt hat, eindeutig zu erkennen. Das Teilchen erleidet nämlich mehrere unelastische Streuungen; es kann in diesem Fall gar kein Zweifel bestehen, dass sich das Teilchen, welches diese Spur erzeugt hat, von der Quelle fortbewegt.

Tabelle 1.

Quelle	Obere Grenze des β -Spektrums in MeV	Zahl der Aufnahmen	Zahl der e^- pro Aufnahme	Zahl der positiven Spuren	N^+/N^-
UX_2	2,32	417 ¹⁾	24	62	$0,6 \cdot 10^{-2}$
		577	5,2	12	$0,4 \cdot 10^{-2}$
Th(C+C'')	2,20	135 ²⁾	15	24	$1,2 \cdot 10^{-2}$
		551	5,5	10	$0,3 \cdot 10^{-2}$
RaE	1,17	2560	9	73	$0,3 \cdot 10^{-2}$

Das aus dem gemessenen (H_2)-Spektrum der positiven RaE-Spuren berechnete Energiespektrum der positiven Teilchen (Positronen) ist in Fig. 2 zusammen mit dem RaB- β -Spektrum wieder-

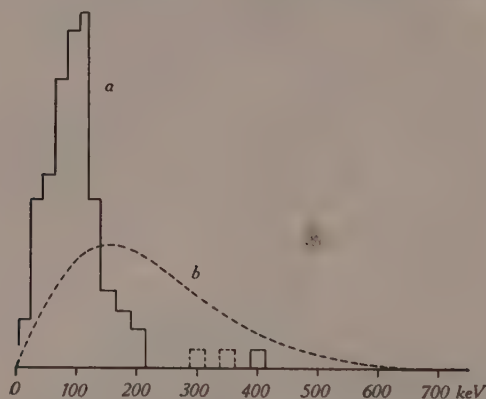


Fig. 2.

a = Energieverteilung von 73 positiven Spuren einer RaE-Quelle.

b = RaB-Elektronenspektrum.

gegeben. Die Energie der vom RaE ausgehenden positiven Teilchen ist danach im Mittel geringer als bei den anderen, bisher untersuchten Substanzen. Die obere Grenze des Spektrums liegt jedoch

¹⁾ BARENDREGT und SIZOO, loc. cit.

²⁾ CHADWICK, BLACKETT u. OCCHIALINI, loc. cit.

sicher oberhalb von etwa 250 keV, wie dies aus dem Abfall des Spektrums bei höheren Energien zu entnehmen ist. (Bei unseren Aufnahmen wurde sogar eine positive Spur gefunden, deren Krümmung einer Energie von 400 keV entspricht.) Dieses Resultat ist, wie noch näher ausgeführt wird, besonders bemerkenswert.

Unsere Wilsonkammer-Untersuchungen lassen, vom experimentellen Standpunkt aus, einen Zweifel an der Tatsache, dass zumindest der grösste Teil der beobachteten positiven Spuren Bahnen von aus der Quelle emittierten, positiven Teilchen sind, nicht als gerechtfertigt erscheinen.

II. Paarerzeugung durch Elektronen und Positronenemission der β^- -Strahler.

Die eingangs angedeuteten Widersprüche, welche sich bei der Interpretation der positiven Wilsonkammer-Spuren ergeben haben, leiten sich aus folgenden Tatsachen ab.

1. Es wurden von SKOBELZYN u. STEPANOWA, von DA SILVA und von SIZOO u. BARENDREGT in der Wilsonkammer positive Spuren (die, wie gesagt, als Positronenpuren betrachtet wurden) auch dann noch beobachtet, wenn die Quelle von einem Absorber

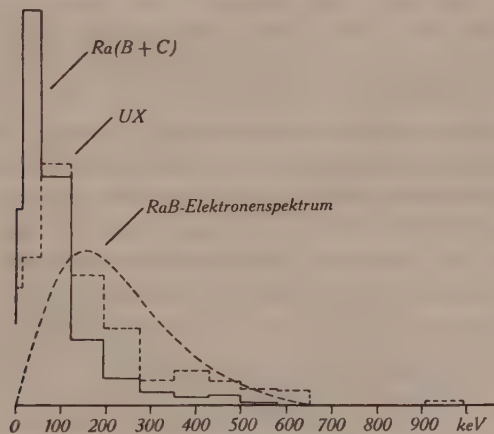


Fig. 3a.

Energieverteilung der positiven Spuren von Ra(B+C)- und UX-Quellen.
(Nach SIZOO und BARENDREGT.)

umgeben wurde, welcher — nach Ausweis des gemessenen ($H\phi$)-Spektrums dieser Spuren — alle direkt von der Quelle emittierten Positronen absorbieren sollte. Dies geht klar aus Fig. 3 hervor: In Fig. 3a sind die Spektren der positiven UX- und Ra(B + C)-Spuren nach SIZOO u. BARENDREGT zusammen mit dem β -Spektrum

des RaB eingezeichnet. In Fig. 3b sind die Resultate der Wilsonkammer-Absorptionsmessungen zusammen mit der Absorptionskurve der RaB- β -Strahlung eingetragen; danach scheinen die positiven Teilchen ausserordentlich viel durchdringender zu sein als die RaB- β -Strahlen, deren Energiespektrum mit dem Energiespektrum der positiven Teilchen vergleichbar ist. Nach SKOBELZYN-STEPANOWA, DA SILVA u. SIZOO-BARENDREGT ist diese grössere Durchdringungsfähigkeit aber nur eine scheinbare: aus dem in Fig. 3

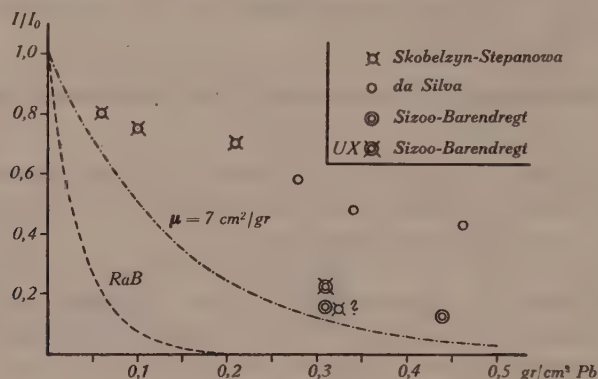


Fig. 3b.

Relative Häufigkeit der positiven Wilsonkammerspuren hinter Bleiabsorbern (Ra(B+C)-Quelle). Zum Vergleich ist die Absorptionskurve der RaB- β -Strahlen und eine Absorptionskurve mit $\mu = 7 \text{ cm}^2/\text{gr}$ eingezeichnet.

dargestellten Sachverhalt wurde von den genannten Autoren gefolgert, dass die hinter stärkeren Absorbern beobachteten positiven Spuren von Positronen, die im Absorber selbst erzeugt werden, herühren müssen. Zur Deutung des Prozesses, der zur Entstehung der Positronen im Absorber führen soll, konnte nur die von der DIRAC'schen Theorie beschriebene *Paarerzeugung durch Elektronen*¹⁾ herangezogen werden. Aus der beobachteten Häufigkeit der Spuren ergab sich dann für diesen Prozess im krassen Widerspruch zur Theorie (die einen Z^2 -proportionalen Wirkungsquerschnitt von der Grössenordnung 10^{-26} cm^2 für Pb erwarten lässt) ein annähernd Z -proportionaler Wirkungsquerschnitt der enormen Grössenordnung $Z/82 \cdot 10^{-22} \text{ cm}^2$ (10^{-22} cm^2 für Pb). Durch Paarerzeugung der β -Strahlen sollte nach SKOBELZYN-STEPANOWA etwa ein Viertel aller Zerfallsprozesse einer mit Pb bedeckten RaC-Quelle zur Entstehung eines Positrons führen!

¹⁾ Die γ -Strahlung kann beim UX, P³² und RaE für die positiven Spuren überhaupt nicht, beim Ra(B+C) und Th(B+C+C'') nur für einen kleinen Bruchteil derselben verantwortlich gemacht werden.

Die genannten Autoren hielten durch ihre Wilsonkammer-Beobachtungen eine „Anomalie“ der Paarerzeugung durch Elektronen für unzweideutig bewiesen und erklärten konsequenterweise die von unbedeckten Quellen ausgehenden positiven Spuren als Spuren von Positronen, welche durch eine „anomale“ Paarkonversion der kinetischen Energie der β^- -Strahlen erzeugt würden. Die Wahrscheinlichkeit dieser Paarkonversion wäre 10^4 bis 10^6 mal grösser als der theoretisch berechnete Wert.

Diese anscheinend zwingende Deutung steht nun aber nicht nur in krassem Widerspruch zur Theorie, sondern auch zu den folgenden, experimentell gesicherten Tatsachen.

2. Der Wirkungsquerschnitt für die Paarerzeugung durch Elektronen ist nicht „anomal“ gross, d. h. er ist nur von der Grössenordnung, welche die DIRAC'sche Theorie erwarten lässt. Dies beweisen die Versuche von FELDMEIER u. COLLINS¹⁾, von ALICHANOW, ALICHANIAN u. KOSODAEW²⁾, von CRANE u. HALPERN³⁾, von STAUB⁴⁾, von SEN GUPTA⁵⁾ und anderen; es wird ebenfalls bewiesen durch den experimentellen Nachweis⁶⁾, dass eine mit Pb bedeckte UX-Quelle keine *Annihilationsstrahlung* in auch nur annähernd dem Ausmass emittiert, der einem Wirkungsquerschnitt der Grössenordnung $(10^{-23} - 10^{-22}) \text{ cm}^2$ für die Paarerzeugung durch schnelle Elektronen entspricht.

Das Resultat der letztgenannten Versuche wird ergänzt durch die Messungen von CHIEN-SHIUNG-WU⁷⁾ über Intensität und Absorbierbarkeit der γ -Strahlung des Radiophosphors $_{15}\text{P}^{32}$. Die γ -Strahlung des P^{32} ist, wie diejenige des RaE, reine Bremsstrahlung, während sie vorwiegend Annihilationsstrahlung sein müsste, würde die behauptete „Anomalie“ der Paarerzeugung durch Elektronen den Tatsachen entsprechen.

3. Der Nachweis, dass weder UX_2^- , noch P^{32} -, noch RaE⁸⁾-Quellen, mit genügend starken Absorbieren bedeckt, in merklichem Ausmasse 500 keV Annihilationsstrahlung aussenden, spricht aber

¹⁾ FELDMEIER u. COLLINS, Phys. Rev. **58**, 200, 1940.

²⁾ ALICHANOW ALICHANIAN und KOSODAEW, Journ. de phys. **7**, 163, 1936.

³⁾ CRANE u. HALPERN, Phys. Rev. **55**, 838, 1939.

⁴⁾ STAUB, Helv. Phys. Acta **9**, 306, 1936.

⁵⁾ SEN GUPTA, Proc. Phys. Soc. **51**, 355, 1939.

⁶⁾ BRADT u. SCHEREER, Helv. Phys. Acta **14**, 319, 1941.

⁷⁾ CHIEN-SHIUNG-WU, Phys. Rev. **59**, 481, 1941.

⁸⁾ STAHEL u. GUILLISSEN, Journ. de phys. **1**, 12, 1940.

Die Resultate von CHIEN-SHIUNG-WU u. von STAHEL und GUILLISSEN sind von diesen Autoren nicht in bezug auf die hier interessierende Frage diskutiert worden.

nicht nur gegen die behauptete „Anomalie“ der Paarerzeugung durch Elektronen: er beweist überdies, dass diese radioaktiven Körper keine Positronen — wie diese auch immer entstanden sein mögen — im Ausmasse $(10^{-3}—10^{-2}) e^+/\text{Zerfall}$ emittieren. Um ein Beispiel anzuführen: Bei einer Emissionsrate von $0,9 \cdot 10^{-2} e^+/\text{Zerfall}$ des P^{32} (dies ist die Emissionsrate der positiven Spuren einer P^{32} -Quelle nach Sizoo, Barendregt und Griffioen) müsste eine mit einem Absorber bedeckte P^{32} -Quelle eine neunmal grössere Energie in Form von Annihilationsstrahlung als in Form von innerer Bremsstrahlung aussenden und die Absorptionskurve der vom P^{32} ausgehenden γ -Strahlung müsste praktisch exponentiell mit dem, einer 500 keV- γ -Strahlung entsprechenden, Absorptionskoeffizienten abfallen. Davon ist gar keine Rede: Intensität wie Absorbierbarkeit deuten in der γ -Strahlung neben der Bremsstrahlung keine andere Komponente an.

4. Die naheliegendste Methode zum Nachweis einer Positronen-Emission der β -Strahler besteht in der räumlichen Trennung der positiven von den negativen Elektronen durch Fokussierung im magnetischen Feld. Im β -Spektrographen (magnetische Halbkreisfokussierung) ist die Positronenemission des RaC und des Th(C + C'') von Alchanow, Alchanian und Kosodaew untersucht worden, welche bei beiden Körpern nur eine Positronen-Emissionsrate von $(2—4) \cdot 10^{-4} e^+/\text{Zerfall}$ feststellen konnten, eine Emissionsrate also, die von der Grössenordnung der berechneten Paarkonversions-Wahrscheinlichkeit der harten γ -Strahlung dieser Körper ist.

Wir haben mit dem in einer früheren Arbeit¹⁾ beschriebenen β -Spektrographen eine Positronenemission des RaE und des UX₂ — bei denen keine γ -Paarkonversion in Betracht zu ziehen ist — nachzuweisen versucht. Das einwandfreie Arbeiten des Spektrographen war mit den Elektronen des RaE und UX₂ und den Positronen des Radiostickstoffs N¹³ geprüft worden. Trotz mehrfach variierten Versuchsbedingungen haben wir keine Andeutung einer Positronenemission feststellen können. Wenn also eine solche beim RaE und UX₂ überhaupt vorhanden ist, so müsste diese sehr viel seltener sein, als es die Wilsonkammer-Aufnahmen zu zeigen scheinen. Beim UX₂ muss nach dem Ergebnis unserer spektrographischen Messung die Positronen-Emissionsrate n^+ sicher kleiner sein als etwa $3 \cdot 10^{-4}$:

$$n^+ \lesssim 3 \cdot 10^{-4} e^+/\text{Zerfall}$$

Die zum Nachweis einer vom UX₂ ausgehenden Annihilationsstrahlung unternommenen Versuche führten zu einer Abschätzung der gleichen Grössenordnung.

¹⁾ BRADT, HEINE u. SCHERRER, Helv. Phys. Acta **16**, 455, 1943.

III. Diskussion der Deutung der „positiven“ Wilsonkammer-Spuren.

Die Evidenz gegen das Ergebnis der Wilsonkammer-Untersuchungen scheint nach dem Vorangehenden in der Tat erdrückend zu sein. Andererseits — wir wiesen am Schlusse des ersten Abschnitts darauf hin — sind die positiven Spuren in der Wilsonkammer nicht einfach wegzuleugnen. Die im vorangehenden Abschnitt dargelegten Tatsachen beweisen jedenfalls, dass, wenn die beobachteten positiven Spuren die Bahnen positiv geladener, von den β -Strahlern emittierter Teilchen sind, diese Teilchen keine Positronen sein können. Die unter II/1—3 angeführten Tatsachen (Existenz der positiven Spuren, ihr anomales Durchdringungsvermögen, Fehlen von 500 keV-Annihilationsstrahlung) wären z. B. nicht mehr als einander widersprechend anzusehen, wenn wir die fraglichen Spuren als Bahnen von Teilchen, welche einige Male leichter sind als das Elektron, betrachten dürften. Spuren solcher Teilchen wären in der Wilsonkammer von den Spuren schneller Positronen kaum zu unterscheiden. Diese Teilchen wären natürlich energiereicher und daher durchdringender als Elektronen gleichen Impulses, die gleich stark gekrümmte Spuren erzeugen. (Die Energiewerte der Diagramme von Fig. 2 und Fig. 3 sind aus den gemessenen $(H\rho)$ -Werten für Teilchen mit Elektronenmasse berechnet; für kleinere Massenwerte würden sie sich beträchtlich vergrössern.) Damit würde das Argument, das so zwingend die „Anomalie“ der Paarerzeugung durch Elektronen zu zeigen schien, hinfällig werden: die grosse Durchdringungsfähigkeit wäre nicht nur eine scheinbare.

Da sich kein anderer Ausweg zeigte, um die einander sonst absolut widersprechenden Beobachtungen zu vereinbaren, schien es nicht ganz abwegig, der erläuterten, an sich ja sehr unwahrscheinlichen *Arbeitshypothese* einmal nachzugehen. Sie fand eine direkte Stütze in der Beobachtung, dass das $(H\rho)$ -Spektrum der positiven Spuren beim RaE sich bis zu Werten erstreckt, die für Teilchen von Elektronenmasse einer oberen Grenze des Spektrums von mindestens 250 keV entsprechen (Fig. 2). Die obere Grenze des RaE- β -Spektrums liegt bekanntlich bei 1,17 MeV¹⁾, und da RaE keinerlei Kern- γ -Strahlung emittiert ist dies die ganze beim β -Zerfall zur Verfügung stehende Energie. Für die Ruhmasse eines beim β -Zerfall ausgesandten „Paares“ entgegengesetzt geladener, leichter Teilchen (ein Zerfall des RaE unter alleiniger Emission eines Positrons ist offenbar unmöglich) bliebe demnach nur ein Betrag von allerhöchstens $(1,17 - 0,25) \text{ MeV} = 0,92 \text{ MeV}$ übrig, während die

1) FLAMMERSFELD, Zeitschr. f. Physik **112**, 727, 1939.

Ruhenergie eines Elektronenpaares 1,02 MeV beträgt. Sind die positiven RaE-Spuren Bahnen positiver Teilchen, welche mit einem negativen Partner zusammen beim β -Zerfall des RaE ausgesandt werden, so zeigt allein der Energiesatz, dass diese Teilchen dann eine kleinere Ruhmasse als das Elektron besitzen müssen.

Gegen diese Arbeitshypothese sprechen überzeugende Einwände theoretischer Art. Auch lässt sie das Resultat der spektrographischen Messungen nicht verständlich erscheinen.

IV. Koinzidenz-Untersuchungen zum Nachweis einer „Paar“-Emission des ThC'', UX₂ und RaE.

Es stellte sich die Aufgabe, zu prüfen, ob eine paarweise Emission entgegengesetzt geladener leichter Teilchen durch β -Strahler sich mit anderen Hilfsmitteln als der Wilsonkammer nachweisen liesse. Eine spezifische Nachweismethode ist gegeben, wenn man bedenkt, dass bei solchen Paar-Emissionsprozessen nicht nur (wie z. B. bei der „Internal Conversion“) zwei, sondern drei Teilchen gleichzeitig vom Atom ausgesandt werden, nämlich die beiden Partner des Paares und das Zerfallselektron. Diese Methode besteht also in der Registrierung von *Dreifachkoinzidenzen*¹⁾ dreier, bezüglich der β -aktiven Quelle symmetrisch angeordneter β -Zählrohre (Fig. 4).

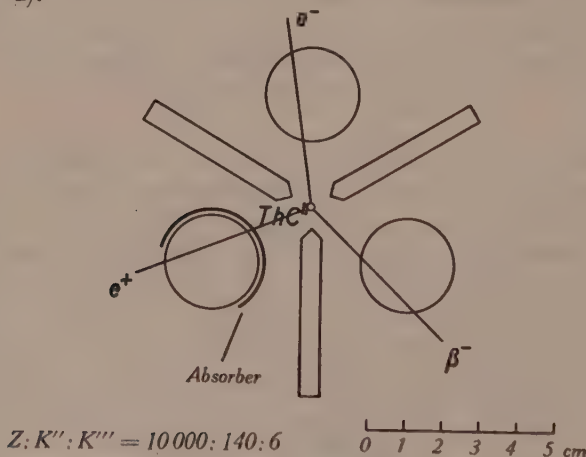


Fig. 4.

$Z:K'':K'''$ ist das Verhältnis von Einzelstößen, Zweifach- und Dreifachkoinzidenzen mit ThC''-Quelle, extrapoliert für verschwindende Zählrohrwandstärke ($\Omega/4\pi = 0,081$). Die Einzelstosszahl war bei den ca. 100 mit ThC'' ausgeführten

Messreihen für $t = 0$ von der Grössenordnung (10000–20000) Stösse/min.

¹⁾ Beschreibung der Apparatur bei BRADT u. SCHERRER, *Helv. Phys. Acta* **16**, 251, 1943.

Durch solche Dreifachkoinzidenzmessungen haben wir mit ThC'' - und UX_2 -Quellen eine „Paar“-Emission (gleichzeitige Emission zweier geladener Teilchen zusammen mit dem Zerfallselektron) tatsächlich nachweisen können.

Das Durchdringungsvermögen der die ThC'' -Dreifachkoinzidenzen auslösenden Partikel, das durch Absorptionsmessungen der Zweifach- und Dreifachkoinzidenzen mit reinen ThC'' -Quellen bestimmt wurde, ist so gross, dass diese „Paar“-Emission sicher nicht der Elektronenhülle (Augereffekt usw.), sondern dem ThC'' -Kern zugeordnet werden muss. Der aus Absorptionsmessungen zu entnehmende Absorptionskoeffizient dieser Teilchen ist von der Grössenordnung $7 \text{ cm}^2/\text{gr Al}$ (siehe Fig. 3b); diese Absorbierbarkeit ist völlig unvereinbar mit einer dem Spektrum der $\text{RaB-}\beta$ -Strahlen vergleichbaren Energieverteilung. Sie ist dagegen nicht unvereinbar mit den Resultaten der Wilsonkammer-Absorptionsmessungen.

Das Verhältnis der Rate der ThC'' -Dreifachkoinzidenzen zur korrigierten Rate der Zweifachkoinzidenzen (welch letztere vor uns auch von BENEDETTI¹⁾ gemessen worden ist), extrapoliert auf verschwindende Zählrohrwandstärke, ist von der Grössenordnung des relativen von Quelle und Zählrohr aufgespannten Raumwinkels, wie es erwartet werden muss, wenn die beobachteten Koinzidenzen durch „Paar“-Emissionsprozesse ausgelöst werden. Die sich aus den Koinzidenzmessungen ergebende ThC'' -„Paar“-Emissionsrate von $3 \cdot 10^{-2}$ (Anzahl der pro Zerfall ausgesandten „Paare“) ist von der gleichen Grösse wie die von CHADWICK, BLACKETT u. OCCHIALINI mit der Wilsonkammer beobachtete, auf reines ThC'' bezogene Emissionsrate positiver Spuren.

Bei Benutzung sehr dünnwandiger Zählrohre wurden Dreifachkoinzidenzen auch mit UX_2 -Quellen beobachtet, hingegen nicht mit RaE -Quellen. Das Durchdringungsvermögen von mindestens einem der diese Koinzidenzen auslösenden Partikel ist wesentlich geringer als beim ThC'' . Auch ist die relative Häufigkeit der mit $12 \mu\text{Al}$ -Zählrohren registrierten Dreifachkoinzidenzzahl etwa 30mal kleiner, entsprechend (unter Berücksichtigung der Absorption) einer „Paar“-Emissionsrate von $\geq 2 \cdot 10^{-3}$. Dies und die sehr grosse Absorbierbarkeit der UX_2 -Dreifachkoinzidenzen lässt es nicht als unmöglich erscheinen, die Auslösung dieser Koinzidenzen durch Hülleneffekte zu erklären. Werden sie jedoch durch Paar-Emissionsprozesse des Atomkerns ausgelöst, so ist der Grössenordnung nach Übereinstimmung mit der Wilsonkammer vorhanden.

¹⁾ BENEDETTI Journ. de phys. I, 265, 1940.

Das Ergebnis von *Koinzidenzmessungen mit RaE, AcC''* und P^{32} lässt nicht (zumindest nicht mit Sicherheit) auf eine „Paar“-Emission schliessen.

V. Zusammenfassung.

Die Diskussion dieses Berichts¹⁾ zusammenfassend ist somit folgendes Ergebnis festzuhalten:

1. Eine „Anomalie“ der Paarerzeugung durch Elektronen ist ebensowenig vorhanden wie eine solche der Paarerzeugung durch γ -Strahlen.
2. Es ist bei den natürlichen β -Strahlern, zumindest beim UX_2 und RaE, sowie auch beim Radiophosphor P^{32} keine Emission von Positronen mit einer Häufigkeit der Grössenordnung $(10^{-3} - 10^{-2}) e^+/\text{Zerfall}$ vorhanden.

Diese Resultate, welche die Prüfung der Dirac'schen Theorie des Elektrons betreffen, dürfen unserer Meinung nach als sicher-gestellt betrachtet werden.

3. Eine allen Beobachtungen genügende Deutung der „positiven“ Wilsonkammerspuren kann jedoch noch nicht gegeben werden; die bisher ausgeführten Untersuchungen reichen zu einer Entscheidung nicht aus.

Wir sind Herrn Prof. Dr. E. STAHEL für die Überlassung von radioaktiven Präparaten zu Dank verpflichtet.

Zürich, Physikalisches Institut der E.T.H.

¹⁾ Eine Arbeit, in der die Experimente ausführlicher beschrieben werden, wird später erscheinen.

Untersuchungen an rasch veränderlichen Spektren

von D. Maeder.

(8. IX. 1943.)

Inhalt: Es wird eine Apparatur zur Aufnahme des zeitlichen Verlaufes der Spektren von Hochspannungs-Gasentladungen beschrieben, die mit Drehspiegel und optisch synchronisiertem Impulsgeber arbeitet. Die mit einer solchen Anordnung erreichbare, gegenüber mechanischen Apparaturen wesentlich erhöhte Zeitauflösung wird allgemein diskutiert; im speziellen vorliegenden Fall ist sie von der Grössenordnung 10^{-5} sec.

Versuche an den Dämpfen von AlBr_3 und BCl_3 ergeben unmittelbar nach dem Durchgang einer Entladung intensive Absorption der im UV gelegenen Bandensysteme der Radikale AlBr und BCl , bei einer Lebensdauer der Grössenordnung $1/100$ sec. Im Falle des HgCl_2 ist keine entsprechende Bandenabsorption nachweisbar. Als Ursache des negativen Ergebnisses wird eine ausgesprochene Kurzlebigkeit der HgCl -Radikale festgestellt. Unter Auswertung des Hg-Partialdruckes und des zeitlichen Verlaufes des Emissionsspektrums wird die Lebensdauer des HgCl zu $\sim 10^{-5}$ sec abgeschätzt. Bei analogen Untersuchungen an Chloriden der Kohlenstoffgruppe gelingt der Nachweis schwacher Absorptionsbanden des SiCl -Moleküls. Da dieses Bandensystem über etwa 10^{-3} sec hin beobachtbar bleibt, kann die geringe Intensität hier nicht die Folge besonders kurzer Lebensdauer sein.

Einleitung.

§ 1. Bei spektroskopischen Untersuchungen beobachtet man gewöhnlich miteinander sehr viele gleichartige Elementarprozesse, die ohne irgendeine zeitliche Kopplung nebeneinander ablaufen. Während aber angeregte Atome und Moleküle normalerweise in Zeiten der Grössenordnung 10^{-8} sec wieder verschwinden, können metastabile Zustände und Zwischenprodukte chemischer Reaktionen Lebensdauern von 10^{-3} sec und mehr erreichen, so dass Schaltvorgänge in elektrischen Entladungen bereits eine merkliche Synchronisierung der Einzelprozesse darstellen. In solchen Fällen führt die Untersuchung des zeitlichen Verlaufes des Gesamtspektrums zu neuen Aussagen über die damit verknüpften Elementarvorgänge. So hat wohl erstmals DORGELO⁸⁾ metastabile Zustände des Ne und des Hg nach dem Abschalten einer Entladung spektroskopisch nachgewiesen und Lebensdauern der Grössenordnung 10^{-3} sec gemessen. Es folgten zahlreiche Arbeiten über die Vorgänge im angeregten und ionisierten Hg-Dampf, wobei teilweise das Liniennachleuchten¹⁸⁾ und die Absorption langwelliger Strahlung¹⁴⁾, teilweise auch rein elektrische Nachstrommessungen^{6) 30) 35)} Aussagen über Diffu-

sions- und Rekombinations-Koeffizienten und über metastabile Zustände lieferten. Auch am Cs und A wurden auf Grund des Nachleuchtens Rekombinations-Koeffizienten bestimmt²⁵⁾³⁰⁾. Beim Nachweis kurzlebiger 2-atomiger Radikale durch ihre Absorptionsspektren gelang es MIESCHER²⁸⁾, einen im Emissionsspektrum vermissten Übergang des Radikals AlJ zu finden und bei allen Al-Monohalogeniden, sowie bei BBr die Zuordnung von sonst nur in Emission beobachteten Bandensystemen zum Grundzustand zu bestätigen. OLDENBERG³²⁾ und FROST und OLDENBERG¹³⁾ erhielten mit der gleichen Methode für die freie Hydroxylgruppe in H₂O-Dampf extrem lange ($> 0,1$ sec), in H₂O₂-Dampf jedoch normale Lebensdauer, woraus sie Schlüsse über die mit der OH-Gruppe möglichen Reaktionen zogen. Im Falle des SH-Radikals entdeckten LEWIS und WHITE²⁶⁾ ein neues Banden-Spektrum in Absorption. Weitere Untersuchungen⁹⁾⁴⁵⁾ befassten sich mit der zeitlichen Veränderung bekannter Absorptionsspektren bei kurzdauernder elektrischer Anregung höherer Schwingungs- und Rotationsniveaus, wobei die zum Austausch gegen Translationsenergie benötigten Zeiten gemessen wurden.

Der starke Einfluss der Entladungsbedingungen bei derartigen Versuchen hat zur Folge, dass bei Absorptionsmessungen an besonders schwach absorbierenden oder extrem kurzlebigen Molekülen ausser Druck und Spannung im Entladungsrohr auch die Dauer der Impulse systematisch variiert und die Zeitauflösung wesentlich gesteigert werden müssen. Solche Versuche bilden nun das Ziel der vorliegenden Arbeit*).

Apparatur.

§ 2. *Grundsätzliches über die Dauer der Abschaltung.* Die meisten der in § 1 zitierten Arbeiten über die nach Unterbrechung einer Gasentladung sich abspielenden Vorgänge benützten mechanische Unterbrecher mit Abschalt dauern von 10^{-3} bis 10^{-4} sec. Um die mit einem mechanischen Schalter erreichbare kürzeste Abschalt dauer einer Gleichstrom-Gasentladung abzuschätzen, betrachten wir den Schaltweg d , nach dessen Durchlaufen die Entladung gelöscht ist. U_0 sei die totale Gleichspannung, U_L die Löschspannung des Entladungsrohres, und v die Lineargeschwindigkeit zwischen den Schaltkontakten. Bei funkenlosem Schalten (Näheres bei ¹⁹⁾) muss die Parallelkapazität C so gross dimensioniert sein, dass ihre Auf-

*) s. a. die vorläufige Mitteilung D. MAEDER und E. MIESCHER, *Helv. Phys. Acta* **15**, 511 (1942).

ladegeschwindigkeit $\frac{dU}{dt} = \frac{I}{C}$ (I = Strom durch das Entladungsrohr) anfänglich $< v \cdot 69 \text{ kV/cm}$, später schliesslich $< v \cdot 30 \text{ kV/cm}$ wird²⁰⁾. Die Gasentladung erlischt, sobald

$$\int_0^{\tau} \frac{I}{C} dt \geq U_0 - U_L$$

wird; für das Integral kann man schreiben $\tau \cdot \bar{I} / C$, wobei der mittlere Strom I wegen des charakteristischen Verlaufes der UI -Kennlinien von Glimmentladungen $\ll \frac{1}{2} I_{(t=0)}$ ist, so dass also gelten muss

$$U_0 - U_L \ll \frac{\tau}{2} I_{(t=0)} \cdot \frac{1}{C} < \frac{\tau}{2} v \cdot 69 \text{ kV/cm}.$$

Man erhält als Mindestschaltweg

$$d = \tau \cdot v \gg \frac{U_0 - U_L}{35 \text{ kV/cm}}.$$

Lässt man hingegen die Bildung des Abreissbogens zu, so wird d bedeutend grösser. In jedem Falle hätten sich bei unseren Hochspannungsversuchen Schaltwege von mehreren cm Länge ergeben, was also eine Lineargeschwindigkeit von mehreren 10^5 cm/sec erfordern würde, um $\tau = 10^{-5} \text{ sec}$ zu erhalten. Für Niederspannung (Hg-Bogen mit Glühkathode) hat HAYNER¹⁸⁾ mit einem besonders sorgfältig konstruierten mechanischen Schalter derart kurze Abschaltzeiten tatsächlich erreicht.

Bei Hochspannungsversuchen haben OLDENBERG³²⁾, MIESCHER²⁸⁾, bzw. GRUEBLING¹⁴⁾ u. a. die Abschaltung direkt hochspannungsseitig durch rotierende Schaltsegmente (in den Nulldurchgängen eines primär an technischem Wechselstrom betriebenen Transformators), bzw. durch rotierende Funkenstrecken (teilweise Entladung eines Hochspannungskondensators) vorgenommen. FROST und OLDENBERG¹³⁾ verlegten die Abschaltung in die Primärseite des Hochspannungstransformators mittels eines Thyratrons, dessen Gitterkreis seinerseits mechanisch gesteuert wurde; ebenso DWYER⁹⁾. Allen diesen Schaltmethoden ist gemeinsam

1. dass sich während der Brenndauer kein stationärer Zustand ausbilden kann, und
 2. die Abhängigkeit der Abschaltdauer von der Brenndauer.
- Für die Erreichung kürzester Zeiten bei wohldefinierten Betriebsverhältnissen kam also keine dieser Varianten in Frage.

Ideal wäre ein zeitlich rechteckiger Verlauf der Spannung am Entladungsrohr, wie er von LEWIS und WHITE²⁶⁾⁴⁵⁾ durch mecha-

nische Tastung eines starken Röhrensenders bei schwacher Zeitauflösung ($\sim 10^{-3}$ sec) erhalten wurde. Da die zur Sperrung bzw. Auslösung des Senders benötigten Spannungen immerhin noch von der Grössenordnung 1000 V sind, muss zur Erzielung kürzester Schaltzeiten die mechanische Steuerung doch durch ein elektrisches Tastgerät (im folgenden stets als Impulsgeber bezeichnet) ersetzt werden, das möglichst starr mit der optischen Einrichtung zu synchronisieren ist. Mit einer rein elektrischen Anordnung erzielte COULLIETTE⁶⁾ durch starke Verzerrung einer Sinusschwingung rechteckige Impulse von der hier geforderten zeitlichen Definiertheit, wobei die Leistung allerdings weniger als 100 Watt betrug. Auch mit Kippschaltungen lassen sich nahezu rechteckige Impulse erzeugen^{1) 36)}.

Da aus optischen Gründen (s. § 3) statt der rotierenden Blende ein Polygonspiegel verwendet wurde, erschien es zweckmässig, im Interesse einer genauen Synchronisierung jede mechanische Steuerung des Impulsgebers zu vermeiden. Durch intermittierende Belichtung einer Photozelle über den gleichen Teil des Polygonspiegels, der sich jeweils auch im Hauptstrahlengang befindet, entsteht bereits in der Photozelle ein Stromverlauf von hinreichend rechteckiger Form. Die so erhältlichen Impulse erfolgen zwangsläufig synchron mit der Drehung des Polygonspiegels, wobei sich Abweichungen vom regulären Polygon herausheben. Die Aufgabe des Impulsgebers besteht dann in der formgetreuen Verstärkung der Photoströme auf mehrere 100 Watt Leistung (s. § 4).

§ 3. *Optischer Teil.* Statt der üblichen rotierenden Schlitzblende vor dem Spektrographenspalt wurde in der vorliegenden Arbeit eine Anordnung verwendet, welche mit einer einzigen Aufnahme gleich den ganzen zeitlichen Verlauf des Spektrums liefert. Das zu diesem Zweck von HAYNER¹⁸⁾ angegebene Verfahren (die bewegte Blende ersetzt den Spektrographenspalt) hat den Nachteil, dass in jedem Augenblick nur ein ganz kleiner, der kleinsten noch aufgelösten Zeit proportionaler Anteil des zur Verfügung stehenden Lichtbündels ausgenützt wird. Die deswegen erforderlichen langen Betriebsdauern (mehrere h) erschienen in unserem Falle als untragbar.

Demgegenüber lässt sich durch Abbildung der Lichtquelle über einen Drehspiegel auf den Spektrographenspalt praktisch der volle Lichtstrom auf eine kleine Umgebung des Spektrographenspaltes konzentrieren. Das von der Wasserstofflampe L (Fig. 1) ausgehende Licht durchsetzt zunächst das Absorptionsgefäss A und einen Zwischenspalt S_1 . Die Quarzoptik Q_1, Q_2 bildet den Leuchtfleck von L

möglichst scharf auf S_1 ab, S_1 seinerseits wird durch den Hohlspiegel Sp und den Drehspiegel D scharf auf den — zu S_1 gekreuzten — Spektrographenspalt S_2 abgebildet. Falls das von L ausgehende Strahlenbündel nur durch S_1 merklich beschnitten wird, so ist bei voller Ausleuchtung des Drehspiegels die Ausdehnung der beleuchteten Stelle in Längsrichtung von S_2 durch den HELMHOLTZ'schen Satz festgelegt zu

$$\delta_2 = \frac{\delta_0 \alpha_0}{f_1} \cdot \frac{a}{d}, \quad (1)$$

wobei:

δ_0 = Durchmesser des Leuchtflecks von L .

α_0 = nutzbarer Öffnungswinkel des von L ausgehenden Bündels.

f_1 = Abblendungsfaktor an S_1 (praktisch $\sim 3:1$).

a = Abstand von D bis S_2 .

d = Durchmesser der einzelnen Spiegelflächen von D .

Dreht sich D mit der Winkelgeschwindigkeit ω , so bewegt sich die beleuchtete Stelle mit der Lineargeschwindigkeit $2 a \omega$ dem Spektrographenspalt entlang, und die kleinste eben noch unterscheidbare Zeit wird

$$\tau = \frac{\delta_2}{2 \omega \cdot a}, \text{ nach (1) also } = \frac{\delta_0 \alpha_0}{f_1} \cdot \frac{1}{2 \omega d}. \quad (2)$$

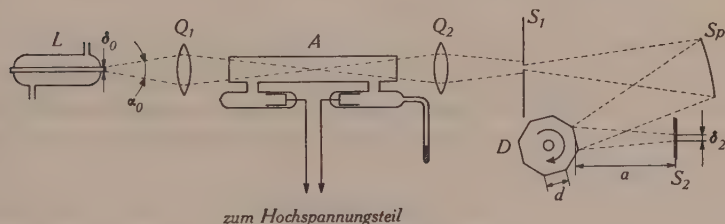


Fig. 1.

Optische Anordnung.

Da τ zugleich die Belichtungsdauer jeder Stelle von S_2 bei einem einzelnen Spiegeldurchgang darstellt, so wird die effektive Belichtungsdauer bei periodischer Wiederholung des Vorganges

$$t_{\text{eff}} = \tau \frac{\omega Z}{2\pi} t = \frac{\delta_0 \alpha_0}{f_1} \cdot \frac{Z}{4\pi d} \cdot t \quad (3)$$

wenn t die totale Betriebsdauer, Z die Polygonzahl bedeutet. Für eine vorgegebene optische Anordnung L, Q_1, A, Q_2, S_1 , d. h. bei

festem Wert von $(\delta_0 \alpha_0 / f)$, ergeben sich aus (2) und (3) also die folgenden Anforderungen an den Drehspiegel:

a) *Hohes Zeitauflösungsvermögen* erfordert eine grosse Drehgeschwindigkeit eines voll ausgeleuchteten, möglichst *grossen* Drehspiegels; Z spielt keine Rolle.

b) *Hohe relative Belichtungszeit* t_{eff}/t und damit kurze totale Betriebsdauer erhält man mit einem Polygonspiegel mit möglichst *vielen kleinen* Einzelspiegeln; ω spielt keine Rolle.

Bei der praktischen Ausführung des Drehspiegels wurde $Z = 8$ gewählt und bezüglich der Grösse der einzelnen Spiegelflächen mit $d = 2$ cm ein Kompromiss zwischen den beiden Forderungen a) und b) geschlossen. Als spiegelnde Flächen dienten 2 mm starke, aluminisierte Glasplättchen. Der Stahlkörper des Polygonspiegels wurde starr mit der Achse eines kleinen Synchronmotors verbunden und erhielt noch zwei zusätzliche Kugellager, um mechanische Erschütterungen zu vermeiden. Drehstrom wählbarer Frequenz stand zur Verfügung und erlaubte eine stetige Variation der Drehspiegel-Tourenzahl von etwa 40 bis 2500 Umdr./min.

Durch das verwendete optische System $L \dots S_1$ war praktisch $\delta_0 \alpha_0 \sim 0,015$ cm festgelegt. Mit $f_1 = 3 : 1$ errechnet man aus (2) die folgenden Werte für die kürzeste auflösbare Zeit:

$$\begin{array}{ll} n = & 40 \text{ Umdr./min} & \tau \sim 30 \cdot 10^{-5} \text{ sec} \\ & 2500 & 0,5 \cdot 10^{-5} \end{array}$$

Unabhängig von n ergibt sich gemäss (3) die relative Belichtungszeit zu $t_{\text{eff}}/t = 0,0016$. Praktisch war für eine Absorptionsaufnahme eine Betriebsdauer von etwa $t = 15$ min erforderlich, was also $t_{\text{eff}} = 1,5$ sec entspricht.

Der verwendete Spektrograph war ein Quarzprismenapparat mittlerer Dispersion. Durch genügend grossen Abstand des Drehspiegels vom Spektrographenspalt ($a = 34$ cm) liess sich erreichen, dass das von D herkommende Lichtbündel während der ganzen Verschiebung längs S_2 zum grösseren Teil innerhalb der Spektrographenöffnung (ca. $1 : 11$) blieb; infolgedessen war der Helligkeitsabfall gegen die Enden von S_2 hin unbedeutend.

Als Absorptionsgefässe dienten Rohre aus Quarzglas von 50 bzw. 60 cm Länge und 2 cm Durchmesser. Die Elektroden aus Reinnickel befanden sich in seitlichen Ansätzen, die je 5 cm von den Rohrenden entfernt waren. Die Stromzuführung erfolgte über Wolfram-Pyrex-Einschmelzungen mit Übergangsstücken auf Quarz, weitere Ansätze aus Pyrex enthielten den Substanzvorrat.

Die Steuerung der Entladungen im Absorptionsrohr erfolgt durch eine Photozelle, die von einer niedervoltigen 50-Watt-Lampe über den Drehspiegel intermittierend belichtet wird (vgl. § 2). Gemäss Gleichung (2) muss für den Hilfsstrahlengang

$$\frac{\delta' \alpha'}{f'} = \frac{\delta_0 \alpha_0}{f_1}$$

gemacht werden, damit die kleinsten auflösbaren Zeiten im Haupt- und im Hilfsstrahlengang übereinstimmen. Dies erforderte die Einführung eines Zwischenspaltes ($f' \sim 5$), der dann über den Drehspiegel auf eine rechteckige Blende unmittelbar vor der Photozelle abgebildet wurde. Lampe, Zwischenspalt und Linsen bildeten eine konstruktive Einheit, so dass durch deren Verstellung eine bequeme Einstellmöglichkeit der Phasenlage während des Betriebes gegeben war.

§ 4. *Impulsgeber.* Eine PRESSLER-Tonfilmzelle ergab an einem Arbeitswiderstand von 50 k Ω praktisch rechteckige Spannungsschüsse von der Grössenordnung 0,1 V. Die leistungsmässig rund 10^9 -fache Verstärkung dieser Impulse auf 3 kV (bei etwa 150 mA maximaler Stromentnahme) war unter möglichster Beschränkung auf schon vorhandenes Material durchzuführen; insbesondere standen für die Stufen höherer Leistung nur ältere Trioden zur Verfügung.

Für die Dimensionierung des Verstärkers sind die höchsten Frequenzen massgebend, die in der FOURIER-Zerlegung der zu verstärkenden Signale enthalten sind. Das FOURIER-Spektrum eines rechteckigen Impulses bricht nun bekanntlich nur sehr langsam ab; man kann das nach Massgabe des bei allen Verstärkerarten ähnlichen, resonanzkurvenartigen Frequenzganges³⁸⁾ modifizierte Frequenzgemisch zwar sofort angeben, das Wiederzusammensetzen zu einer geschlossenen Darstellung des verzerrten Impulses ist aber ziemlich umständlich. SCHLESINGER⁴¹⁾ diskutiert nach dieser Methode die Verschleifung des HEAVISIDE'schen Einheitsstosses durch den mehrstufigen Widerstandsverstärker; er gibt eine recht komplizierte allgemeine Formel für den verzerrten Stoss an, die jedoch für höhere Stufenzahlen nicht direkt auswertbar ist. Im folgenden soll das Verhalten einer Verstärkerkette gegenüber plötzlichen Schaltvorgängen auf direktestem Wege hergeleitet werden.

Die Kopplungskapazitäten dürfen für den Schaltvorgang als Kurzschlüsse angesehen werden, welche Annahme auch in der oben zitierten Arbeit⁴¹⁾ gemacht ist (in der dortigen Bezeichnungsweise

durch die Bedingung $\tau_C \gg \tau_L$); ebenso vernachlässigen wir zunächst auch die Rückwirkungen über die Gitter-Anodenkapazitäten.

Das Ersatzschema der so vereinfachten Verstärkerkette zeigt Fig. 2; sind alle Stufen gleich dimensioniert, so bedeutet

$$R_p = \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_{gi}} \right)^{-1} \quad (4)$$

den Kombinationswiderstand aller zum Ausgang einer Röhre parallel liegenden Widerstände,

$$C_p = C_{ak} + C_s + C_{gk} + 2 C_{ga} \quad (5)$$

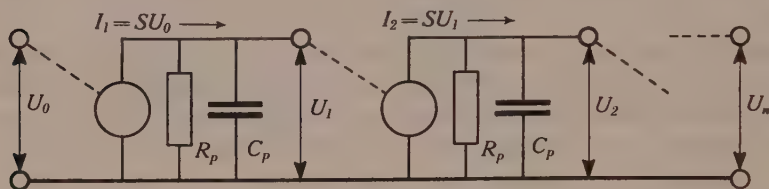


Fig. 2.

Ersatzschema der Verstärkerkette für rasche Vorgänge.

die Gesamtkapazität aller dazu parallel liegenden Kapazitäten; bezüglich der einzelnen Indizes sei auf die einschlägige Literatur verwiesen (vgl. z. B. die oben zitierte Monographie von ROTHE-KLEEN³⁸). Der Term $2 C_{ga}$ bedeutet lediglich, dass sowohl die Gitteranodenkapazität der betreffenden Röhre selbst, als auch diejenige der nachfolgenden Stufe als schädliche Kapazitäten einzurechnen sind; mit der Anodenrückwirkung hat dies noch nichts zu tun. Die n -te Röhre ist in unserem Schema durch eine Stromquelle von der Ergiebigkeit

$$J_n = S U_{n-1} \quad (6)$$

(S = Kurzschlusssteilheit)

ersetzt. Dieser Strom verteilt sich auf R_p und C_p gemäss

$$J_n = \frac{U_n}{R_p} + C_p \frac{dU_n}{dt}$$

(U_n = Spannung über $[R_p \parallel C_p]$ der n -ten Röhre)

Gleichsetzen mit (6) ergibt das System von Differentialgleichungen

$$\frac{dU_n}{dt} = \frac{S}{C_p} U_{n-1} - \frac{U_n}{R_p C_p} \quad (7)$$

($n = 1, 2, 3 \dots$)

$U_0 = U_0(t)$ = dem Gitter der ersten Röhre aufgeprägte Spannung.

Verlangt man, dass zur Zeit $t = 0$ alle $U_n = 0$ sind, so lautet das vollständige Lösungssystem:

$$U_n(t) = \frac{S}{C_p} \int_0^t U_{n-1}(x) e^{-\left(\frac{t-x}{R_p C_p}\right)} dx \quad (8)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$)

Für den speziellen Fall des HEAVISIDE'schen Einheitsstosses

$$U_0 = 0 \text{ für } t < 0, \quad U_0 = 1 \text{ für } t > 0 \quad (9)$$

ergibt sich aus (8)

$$\frac{U_n}{(S R_p)^n} = h_n \left(\frac{t}{\tau_1} \right) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left[1 + \frac{t}{\tau_1} + \frac{1}{2!} \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^{n-1} \right] \quad (10)$$

wobei $\tau_1 = R_p C_p$ = Zeitkonstante der einzelnen Verstärkerstufe.

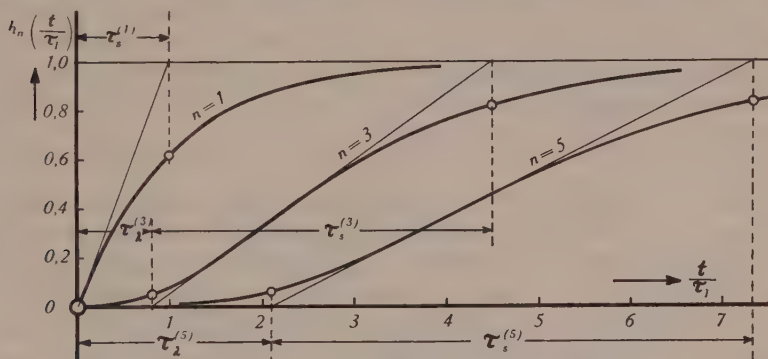


Fig. 3.

Verschleifung des Einheitsstosses beim Durchgang durch 1, 3 und 5 Verstärkerstufen.

Die mittels (10) eingeführte Funktion $h_n(t/\tau_1)$ steigt für $n > 1$ zunächst nur langsam an; ihre grösste Steigung erreicht sie zur Zeit

$$t_w = (n-1) \cdot \tau_1 = (n-1) R_p C_p, \quad (11)$$

weshalb man $n \cdot \tau_1$ als „Zeitkonstante“ des n -stufigen Verstärkers bezeichnen könnte. Hier interessiert aber vor allem die Schaltzeit $\tau_s^{(n)}$, welche wir als das zwischen den Schnittpunkten der Wendetangente mit $h_n = 0$ und mit $h_n = 1$ liegende Intervall definieren wollen:

$$\tau_s^{(n)} = \frac{\tau_1}{h_n'(n-1)} = \tau_1 (n-1)! \left(\frac{e}{n-1} \right)^{n-1} \quad (12)$$

Dieser Ausdruck wird für $n = 1$ identisch mit τ_1 und nimmt mit wachsendem n zunächst annähernd proportional n zu; es ist stets

$$\tau_s^{(n)} < (n + 1) \cdot \tau_1 \quad (13)$$

(für grosse n folgt dies unmittelbar aus der STIRLING'schen Formel). Das Intervall von 0 bis zum Beginn eines merklichen Anstieges nennt SCHLESINGER die Latenzzeit τ_λ , wobei die genaue Definition noch offen gelassen ist. Auf Grund der obigen Definition von $\tau_s^{(n)}$ wäre hier sinngemäss

$$\tau_\lambda^{(n)} = (n + 1) \cdot \tau_1 - \tau_s^{(n)} h_n (n - 1)$$

zu setzen. Die Zeiten $\tau_s^{(n)}$ und $\tau_\lambda^{(n)}$ sind in der graphischen Darstellung des Verlaufes von $h_{1,3,5}(t/\tau_1)$ eingezeichnet (Fig. 3).

Für die Vorverstärkung bis zu einer Amplitude von etwa 100 V standen Pentoden zur Verfügung, so dass die Gitter-Anodenkapazität keine Rolle spielte und C_p zu etwa 30 pF angenommen werden konnte. Mit $R_p \sim 30 \text{ k}\Omega$ liess sich die erforderliche mehr als 10^3 -fache Spannungsverstärkung in 2 Stufen erzielen, wobei die totale Schaltzeit gemäss (12)

$$\tau_s^{(\text{Vorverst.})} = 30 \text{ k}\Omega \cdot 30 \text{ pF} \cdot 2,718 \sim 2,5 \text{ }\mu\text{sec}$$

betrug. Im Prinzipschema des gesamten Impulsgebers und anschliessenden Hochspannungsteils (Fig. 4) sind diese beiden Stufen als „Aperiodischer Vorverstärker“ bezeichnet. Bei den für die weitere Verstärkung zu verwendenden Trioden betrug die Gitter-Anodenkapazität $C_{ga} \sim 10 \text{ pF}$, so dass die kapazitive Anodenrückwirkung nicht mehr zu vernachlässigen ist. Diese wirkt für stationäre Wechselspannungen bekanntlich so, als ob der Leitwert der Parallelschaltung von R_p , C_p annähernd um den mit der komplexen Spannungsverstärkung \mathbf{v} der nachfolgenden Röhre multiplizierten Leitwert von C_{ga} vergrössert wäre³⁹⁾. Die mit (5) eingeführte schädliche Kapazität C_p ist demnach durch

$$C_p' = C_p + C_{ga} \text{Re}(\mathbf{v}) \quad (5a)$$

zu ersetzen*). Für die Umgebung der oberen Grenzfrequenz (wo bekanntlich $\text{Re}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} |\mathbf{v}_{\max}| = \frac{1}{2} S R_p$) wird im praktisch vorliegenden Fall annähernd

$$C_p' \sim (45 + 5 R_{p[k\Omega]}) \text{ pF}, \quad \text{da } S \sim 1 \text{ k}\Omega^{-1}.$$

*) Der Imaginärteil von \mathbf{v} verursacht eine Verkleinerung des Wirkwiderstandes R_p , die wir hier aber ausser acht lassen.

Die noch benötigte etwa 30-fache Spannungsverstärkung liesse sich in 2 Stufen erreichen, wobei die $R_p \sim 6 \text{ k}\Omega$ gemacht werden müssten und sich eine Schaltzeit

$$\tau_s^{(2)} = 6 \text{ k}\Omega \cdot 75 \text{ pF} \cdot 2,718 \sim 1 \text{ }\mu\text{sec}$$

für die beiden Triodenstufen insgesamt ergäbe. Für die Endstufe — eine MT 4*) — ist nun aber die Begrenzung des Spitzenstromes und der mittleren Anodenverlustleistung ausschlaggebend. Der verfügbare Sättigungsstrom würde erst für $R_p \geq 15 \text{ k}\Omega$ die geforderte Spannungsamplitude von 3 kV (bei 150 mA Stromentnahme) erzeugen; die Schaltzeit bliebe auch dann noch genügend klein. Die im Ruhezustand — wegen der Kürze der Impulse also fast dauernd — in der Röhre vernichtete Verlustleistung wäre aber mit 170 W untragbar hoch, weil die Anodenspannung nicht unter den durch die Grenzkennlinie gegebenen Wert von etwa 500 V sinkt. Eine Phasenumkehr durch Verlegung des Arbeitswiderstandes in die Kathodenzuleitung würde das Leistungsproblem bloss auf die Vorrohre abwälzen, falls man nicht sämtliche vorangehenden Stufen aus einer separaten, als Ganzes mitschwingenden Anodenspannungsquelle betreibt. Die damit verbundenen Schwierigkeiten wurden durch das aus der Fernsichttechnik bekannte Trägerfrequenzverfahren⁴²⁾ vermieden.

Der Trägerfrequenzverstärker bietet für die Verstärkung kurzdauernder Impulse folgende Vorteile:

1. Sämtliche Stufen können als *B-* oder *C-Verstärker* mit höchstem Wirkungsgrad betrieben werden.
2. Die Möglichkeit der *Spannungstransformation* erlaubt eine räumliche Trennung der verschiedenen Stufen mittels niederohmiger Übertragungsleitungen ohne zusätzliche Vergrößerung der Schaltzeiten.

Ferner war bei den vorhandenen Röhren eine Anpassung des (kleinen) Eingangswiderstandes der Endstufe an den Ausgangswiderstand der vorangehenden Röhre notwendig, was ebenfalls nur bei Trägerfrequenzverstärkung dank 2. möglich war. Wegen der Notwendigkeit, beide Seitenbänder zu verstärken, verdoppelt sich allerdings bei gleicher Verstärkung die Schaltdauer (vgl. ³⁸⁾ und ⁴¹⁾).

Im Prinzipschema Fig. 4 ist der Triodenteil mit „Leistungsverstärker“ bezeichnet. Die Einführung des Trägers von der Frequenz 10^7 sec^{-1} erfolgte in einer besonderen Modulatorstufe, welche

*) Für die freundliche Schenkung sei Herrn ANSELMi von der „Radio-Suisse“ der beste Dank ausgesprochen.

die gesamte Schaltzeit um etwa $1 \mu\text{sec}$ erhöhte (Pentode vom Typ 6L6). Die Endstufe arbeitete als Demodulator auf einen Kathodenwiderstand von etwa $30 \text{ k}\Omega$; die Erdkapazitäten des Heiztransformators, des Gitterkreises und des über eine Kurzwellendrossel angeschlossenen Hochspannungsteiles genügten zum Aussieben des Trägers, bewirkten aber eine weitere Zunahme der Schaltzeit um etwa $5 \mu\text{sec}$, so dass die Summe der einzelnen Schaltzeiten sich errechnet zu $\sim 10^{-5} \text{ sec}$. Diese Summe kann gemäss (12) und (13) nicht wesentlich von der wirklichen Schaltzeit des gesamten Impulsgebers verschieden sein. Oszillographisch wurden Schaltzeiten der Grösse

$$\tau_s \sim 2 \cdot 10^{-5} \text{ sec}$$

gemessen, die nach den vorstehenden Betrachtungen also je etwa zur Hälfte dem optischen und dem elektrischen Teil zuzuschreiben sind.

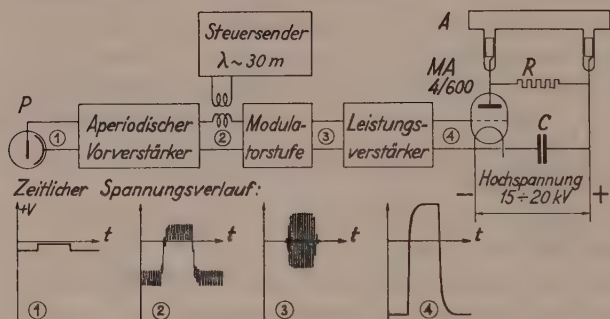


Fig. 4.

Prinzipschema des elektrischen Teils und zeitlicher Spannungsverlauf an verschiedenen Punkten.

§ 5. *Hochspannungsteil.* Die vom Impulsgeber gelieferten Spannungsschüsse gehen an das Gitter einer Triode hoher Leistung, in deren Anodenleitung die Entladungsstrecke des Absorptionsrohres eingeschaltet ist (Fig. 4). Die Anodenspannung wird einem Gleichrichter entnommen, der aus einem 10 kV -Transformator mit primärseitigem Schutz- und Regulierwiderstand, einer Röntgen-Ventilröhre von maximal 300 mA Sättigungsstrom und einer Speicherkapazität von $1,2 \mu\text{F}$ mit auf 15 kV eingestellter Sicherheitsfunkenstrecke besteht. Im Betriebe bleibt die Hochleistungstriode — eine Philips MA 4/600*) — fast dauernd gesperrt, wozu nach den stati-

*) Der Verfasser ist der PHILIPS-Vertretung in Zürich für die langfristige leihweise Überlassung dieser Hochleistungsröhre zu grossem Dank verpflichtet.

schen Charakteristiken bei der höchsten verfügbaren Anodenspannung etwa — 1000 V am Gitter genügen würden (extrapoliert). Die vom Impulsgeber gelieferte negative Ruhespannung ist zur Sicherheit dreimal so hoch gewählt.

Der zur Entladungsstrecke parallelgeschaltete Widerstand R von einigen Megohm bewirkte, dass im stromlosen Zustand praktisch die volle Anodenspannung über der MA 4/600 lag. Durch die kurzdauernden positiven Impulse wurde die MA 4/600 bis zu ihrem Sättigungsstrom von maximal 1,5 Amp (bei 250 W Heizleistung) angesteuert. Dieser Strom lud die Schalt- und Elektrodenkapazitäten auf, derart, dass die gesamte Anodenspannung sich auf die Entladungsstrecke verlagerte. Nachdem diese gezündet hatte, stellte sich innerhalb $10^{-4} \dots 10^{-3}$ sec eine stationäre Spannungsverteilung ein, wobei an der MA 4/600 die Differenz zwischen voller Gleichrichterspannung und Brennspannung der Gasentladung lag. Da diese Differenz selber von der Grössenordnung der Brennspannung war, wurde in der Röhre während der Dauer einer Entladung eine Leistung von 5 bis maximal etwa 10 kW, im Absorptionsgefäss entsprechend eine solche von maximal 10 kW bis 5 kW umgesetzt. Beide Leistungen wurden bei fast gleichbleibenden Spannungen auf das erwünschte Mass eingestellt durch Variieren des der MA 4/600 zugeführten Heizstromes. Die Überlastung der Röhre bis zum 15-fachen der von der Herstellerfirma angegebenen zulässigen Anodenverlustleistung wirkte sich dank der kurzen Dauer des einzelnen Impulses in keiner Weise nachteilig aus. Der während eines Stosses fliessende Momentanstrom liess sich angenähert aus dem mittleren, dem Hochspannungsgleichrichter entnommenen Strom und der relativen Impulsdauer berechnen. Je nach den Betriebsverhältnissen ergaben sich Werte von 0,5...1,2 Amp. Die Speicherkapazität im Gleichrichter war mit $1,2 \mu\text{F}$ so gross dimensioniert, dass die Spannung zwischen zwei Aufladep perioden um höchstens 500 V schwankte.

Während der Aufnahmen wurde die Impulsform mit dem Oszillographen in der Gitterzuleitung der MA 4/600 überwacht. Bei Sättigungsdrucken oberhalb etwa 5 mm Hg zündete die Entladungsstrecke nicht mehr einwandfrei. Eine Erhöhung der Hochspannung auf 19 kV wurde gelegentlich versucht, brachte aber erhebliche Isolationsschwierigkeiten mit sich, indem besonders bei starker Heizung des Absorptionsrohres häufig Durchschläge zum Ofen stattfanden. Ein zuverlässiger Betrieb der Entladung bei merklich höheren Drucken gelang jedoch, wenn die Gleichspannungsanregung durch Hochfrequenz ersetzt wurde. Die MA 4/600 arbeitete dann als selbsterregter, im Gitter getasteter Sender (Fig. 5),

so dass sich eine Änderung des Impulsgebers erübrigte. Die Frequenz war, unabhängig von der Trägerfrequenz des Impulsgebers, im wesentlichen durch die Grösse der Kupferrohrspule L ($3 \mu\text{Hy}$) und durch die Einstellung des Drehkondensators C (Plattenabstand $1,5 \text{ cm}$, Kapazität maximal etwa 70 pF) festgelegt. Dank der Unabhängigkeit von der im Impulsgeber verwendeten Wellenlänge konnte die Ankopplung des Absorptionsrohres ohne Rücksicht auf die Abstimmung vorgenommen, bzw. variiert werden. Die grösste

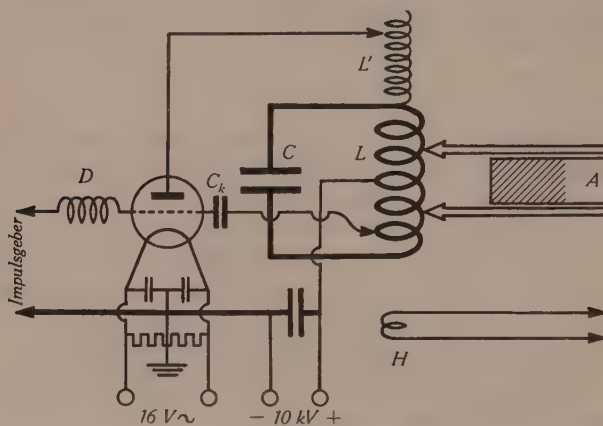


Fig. 5.

Schaltung bei Hochfrequenz-Anregung.

A = Absorptionsrohr, L = Schwingkreisspule, L' = Verlängerungsspule, H = Hilfsspule zum Anschluss des Oszillographen, C = Schwingkreiskapazität, C_k = Rückkopplungskapazität, D = Kurzwellendrossel.

Helligkeit der Gasentladung ergab sich bei Anregung über zwei lange streifenförmige Aussenelektroden, die mittels mehrerer längs des Absorptionsrohres verteilter Glasbügel federnd befestigt, und durch eine kurze, unabgestimmte zweidrähtige Leitung galvanisch mit variablen Spulenabgriffen an den Anodenschwingkreis angekoppelt wurden. Zwecks Vermeidung von Durchschlägen im Schwingkreiskondensator musste die Kopplung jeweils so gross gewählt werden, dass der dieser Belastung äquivalente Schwingkreis-Parallelwiderstand höchstens noch etwa 2000Ω betrug (der Vergleich mit dem Schwingwiderstand $Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \sim 200 \Omega$ liefert dann für das Dämpfungsdekrement Werte von $\vartheta \geq 0,3$). Da die Sättigung der MA 4/600 den Spitzenstrom begrenzte, musste die Röhre zur Ausnützung der hohen zur Verfügung stehenden Anodenspannung mit Überanpassung betrieben werden⁴⁰⁾, wozu die mit L eng gekoppelte Verlängerungsspule L' diente.

Anfänglich bereitete das rasche Abschalten erhebliche Schwierigkeiten, einerseits weil die zum Abstoppen eines Senders benötigte Sperrspannung von vorneherein stets grösser als die statische ist, anderseits, weil im Augenblick des Löschsens praktisch die ganze Belastung des Schwingkreises wegfällt. Der Rückkopplungsfaktor wurde daher durch geeignete Wahl des zu C_k führenden Spulenabgriffes möglichst klein gemacht und während des Betriebes durch Variieren der ziemlich kritischen Kopplungskapazität C_k auf ein Optimum eingestellt, bei dem zwar die Helligkeit der Entladung diejenige bei Gleichstrombetrieb nicht erreichte, dafür aber Fehl- oder Rückzündungen sehr selten vorkamen.

Die Wasserstofflampe wurde an einer 6 kV-Gleichstrommaschine über einen grossen Widerstand mit etwa 0,5 A Dauerstrom betrieben.

Untersuchungsmethodik.

§ 6. Das Absorptionsrohr wurde im elektrischen Ofen unter Glühen der Elektroden zunächst sorgfältig entgast, und das zu untersuchende Salz von einem Hilfsansatz aus in mehreren Stufen in den vorgesehenen Ansatz des Rohres hineinsublimiert. Nach Abtrennung des Hilfsansatzes mit den Sublimationsrückständen wurde auch das Absorptionsrohr von der Pumpe abgeschmolzen. Die so behandelten Rohre zeigten in der Regel auch nach Versuchsreihen mit starker Belastung und Heizung keine Spuren von Fremdgasen.

Wie bereits MIESCHER²⁸⁾ an Al- und B-Salzen festgestellt hat, erfordern die Absorptionsversuche Entladungsströme der Grössenordnung 1 Amp und möglichst hohen Druck der gesättigten Salze. Die neue Methode gestattete, unabhängig von Druck und Stromstärke, auch die Dauer der Entladungsstösse weitgehend zu variieren. Die Phasenlage zwischen Entladung und Absorptionsaufnahme konnte während des Betriebes verändert und auf dem Spektrophenspalte direkt festgestellt und überwacht werden.

Die beim Betriebe der Entladung unvermeidliche Zersetzung des Salzes verursachte einerseits die Abscheidung eines Metallbeschlages auf den Wänden des Absorptionsrohres, der durch zusätzliche Heizung der Rohrenden von den Fenstern ferngehalten wurde, und anderseits eine Veränderung des Substanzdruckes. Durch geeignete Kühlung bzw. Heizung des Rohransatzes liess sich ein Gleichgewichtszustand, bei maximal etwa 10 mm Hg-Druck, meist über die volle Betriebsdauer einer Aufnahme aufrechterhalten (10 . . . 20 min); stärkeres Strömenlassen des gesättigten Dampfes mittels 2 Ansätzen hatte keine verstärkte Absorption zur Folge.

Zwecks Steigerung des zulässigen Höchstdruckes liess sich eine Erhöhung der Gleichspannung von 14 auf 19 kV wegen der Isolationschwierigkeiten nur bei den ohne Ofen zu betreibenden Substanzen durchführen; durch konstanten Betrieb einer nur schwach leuchtenden Hilfs-Hochfrequenzentladung mittels Aussenelektroden war ferner noch eine zusätzliche Drucksteigerung möglich. Bei den zu heizenden Substanzen stand als wirksames Mittel zur Erreichung höherer Drucke nur der Betrieb der Entladung mit Hochfrequenzimpulsen zur Verfügung, wobei sich infolge des kleineren Elektrodenabstandes die Zündspannung beträchtlich erniedrigte (§ 5).

Gelegentliches Nichteinsetzen der Zündung bei hohem Druck hat keinen merklichen Einfluss auf die Beobachtbarkeit einer etwaigen Bandenabsorption. Dagegen können Rückzündungen, wie sie bei starken Spannungsschwankungen des Netzes vorkamen, ein Nachleuchten vortäuschen. In manchen Fällen zeigten aber auch Aufnahmen mit weniger als 1⁰/₁₀₀ Rückzündungen (Kontrolle mittels Kathodenstrahloszillograph) starkes Nachleuchten. Dass dieses reell sein muss, zeigen Aufnahmen, die gleichstarke Linien von eindeutig sehr verschiedener Lebensdauer enthalten (§ 9).

Ergebnisse.

§ 7. *BCl* und *AlBr*. Die im nahen UV gelegenen Bandensysteme der Borhalogenide BCl und BBr sind in Emission von verschiedener Seite untersucht und in beiden Fällen als $^1\Pi - ^1\Sigma^+$ -Übergänge gedeutet worden^{17) 29) 37)}, wobei der $^1\Sigma^+$ -Term den Grundzustand des zweiatomigen Radikals darstellt. Eine direkte Bestätigung dieser letzteren Annahme durch Untersuchung in Absorption gelang MIESCHER²⁸⁾, der seine Abschaltversuche allerdings auf den Dampf von BBr₃ beschränkte.

Die im Verlaufe der vorliegenden Arbeit unternommenen Versuche ergaben nun für das Molekül BCl völlig analoge Resultate und dienten zugleich zur Prüfung der neuen Apparatur. Auf Fig. 6 sind der scharfe Emissionsabbruch und die unmittelbar daran anschliessende Absorption deutlich zu erkennen; um den ganzen zeitlichen Verlauf bis zum Verschwinden der Absorption auf eine einzige Aufnahme zu bringen, musste das Auflösungsvermögen stark reduziert werden, was durch Betrieb des Drehspiegels mit 75 T/min (statt normal 1500 T/min) geschah. Ausser dem BCl-System sind in Emission noch SiCl-Banden und Si-Linien vorhanden, die von der Reaktion des bei der Entladung freiwerdenden Cl mit den Ge-

fässwänden herrühren; die Aufnahme wurde ohne merkliches Strömen von BCl_3 gemacht. In Absorption lässt sich die 0,0-Bande des BCl-Systems bis etwa $2 \cdot 10^{-3}$ sec nach dem Abschalten verfolgen, die übrigen Banden der Gruppen $\Delta v=0, +1$ mit geringerer Intensität etwas weniger lang. Erwartungsgemäss zeigen die Gruppen $\Delta v = -1, -2, \dots$ nur sehr schwache, rasch verschwindende Absorption.

Bei voller Zeitauflösung ergab die Apparatur bereits $2 \cdot 10^{-5}$ sec nach dem Abschalten starke Absorption. Die Intensität war nach Entladungen der Dauer $3 \cdot 10^{-3}$ sec etwa 5mal höher als nach solchen der Dauer $0,2 \cdot 10^{-3}$ sec, was mit der beobachteten Lebensdauer der Absorption von etwa 10^{-3} sec in Einklang steht.

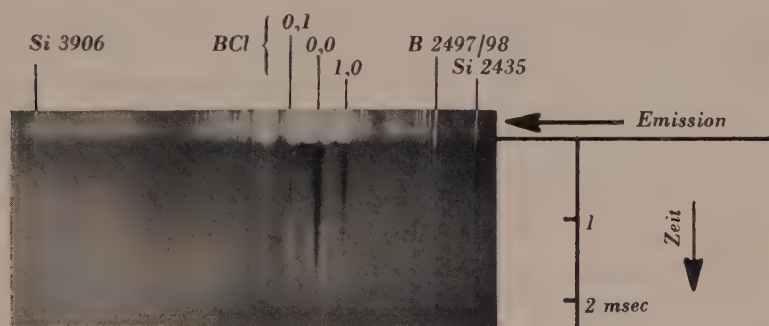


Fig. 6.

Emissionsabbruch und Absorptionsspektrum BCl.

Die vom Niveau $v'' = 0$ ausgehenden Banden erscheinen etwa 2 msec lang in Absorption, das Nachleuchten der BCl-Banden und der meisten Si-Linien dauert noch erheblich länger an.

Als sich später, anlässlich der Untersuchung des HgCl , der Betrieb des Absorptionsrohres mit Hochfrequenzimpulsen als wünschenswert erwies, wurden Probeversuche am Dampf von AlBr_3 unternommen. Wie bei den MIESCHER'schen Versuchen mit direkter Anregung über Innenelektroden trat auch hier das $^1\Pi - ^1\Sigma$ -Bandensystem des AlBr bei 2800 Å in Absorption wiederum bei hohem Druck und kräftiger Entladung am intensivsten auf, wobei der maximal erreichte Druck allerdings hier noch merklich höher als in der zitierten Arbeit liegen dürfte. Die während der einzelnen Entladungen im Absorptionsrohr vernichtete Hochfrequenzleistung ergab sich aus der Erwärmung des Ofens zu rund 2 kW. Die Impulsdauer hatte bei Variation zwischen 0,3 und 6 msec gleichartigen Einfluss auf die Absorptionsintensität wie bei BCl; bei Impulsen von der Länge 1 msec begann die Selbstumkehr der Emission be-

reits merklich zu werden, und bei 6 msec Dauer verschwand das Emissionsspektrum noch vor dem Abschalten überhaupt unter der intensiven Absorption.

Bei allen bisher beschriebenen Versuchen verursachten gelegentliche Fehlzündungen bzw. ein schwaches Nachleuchten (auf der BCl-Aufnahme Fig. 6 erkennbar) keine wesentliche Beeinträchtigung der Absorptionsbeobachtungen.

§ 8. *Quecksilberchlorid.* HgCl_2 zerfällt bei elektrischer, wie auch bei optischer Anregung in $\text{HgCl}^* + \text{Cl}$; nach WIELAND⁴⁷⁾ gehören zu diesem Vorgang 3 Absorptionskontinua im Schumann-Gebiet, die zu 3 mit *B*, *C*, *D* bezeichneten angeregten Zuständen des HgCl führen. Die angeregten HgCl -Radikale emittieren dementsprechend 3 Bandensysteme *B* (5700 ... 3000 Å), *C* (2900 ... 2700 Å), *D* (2650 ... 2400 Å), welche sowohl in Fluoreszenz, als auch im Geissler-Rohr⁴⁶⁾ 49) 5) und teilweise in Chemilumineszenz¹⁶⁾ beobachtet worden sind. Aus der Gleichheit der Wellenzahlenabstände zwischen den 3 Schumann-Absorptionsgebieten mit denjenigen zwischen den 3 entsprechenden Fluoreszenzbandensystemen *B*, *C*, *D* folgt, dass die letzteren zu einem gemeinsamen unteren Zustand des HgCl führen.

Das Bandensystem *D* wurde dank seiner gut ausgeprägten Bandenstruktur schon früh analysiert⁴⁶⁾. CORNELL⁵⁾ hat später die Untersuchung mit grösserer Dispersion durchgeführt und gibt als Daten des unteren Zustandes: $\omega_e'' = 293,4 \text{ cm}^{-1}$, $x_e'' \omega_e'' = 1,82 \text{ cm}^{-1}$. Die obere Potentialkurve verläuft beinahe parallel der unteren, die entsprechende Atomtermdifferenz muss daher nahezu $= \nu_{0,0}$ sein. In der Tat ist dies der Fall für die Hg-Resonanzlinie; der obere Zustand dissoziiert somit in $\text{Hg}^*(^3\text{P}_1) + \text{Cl}$, der untere in unangeregte Atome. Dass es sich tatsächlich um einen Übergang zum Grundzustand handelt, wird bestätigt durch die gute Übereinstimmung der Energiedifferenz zwischen Schumann-Absorptionsgebiet und zugehörigem Fluoreszenzspektrum mit dem Ergebnis thermochemischer Rechnungen von SPONER⁴³⁾. Für den unteren Zustand des Systems *C* fand CORNELL merklich andere Werte ω_e , $x_e \omega_e$, die Richtigkeit seiner Kantenformel wird jedoch von WIELAND⁴⁹⁾ aus mehreren Gründen in Frage gestellt; Vergleiche mit verwandten Spektren liessen auch hier auf einen Übergang zum Grundzustand schliessen, wobei der obere Zustand in $\text{Hg}^*(^3\text{P}_0) + \text{Cl}$ dissoziieren dürfte.

Das langwellige System *B* zeigt eine äusserst komplizierte Struktur. Indessen gelang es kürzlich WIELAND⁴⁹⁾, das Fluoreszenzspektrum durch Fremdgaszusatz und durch Verwendung ge-

trennter Cl-Isotopen soweit zu vereinfachen, dass eine eindeutige Analyse möglich wurde. Für den unteren Zustand ergaben sich die Werte

$$\omega_e'' = 292,6 \text{ cm}^{-1}, \quad x_e'' \omega_e'' = 1,60 \text{ cm}^{-1}, \quad r_e'' = 2,5 \text{ Å}, \quad D'' = 1,04 \text{ V},$$

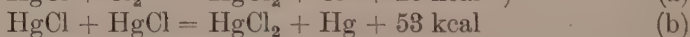
welche befriedigend mit den weiter oben angegebenen Daten von CORNELL übereinstimmen. Aus Analogie mit CdCl und ZnCl wird auch hier auf einen $^2\Sigma^+$ -Grundterm geschlossen. Wegen der beträchtlichen Verschiebung der oberen Potentialkurve nach grösseren Kernabständen hin ($r_e' = 3,15 \text{ Å}$) erreicht das Spektrum *B* in Emission seine grösste Intensität bei den längeren Wellen; aus dem gleichen Grunde wäre etwaige Absorption vorwiegend am kurzwelligen Ende, also bei etwa 3000 Å, zu erwarten.

In der vorliegenden Arbeit wurde nun versucht, die Spektren *B*, *C*, *D* in Absorption zu erhalten, um die Deutung als Übergänge zum Grundzustand des HgCl-Radikals bestätigen zu können. Die seinerzeit von MIESCHER²⁸⁾ mit der mechanischen Abschaltapparatur unternommenen Versuche hatten zwar keine Absorption gebracht, das negative Ergebnis konnte jedoch von einer Anreicherung von Hg-Dampf in der Entladungsstrecke herrühren. Die neue Untersuchung wurde daher — abgesehen von der wesentlich erhöhten Zeitauflösung — vor allem im Hinblick auf die vermehrten Variationsmöglichkeiten der Entladungsbedingungen durchgeführt. Zunächst ergab die normale Schaltung mit Gleichstromanregung über Innenelektroden eine starke Abhängigkeit des Emissionsspektrums von der Dauer der Impulse. Alle 3 Systeme zeigten während einiger 10^{-5} sec scharfe Bandenstruktur, welche sich bereits innerhalb der darauffolgenden 10^{-4} sec verwischte, und zwar um so stärker, je höher die Stromstärke gewählt war; nach 10^{-3} sec waren sie nur noch als scheinbare Kontinua zu erkennen. Gleichzeitig wurden die Hg-Linien intensiver, und bei kontinuierlichem Betrieb bestand das Spektrum praktisch überhaupt nur aus Hg-Linien. Die ganze Erscheinung dürfte auf die Anregung höherer Schwingungs- und Rotationsniveaus (bis zur schliesslichen Dissoziation) der oberen Zustände des HgCl durch die nur allmählich zu genügender Energie gelangenden Ionen zurückzuführen sein.

Zahlreiche Absorptionsversuche wurden daher mit Hochfrequenzanregung durchgeführt, wobei erwartungsgemäss die Emissionsbanden, unabhängig von der Impulsdauer, vollkommen scharf blieben, und die Intensität der Hg-Emissionslinien stark zugunsten der Bandensysteme zurücktrat. Nach dem Abschalten des intensiven Emissionsspektrums war jedoch in keinem Falle Bandenabsorption nachzuweisen, insbesondere weder in der Gegend um

3000 Å noch bei dem auch in Emission stets schwachen System *C*. Eine sehr schwache Absorption des Bandensystems *D* ist nicht vollkommen ausgeschlossen, da sie durch ein Nachleuchten von 10^{-4} sec Dauer verdeckt sein könnte. Ausserdem machte sich im Bereich des Systems *D* bei den mit der Hochfrequenzentladung erreichbaren höheren Drucken bereits eine kontinuierliche Absorption störend bemerkbar, die vom fernen UV bis etwa 2500 Å reichte und wohl dem HgCl_2 zuzuschreiben ist.

Das Verhalten der Emissionsspektren und der Hg-Resonanzlinie in Absorption lässt nun von vornherein auf eine kurze Lebensdauer des HgCl schliessen. Wäre das Radikal nämlich langlebig, so dürfte man nach einer Abschätzung von MIESCHER²⁸⁾ eine HgCl -Ausbeute von $\geq 1\%$ erwarten, wovon während Gleichstrom-Entladungen ein erheblicher Teil dissoziierte. Nach dem Abschalten müsste somit ein Hg-Partialdruck von der Grössenordnung 0,1 mm Hg vorhanden sein; tatsächlich erscheint aber die Absorptionslinie λ 2537 Å merkwürdigerweise nach Hochfrequenzanregung — die nach Obigem ja kaum dissoziierend wirkt — intensiver als nach Gleichstrom-Anregung. Überdies lässt sich die Grössenordnung des wirklich vorhandenen Hg-Partialdruckes nach den Angaben von GUCKER und MUNCH¹⁵⁾ zu etwa 10^{-3} mm schätzen. Es ergibt sich also, dass die Ausbeute (und als Ursache davon auch die Lebensdauer) der HgCl -Radikale um wenigstens 1 bis 2 Zehnerpotenzen tiefer liegt, als bei den in § 7 besprochenen Molekülen, in vollkommener Übereinstimmung mit dem beobachteten Fehlen der Bandenabsorption. Dissoziation in $\text{Hg} + \text{Cl}$ kann kaum der Grund für diese Kurzlebigkeit sein, viel eher kommen die beiden Reaktionen



in Frage, wobei das HgCl_2 die Reaktionswärme als Schwingungsenergie übernehmen kann. Die direkte Rekombination



führt nur im Dreierstoss zu einem stabilen Molekül, kann also nicht zur Erklärung der extrem kurzen Lebensdauer des HgCl dienen. Wegen des geringen HgCl -Partialdruckes dürfte nach dem Abschalten der Vorgang (a) überwiegen. Während Hochfrequenzentladungen, in denen ja die HgCl -Konzentration aus den erwähnten Gründen grösser als in Gleichstromentladungen werden kann, spielt sicher auch (b) eine Rolle, woraus sich das überraschende Verhalten der Hg-Absorptionslinie 2537 Å zwanglos erklärt. Der Prozess (b) scheint überhaupt jede Anhäufung von HgCl -Radikalen zu einem

für Absorptionsversuche bei den hier verwendeten Schichtlängen genügenden Partialdruck zu verhindern.

Aus der mittleren Stosszahl und aus der Annahme, dass der Cl_2 - bzw. HgCl -Partialdruck nur wenige % des Gesamtdruckes ausmacht, lässt sich die für das Verschwinden der HgCl -Moleküle notwendige Zeit nun auch nach unten abschätzen; zusammen mit obiger Betrachtung ergibt sich, dass die Lebensdauer des HgCl unter den gegebenen Bedingungen von der Grössenordnung 10^{-5} sec sein muss.

§ 9. *SnCl*. Das Emissionsspektrum einer Entladung durch SnCl_4 -Dampf besteht aus 2 Bandensystemen, die von JEVONS²³⁾ und FERGUSON¹⁰⁾ analysiert und dem SnCl zugeschrieben worden sind, und mehreren Kontinua²⁾, deren eindeutige Erklärung zurzeit noch aussteht. Der den beiden Bandensystemen gemeinsame untere Zustand zeigt eine beträchtliche Dublettaufspaltung und wird daher als identisch mit dem theoretisch zu erwartenden ^2II -Grundzustand aufgefasst.

Versuche nach der Abschaltmethode ergaben nun keine nachweisbare Bandenabsorption, wobei sich die Untersuchung auf die Zeit zwischen 10^{-5} und 10^{-4} sec nach dem Abschalten beschränkte. Bei hohem Druck wurden 2 kurzlebige ($\sim 3 \cdot 10^{-5}$ sec) Absorptionskontinua mit Maxima bei 3600 und 2700 Å gefunden. Das langwelligere (3,1 ... 3,6 V) kann man jedenfalls nicht dem SnCl -Grundzustand zuschreiben, da die Dissoziationsarbeit des SnCl nach BURKOW⁴⁾ bereits $D_1 = 3,25$ V beträgt. Für den Zerfall $\text{SnCl}_2 = \text{SnCl} + \text{Cl} - D_2$ kommt auch das kurzwelligere Kontinuum (4,4 ... 4,8 V) nicht mehr in Frage*). Ausser einer Zuordnung zu angeregten Zuständen des SnCl bzw. SnCl_2 , wofür aber keine Anhaltspunkte vorliegen, erscheint die folgende Deutung der beiden Kontinua möglich:



so dass sich die Zeit von $3 \cdot 10^{-5}$ sec auf das Verschwinden der SnCl_3 -Moleküle bezieht**). Dass die Energie hierzu ausreicht, geht aus einer Arbeit von POLANYI und SCHAY³⁴⁾ hervor. Nahegelegt

*) $D_2 = 4,3$ V nach BURKOW; legt man als Bildungswärme des SnCl_2 den neueren Wert von 181 kcal zugrunde, so erhält man sogar 4,6 V.

**) Für eine — im Vergleich zu $3 \cdot 10^{-5}$ sec — beträchtlich längere Lebensdauer des SnCl spricht der Umstand, dass sowohl das SiCl -Radikal (welches ein dem SnCl analoges Termschema aufweist, vgl. § 10 und ²⁴⁾), als auch das in dieser Gruppe nächstfolgende PbCl langlebig ist; letzteres lässt sich ja bereits thermisch stark anreichern³¹⁾.

wird diese Deutung besonders durch die Übereinstimmung des Abstandes der beiden Maxima mit dem von TERENIN und TSCHUBAROV⁴⁴⁾ an SnI_2 gefundenen Energieunterschied zwischen dem 2- und dem 4-wertigen Sn.

Im Emissionsspektrum traten neben vielen langlebigen Sn-Linien ($\geq 10^{-4}$ sec) solche von ausgesprochen kurzer Lebensdauer ($\sim 10^{-5}$ sec) auf. Letztere sind nach der von MEGGERS²⁷⁾ durchgeführten Analyse fast durchwegs solche, die zum $5p^1S_0$ -Zustand führen, insbesondere $\lambda\lambda$ 5632, 4525, 3656 Å u. a. Es sei jedoch betont, dass nur intensive Linien mit visuell deutlich erkennbarem Effekt zu solchen Vergleichen herangezogen wurden, so dass die an sich unverständliche Gemeinsamkeit der unteren Zustände vielleicht durch diese Auswahl erklärt werden kann. Zweifellos müssten umfassende photometrische Untersuchungen gleiche Abfallkonstanten für alle Linien ergeben, die zu einem gemeinsamen oberen Zustand gehören.

§ 10. *SiCl*. Die Untersuchungen von JEVONS²²⁾24) über das Emissionsspektrum einer elektrischen Entladung im Dampf von SiCl_4 lieferten 3 Bandensysteme $B \rightarrow X$ ($\lambda_{0,0}$ 2942 Å), $C \rightarrow X$ ($\lambda_{0,0}$ 2436 Å), $D \rightarrow X$ ($\lambda_{0,0}$ 2232 Å) mit gemeinsamem unterem Zustand (X), welcher wahrscheinlich den theoretisch zu erwartenden ²*II*-Grundzustand des SiCl -Radikals darstellt (Dublettaufspaltung 208 cm^{-1}). Nach den erfolglosen Absorptionsversuchen von MIESCHER²⁸⁾ war anzunehmen, dass eine Absorption — vielleicht als Folge einer kurzen Lebensdauer — auf jeden Fall von geringer Intensität sein werde. Durch systematisches Variieren des Druckes, der Momentanstromstärke und der Impulsdauer bei Spannungen bis zu 19 kV gelang es, die sehr kritischen Entladungsbedingungen zu finden, bei denen tatsächlich eine schwache, jedoch gut reproduzierbare Bandenabsorption auftrat (1 ... 5 mm Hg, 0,5 ... 1 Amp, 10^{-3} sec). Gelegentliche Versuche mit einer angezapften Induktionspule als Energiespeicher und Autotransformator, wobei ein Betrieb bei Drucken ≥ 20 mm Hg möglich war, ergaben keine merkbare Absorption, wahrscheinlich wegen zu kurzer Dauer der hohen Spannungsstösse.

Nur das Bandensystem $B \rightarrow X$ erschien in Absorption (Fig. 7), während $C \rightarrow X$, $D \rightarrow X$ schon in Emission kaum erkennbar waren. Die vom Niveau $v'' = 0$ ausgehenden Banden liessen sich über Zeiten von 10^{-3} sec hin verfolgen, ausgenommen die von DATTA⁷⁾ als (3,0)-Übergänge gedeuteten Kanten. Die von JEVONS²⁴⁾ als unsicher bezeichnete Zuordnung der kurzwelligeren Banden dieses Systems darf nun wenigstens für die (2,0)-Übergänge als im Rahmen

der uns zur Verfügung stehenden geringen Dispersion bestätigt gelten. In der Gegend der fraglichen Banden treten überraschenderweise, ebenfalls in Absorption, kurzlebige Fluktuationen oder Bänder mit einem deutlichen Intensitätsmaximum bei 2797 \AA auf, die nach $2 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$ praktisch vollkommen verschwunden sind. Diese können also offenbar nicht von dem viel langlebigeren SiCl -Grundzustand ausgehen.

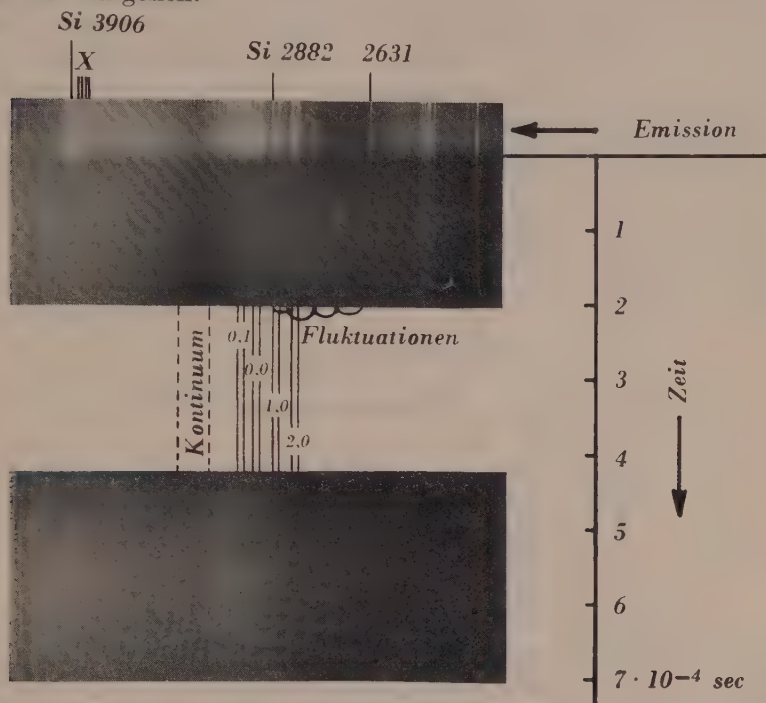


Fig. 7.

Emissionsabbruch und Absorptionsspektrum SiCl .

Die vom Niveau $v'' = 0$ ausgehenden Banden zeigen nach $7 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$ noch keine merkliche Abnahme, während die Fluktuationen im Gebiet $2700 \dots 2800 \text{ \AA}$ nach $2 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$ praktisch verschwunden sind. x — unbekannte Emissionsbanden ($3745 \dots 3860 \text{ \AA}$).

Eine kontinuierliche Absorption von $3100 \dots 3250 \text{ \AA}$ zeigte ungefähr dasselbe zeitliche Verhalten wie die beobachteten Absorptionsbanden. Die hierdurch nahegelegte Deutung des Kontinuums als Übergang vom SiCl -Grundzustand aus zu einem etwa $3,9 \text{ V}$ über dem Potentialminimum des letzteren verlaufenden Abstosungszustand wäre allerdings mit der von ASUNDI, KARIM und SAMUEL²⁾ angenommenen Dissoziationsenergie des SiCl von $D'' = 4,0 \text{ V}$ unvereinbar. Dieser Wert beruht aber auf der sicher nicht

erfüllten Voraussetzung, dass im SiCl_2 die sukzessive Abtrennung beider Cl-Atome dieselbe Energie erfordert; vielmehr wird man in Analogie zum SnCl , wo die Abweichung 0,7 V beträgt, auch hier ein merklich kleineres D'' erwarten. Zudem spricht für das Vorhandensein einer Abstossungskurve in nächster Nähe der Kurve B der Umstand, dass im Emissionsspektrum $B \rightarrow X$ alle Übergänge mit $v' > 2$ fehlen (vgl. Fig. 8). Möglicherweise hängt hiermit auch das eigentümliche Aussehen der 2,0- (und der zweifelhaften 3,0-) Banden zusammen. Die in Absorption beobachteten, kurzwelligeren Fluktuationen sind wohl als Übergänge von einem flachen Minimum der gleichen Abstossungskurve aus zu deuten, wie in der schematischen Fig. 8 gezeichnet.

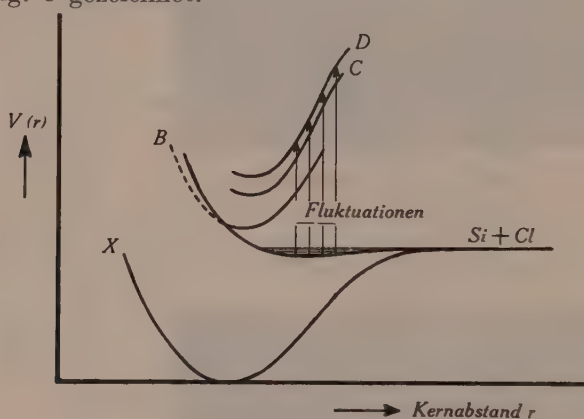


Fig. 8.

Qualitatives Potentialkurvenschema des SiCl .

Bei hohem Druck und hoher Stromstärke trat eine Bandengruppe in Emission auf mit diffusen Kanten bei

$$\lambda\lambda\ 3745, 3780, 3820, 3860 (\pm 5) \text{ \AA},$$

welche mit keinem bekannten System³³⁾ identifiziert werden konnte. Endlich sei noch erwähnt, dass die einzige auffallend kurzlebige unter den intensiveren Si-Emissionslinien ($\lambda\ 3906 \text{ \AA}$) nach der Analyse von FOWLER¹²⁾ zum Übergang $4s^1P_1 \rightarrow 3p^1S_0$ gehört, und dass die entsprechende Linie des Sn-Spektrums ($\lambda\ 4525 \text{ \AA}$) ebenfalls ausgesprochen kurzlebige ist (vgl. § 9).

§ 11. CCl . Die von einer Entladung durch CCl_4 -Dampf emittierten Banden wurden erstmals von JEVONS²²⁾ kurz erwähnt und von ASUNDI und KARIM³⁾ näher untersucht. Wie später auch HORIE²¹⁾ festgestellt hat, begegnet hier die Schwingungsanalyse erheblichen Schwierigkeiten, so dass Absorptionsversuche nach der Abschaltmethode besonders wünschenswert erscheinen.

Bei unseren Versuchen am Dampf von CCl_4 wurde das Rohr an der Pumpe betrieben und mittels Hähnen und Kühlungen ein möglichst konstanter CCl_4 -Strom bei etwa 10 mm Druck aufrechterhalten. Die Absorptionsversuche verliefen negativ. Die Variationsmöglichkeiten wurden zwar auf den Druck im Entladungsrohr beschränkt; immerhin konnte mit Sicherheit festgestellt werden, dass eine allfällige Bandenabsorption zwischen 10^{-4} und 10^{-5} sec nach dem Abschalten um Grössenordnungen schwächer als etwa im Falle des BCl sein müsste.

Im Emissionsspektrum erschienen deutlich 3 von ASUNDI und KARIM nicht angegebene enge Kontinua in der Gegend um 2900 Å; diese sind übrigens auch auf dem von ASUNDI und KARIM veröffentlichten Photogramm zu erkennen, dort allerdings von starken CO-Banden überlagert. Die Kontinua und das starke Maximum bei 3070 Å dürften zusammen mit weiteren schwächeren Kontinua eine Folge von Fluktuationen gemäss Fall I der FINKELNBURG'schen Einteilung¹¹⁾ bilden:

$\lambda[\text{Å}]$	$\nu[\text{cm}^{-1}]$	$\Delta\nu[\text{cm}^{-1}]$
3070	32600	1200
2960	33800	900
2880	34700	700
2820	35400	(700)
(*2770)	(36100)	(600)
2720	36700	

*) unsicher, da von der CCl -Bandengruppe $\Delta\nu = 0$ verdeckt.

Die Wellenzahldifferenzen deuten allerdings eine Grundschnwingungsfrequenz des oberen Zustandes von nur 600 . . . 700 cm^{-1} an, während die beiden zum Bandensystem gehörigen Zustände des CCl nach HORIE²¹⁾ $\omega_e' = 972 \text{ cm}^{-1}$, $\omega_e'' = 865 \text{ cm}^{-1}$ haben. Die neu beobachteten Emissionskontinua sind daher vielleicht eher dem CCl_2 als dem CCl zuzuschreiben.

Die vorliegende Arbeit entstand im physikalischen Institut der Universität Basel auf Anregung und unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. E. MIESCHER, dem ich für tatkräftige Unterstützung und stets fördernde Ratschläge meinen herzlichen Dank ausspreche. Den Herren Institutsvorstehern Prof. Dr. A. HAGENBACH und Prof. Dr. P. HUBER danke ich für die Überlassung vieler wertvoller Apparaturen und Herrn Prof. Dr. M. FIERZ für mancherlei nützliche Hinweise.

Physikalische Anstalt der Universität Basel.

Literatur.

- ¹⁾ H. ABRAHAM und E. BLOCH, *Ann. de Physique* **12**, 237 (1919).
- ²⁾ R. K. ASUNDI, M. KARIM und R. SAMUEL, *Proc. Ind. Acad. Sci. A* **12**, 513 (1940).
- ³⁾ R. K. ASUNDI und S. M. KARIM, *Proc. Ind. Acad. Sci. A* **6**, 328 (1937).
- ⁴⁾ K. BUTKOW, *Phys. Zs. d. Sowjetunion* **5**, 906 (1934).
- ⁵⁾ S. D. CORNELL, *Phys. Rev.* **54**, 341 (1938).
- ⁶⁾ J. H. COULLETTE, *Phys. Rev.* **32**, 636 (1928).
- ⁷⁾ A. C. DATTA, *Zs. f. Phys.* **78**, 486 (1932).
- ⁸⁾ H. B. DORGELO, *Zs. f. Phys.* **34**, 766 (1925); *Physica* 1925, 429.
- ⁹⁾ R. I. DWYER, *Journ. Chem. Phys.* **7**, 40 (1939).
- ¹⁰⁾ W. F. C. FERGUSON, *Phys. Rev.* **32**, 607 (1928).
- ¹¹⁾ W. FINKELNBURG, *Kontinuierliche Spektren* (Springer, Berlin 1938).
- ¹²⁾ A. FOWLER, *Proc. Roy. Soc. A* **123**, 423 (1929).
- ¹³⁾ A. A. FROST und O. OLDENBERG, *Journ. Chem. Phys.* **4**, 642 und 782 (1936).
- ¹⁴⁾ R. GRUEBLING, *Ann. d. Phys.* (5) **57**, 453 (1940).
- ¹⁵⁾ F. T. GUCKER und R. H. MUNCH, *Journ. Amer. Chem. Soc.* **59**, 1275 (1937).
- ¹⁶⁾ F. HABER und W. ZISCH, *Zs. f. Phys.* **9**, 302 (1922).
- ¹⁷⁾ G. HERZBERG und W. HUSHLEY, *Can. Journ. Res.* **19**, 127 (1941).
- ¹⁸⁾ L. J. HAYNER, *Phys. Rev.* **26**, 364 (1925); *Zs. f. Phys.* **35**, 365 (1926).
- ¹⁹⁾ R. HOLM, *Die technische Physik der elektrischen Kontakte* (Springer, Berlin 1941), p. 248.
- ²⁰⁾ do. p. 233.
- ²¹⁾ T. HORIE, *Proc. Phys.-math. Soc. Japan* (3) **21**, 143 (1939).
- ²²⁾ W. JEVONS, *Proc. Roy. Soc. A* **106**, 174 (1924).
- ²³⁾ W. JEVONS, *Proc. Roy. Soc. A* **110**, 365 (1926).
- ²⁴⁾ W. JEVONS, *Proc. Phys. Soc.* **48**, 563 (1936).
- ²⁵⁾ C. KENTY, *Phys. Rev.* **32**, 606 (1928).
- ²⁶⁾ M. N. LEWIS und J. U. WHITE, *Phys. Rev.* **55**, 894 (1939).
- ²⁷⁾ W. F. MEGGERS, *Journ. of Res. Bur. of Stand.* **24**, 153 (1940).
- ²⁸⁾ E. MIESCHER, *Helv. Phys. Acta* **9**, 693 (1936).
- ²⁹⁾ E. MIESCHER, *Helv. Phys. Acta* **8**, 279 (1935).
- ³⁰⁾ F. L. MOHLER, *Journ. of Res. Bur. of Stand.* **19**, 447 (1937).
- ³¹⁾ F. MORGAN, *Phys. Rev.* **49**, 47 (1936).
- ³²⁾ O. OLDENBERG, *Journ. Chem. Phys.* **3**, 266 (1935).
- ³³⁾ R. W. B. PEARSE und A. G. GAYDON, „The identification of molecular spectra“ (London, 1941).
- ³⁴⁾ M. POLANYI und G. SCHAY, *Zs. f. Phys.* **47**, 814 (1928).
- ³⁵⁾ M. L. POOL, *Phys. Rev.* **30**, 848 (1927).
- ³⁶⁾ H. J. REICH, *Electronics* **12**, Heft 8, 14 (1939).
- ³⁷⁾ E. ROSENTHALER, *Helv. Phys. Acta* **13**, 355 (1940).
- ³⁸⁾ H. ROTHE und W. KLEEN, *Bücherei der Hochfrequenztechnik*, hg. von J. ZENNECK, Band III, p.172.
- ³⁹⁾ do. p. 179.
- ⁴⁰⁾ do. Band IV, p. 91.
- ⁴¹⁾ K. SCHLESINGER, *E.N.T.* **8**, 437 (1931).
- ⁴²⁾ F. SCHROETER, *Fernsehen* (Springer, Berlin 1937), p. 42 ff.
- ⁴³⁾ H. SPONER, *Zs. f. phys. Chemie*, B **11**, 425 (1931).
- ⁴⁴⁾ A. TERENCE und R. TSHUBAROV, *Acta Physicochimica URSS* **7**, 1 (1937).
- ⁴⁵⁾ J. U. WHITE, *Journ. Chem. Phys.* **8**, 79 (1940).
- ⁴⁶⁾ K. WIELAND, *Helv. Phys. Acta* **2**, 46 (1929).
- ⁴⁷⁾ K. WIELAND, *Zs. f. Phys.* **77**, 157 (1932).
- ⁴⁸⁾ K. WIELAND, *Helv. Phys. Acta* **10**, 323 (1938).
- ⁴⁹⁾ K. WIELAND, *Helv. Phys. Acta* **14**, 420 (1941).

Forces nucléaires de la théorie des paires

par A. Houriet.

(25. IX. 43.)

Le potentiel $V(r)$ entre deux nucléons, fourni par la théorie des paires d'électrons, a été calculé par J. M. JAUCH (I)¹⁾ dans l'hypothèse d'un couplage scalaire. Le but du présent travail est de compléter les résultats déjà obtenus dans le cas des couplages forts, puis de déterminer l'énergie potentielle U_Z d'un réseau de nucléons. Les calculs montreront que l'hypothèse d'un couplage fort conduit à des forces attractives et saturées.

Soit un champ de particules de spin $\frac{1}{2}$, de masse μ et de charge e , obéissant aux équations de Dirac. Son hamiltonien sera

$$H_0 = \int d\mathbf{x} \, \psi^*(\mathbf{x}) \left\{ \frac{1}{i} (\vec{\alpha} \cdot \text{grad}) + \beta \mu \right\} \psi(\mathbf{x})$$

L'interaction entre le champ et les nucléons de coordonnées \mathbf{x}_s , $s = 1, 2 \dots Z$, sera décrite, comme dans (I)¹⁾ par le terme

$$H_1 = \lambda \sum_{s=1}^Z \int d\mathbf{x}' f(|\mathbf{x}'|) \psi^*(\mathbf{x}' + \mathbf{x}_s) \beta \int d\mathbf{x} f(|\mathbf{x}|) \psi(\mathbf{x} + \mathbf{x}_s)$$

λ est le paramètre de couplage que nous choisissons, comme dans (I) plus grand que zéro: $\lambda > 0$; $f(|\mathbf{x}|)$ est une fonction-poids qui ne diffère de zéro qu'aux environs de $|\mathbf{x}| = 0$. Le système champ + nucléons aura pour hamiltonien

$$H = H_0 + H_1$$

Transformons H dans l'espace d'impulsion \mathbf{k} en supposant le champ périodique suivant V . On a

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \psi_{\mathbf{k}}, \quad \psi^*(\mathbf{x}) = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \psi_{\mathbf{k}}^*,$$

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}^* \{ \vec{\alpha} \cdot \mathbf{k} + \beta \mu \} \psi_{\mathbf{k}} + \frac{\lambda}{V} \sum_{s=1}^Z \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} g_{\mathbf{k}}^* g_{\mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_s)} \psi_{\mathbf{k}}^* \beta \psi_{\mathbf{k}'}$$

¹⁾ J. M. JAUCH, H.P.A. XV p. 175 et suiv. Travail que nous désignerons par (I).

Les g_t s'introduisent comme correspondants de $f(|\mathbf{x}|)$ dans le développement de Fourier et sont tels que

$$g_t = g(|\mathbf{t}|) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } |\mathbf{t}| \gg A \\ 1 & \text{si } |\mathbf{t}| \ll A \end{cases}$$

La longueur $1/A$ est introduite dans la théorie comme mesure du rayon du proton.

Soient ω_m et Ω_m les valeurs propres des systèmes H_0 et H . Par définition l'énergie E_Z du système formé par les Z nucléons sera donné par (cf. I)

$$E_Z = \sum_m (\Omega_m - \omega_m)$$

$$\Omega_m, \omega_m < 0$$

La détermination des valeurs propres Ω_m de H revient à trouver les Ω qui annulent le déterminant $\Delta(\Omega^2)$ du système

$$\{(\tilde{\alpha} \cdot \mathbf{t}) + \beta\mu - \Omega\} \psi_t + \frac{\lambda}{V} \sum_{s=1}^Z \sum_{\mathbf{t}'} g_{\mathbf{t}'}^* g_{\mathbf{t}} e^{i(\mathbf{t}' - \mathbf{t} \cdot \mathbf{x}_s)} \beta \psi_{\mathbf{t}'} = 0 \quad (1)$$

Pour calculer E_Z , nous utiliserons la méthode développée par G. WENTZEL (II)¹⁾ dans le cas des mésons de spin 0. Désignons par $\Delta_0(\Omega^2)$ le déterminant du système (1) pour $\lambda = 0$. Soient Ω_m^2 les racines de $\Delta(\Omega^2)$, ω_m^2 celles de $\Delta_0(\Omega^2)$. Posons $\Omega^2 = \zeta$ et introduisons $\varphi_Z(\zeta)$ définie par

$$\varphi_Z^2(\zeta) = \frac{\Delta(\zeta)^2}{\Delta_0(\zeta)} \quad (2)$$

Soit C un chemin du plan ζ évitant l'origine et qui enveloppe toutes les racines ω_m^2 et Ω_m^2 . On a

$$E_Z = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \log \varphi_Z(\zeta) \quad (3)$$

Nous posons $\zeta = \mu^2 + \xi + i\eta = \mu^2 + \kappa^2(\xi$ et η réels) et désignons par $\varphi_Z(\kappa)_{\pm}$ les limites de $\varphi_Z(\zeta)$ pour $\eta = \pm 0$. κ (réel). Comme nous le verrons, l'hypothèse $\lambda > 0$ conduit à des valeurs propres

¹⁾ G. WENTZEL, H.P.A. XV, p. 111. Travail que nous désignerons par (II).

²⁾ Remarquons que dans (II) $\varphi_Z(\zeta)$ était définie un peu différemment:

$$\varphi_Z(\zeta) = \frac{\Delta(\zeta)}{\Delta_0(\zeta)}.$$

La définition (2) est ici plus adéquate du fait que Δ et Δ_0 ont toutes leurs racines doubles.

$\Omega^2 \geq \mu^2$ ¹⁾, les κ seront donc toujours réels. Il viendra

$$E_Z = -\frac{1}{\pi i} \int_0^\infty d\kappa \cdot \frac{\kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} \log \left(\frac{\varphi_Z(\kappa)_+}{\varphi_Z(\kappa)_-} \right) \quad (4)$$

En remarquant que $\varphi_Z(\kappa)_+ = (\varphi_Z(\kappa))_-^*$, on peut encore écrire

$$E_Z = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\kappa \frac{\kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} \arg \varphi_Z(\kappa)_+ \quad (5)$$

Un seul nucléon ($Z = 1$).

Soit un nucléon en $\mathbf{x}_1 = 0$. Le système (1) se réduit à

$$\{(\tilde{\alpha} \cdot \mathbf{f}) + \beta \mu - \Omega\} \psi_t + \frac{\lambda}{V} g_t^* \beta \sum_{t'} g_{t'} \psi_{t'} = 0$$

On trouve pour $\varphi_1(\zeta)$, ($\omega_t^2 = \mu^2 + k^2$)

$$\varphi_1(\zeta) = \left(1 + \frac{\lambda}{V} \sum_t |g_t|^2 \frac{\mu + \sqrt{\zeta}}{\omega_t^2 - \zeta}\right) \left(1 + \frac{\lambda}{V} \sum_t |g_t|^2 \frac{\mu - \sqrt{\zeta}}{\omega_t^2 - \zeta}\right)$$

Il est évident que pour $\lambda > 0$ et $\zeta < \mu^2$ on a $\varphi_1(\zeta) > 0$. Il n'existe pas de racines $|\Omega_m| < \mu$. Nous choisissons, pour la commodité des calculs, la fonction-poids particulière

$$|g_t|^2 = \frac{1}{1 + \frac{k^2}{A^2}} = |g_t|^2 \quad (6)$$

Cette fonction ne suffit pas pour assurer la convergence de l'énergie propre. Ce fait ne joue d'ailleurs aucun rôle, puisque dans le calcul du potentiel $V(r)$ entre deux nucléons et de l'énergie potentielle U_Z de Z nucléons, le terme correspondant à l'énergie propre est toujours éliminé. Nous posons de nouveau $\zeta = \mu^2 + \xi + i\eta = \mu^2 + \kappa^2$. La passage aux limites $V = \infty$, $\eta \pm \pm 0$ donnera

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{V=\infty \\ \eta=\pm 0}} \frac{1}{V} \sum_t \frac{|g_t|^2}{\omega_t^2 - (\mu^2 + \kappa^2)} &= \frac{1}{4\pi} (A \pm i\kappa) |g(\kappa)|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi} (A \pm i\kappa) \cdot \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2}{A^2}} \end{aligned} \quad (7)$$

¹⁾ Lorsque λ est négatif, $\lambda < 0$, il existe pour $A(\Omega^2)$ des racines Ω_m telles que $\Omega_m^2 < \mu^2$. Le κ correspondant, tel que $R\varphi(\kappa)_\pm = 0$ est alors purement imaginaire $\kappa = i\beta$. Cette éventualité, déjà étudiée par CRITCHFIELD (Phys. Rev. **59**, p. 48 et suiv.) correspond à l'apparition d'états où une paire de particules du champ se trouve liée à la particule lourde. La méthode de calcul indiquée par WENTZEL (II) s'applique aussi à ce cas. Il suffit de choisir un chemin C qui contient toutes les racines Ω_m^2 y compris la racine $\mu^2 - \beta^2$.

ce qui donne pour $\varphi_1(\kappa) \pm$,

$$\varphi_1(\kappa) \pm = 1 + \frac{\lambda \mu}{2\pi} |g(\kappa)|^2 \cdot (A \pm i\kappa) - \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} \kappa^2 \cdot |g(\kappa)|^4 \cdot (A \pm i\kappa)^2 \quad (8)$$

Pour éviter la divergence de E_1 , nous intégrons formellement jusqu'à A' , nous réservant de poser plus tard $A' = \infty$ une fois l'énergie propre soustraite de E_2 et de E_Z .

$$E_1 = -\frac{1}{\pi i} \int_0^{A'} d\kappa \cdot \frac{\kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} \log \left(\frac{\varphi_1(\kappa)_+}{\varphi_1(\kappa)_-} \right)$$

Potentiel $V(r)$ entre deux nucléons.

Soient deux nucléons de coordonnées $\mathbf{x}_1 = (0, 0, r/2)$ et $\mathbf{x}_2 = (0, 0, -r/2)$. Le calcul du déterminant du système (1) conduit à la fonction $\varphi_2^2(\zeta)$. Cette fonction se trouve dans le travail de JAUCH (I) sous le n° (2.3). Il suffit d'y remplacer Ω par $\sqrt{\zeta}$ et η par $\lambda/4 \pi^3$ et de poser notre fonction $|g_k|$ (6) en lieu de la fonction-poids

$$|g_k| = \begin{cases} 1 & \text{si } |\mathbf{k}| > K \\ 0 & \text{si } |\mathbf{k}| < K \end{cases}$$

utilisée par JAUCH. Il vient en passant à la limite $V = \infty$,

$$\varphi_2(\zeta) = \varphi_{21}(\zeta) \cdot \varphi_{22}(\zeta)$$

avec

$$\varphi_{21}(\zeta) = 1 + \lambda(\mu + \sqrt{\zeta})D + \lambda(\mu - \sqrt{\zeta})F + (\mu^2 - \zeta)DF + \lambda^2 E^2$$

$$\varphi_{22}(\zeta) = 1 + \lambda(\mu - \sqrt{\zeta})D + \lambda(\mu + \sqrt{\zeta})F + (\mu^2 - \zeta)DF + \lambda^2 E^2$$

D, F, E étant définis par

$$D = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dk |g_k|^2 \left(\frac{k^2 r + k \sin kr}{\omega_k^2 - \zeta} \right)$$

$$F = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dk |g_k|^2 \left(\frac{k^2 r - k \sin kr}{\omega_k^2 - \zeta} \right)$$

$$E = \frac{1}{2\pi^2 r^2} \int_0^\infty dk |g_k|^2 \cdot k \cdot \left(\frac{\sin kr - kr \cos kr}{\omega_k^2 - \zeta} \right)$$

Soit de nouveau $\zeta = \mu^2 + \kappa^2 = \mu^2 + \xi + i\eta$. Définissons

$$J_0 \pm = \lim_{\eta = \pm 0} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk |g_k|^2 \cdot \frac{k^2}{k^2 - \kappa^2}$$

$$J_1 \pm = \lim_{\eta = \pm 0} \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dk \cdot |g_k|^2 \left(\frac{k \cdot \sin kr}{k^2 - \kappa^2} \right)$$

J_0 a été calculé, voir (7). J_1 s'obtient facilement à l'aide du calcul des résidus

$$J_{1\pm} = \frac{1}{4\pi} |g(\kappa)|^2 \left\{ \frac{e^{\pm i\kappa r} - e^{-A r}}{r} \right\} \equiv \chi(r, \kappa)_{\pm} \quad (9)$$

Pour la suite de nos calculs, nous supposons $Ar \gg 1$ de telle sorte que nous puissions négliger e^{-Ar} . Avec ces notations, on a

$$D = J_0 + J_1 \quad F = J_0 - J_1 \quad E = -\frac{\partial J_1}{\partial r}$$

et il vient pour $\varphi_{21}(\kappa)$ et $\varphi_{22}(\kappa)$

$$\begin{aligned} \varphi_{21}(\kappa) \pm = & 1 + \frac{\lambda\mu}{2\pi} |g(\kappa)| (A \pm i\kappa) - \frac{\lambda^2 \kappa^2}{(4\pi)^2} \cdot |g(\kappa)|^4 \cdot (A \pm i\kappa)^2 \\ & + \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\mu^2 + \kappa^2} \cdot |g(\kappa)|^2 \frac{e^{\pm i\kappa r}}{r} \\ & + \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} |g(\kappa)|^4 \cdot \frac{e^{\pm 2i\kappa r}}{r^4} (1 \mp 2i\kappa r) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{22}(\kappa) \pm = & 1 + \frac{\lambda\mu}{2\pi} |g(\kappa)|^2 (A \pm i\kappa) - \frac{\lambda^2 \kappa^2}{(4\pi)^2} |g(\kappa)|^4 (A \pm i\kappa)^2 \\ & - \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\mu^2 + \kappa^2} |g(\kappa)|^2 \frac{e^{\pm i\kappa r}}{r} \\ & + \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} |g(\kappa)|^4 \cdot \frac{e^{\pm 2i\kappa r}}{r^4} (1 \mp 2i\kappa r) \end{aligned} \quad (11)$$

Le potentiel $V(r)$ est défini par

$$V(r) = E_2(r) - 2E_1$$

L'utilisation des formules (4) et (5) donne

$$V(r) = -\frac{1}{\pi i} \int_0^\infty d\kappa \cdot \frac{\kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} \left\{ \log \left(\frac{\varphi_{21}(\kappa)_+}{\varphi_{21}(\kappa)_-} \right) + \log \left(\frac{\varphi_{22}(\kappa)_+}{\varphi_{22}(\kappa)_-} \right) - 2 \log \left(\frac{\varphi_1(\kappa)_+}{\varphi_1(\kappa)_-} \right) \right\} \quad (12)$$

$$V(r) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\kappa \cdot \frac{\kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} \{ \arg \varphi_{21}(\kappa)_+ + \arg \varphi_{22}(\kappa)_+ - 2 \arg \varphi_1(\kappa)_+ \} \quad (13)$$

Couplage très fort $\lambda \rightarrow \infty$.

Dans $\varphi_{21}(\kappa)$ et $\varphi_{22}(\kappa)$, nous ne conserverons que les termes en λ^2 . Cette approximation permet de poser $\varphi_{21}(\kappa)_\pm = \varphi_{22}(\kappa)_\pm = \overline{\varphi_2(\kappa)_\pm} = \frac{\lambda^2 |g(\kappa)|^4}{4\pi^2} \left\{ \frac{e^{\pm 2i\kappa r}}{r^4} (1 \mp 2i\kappa r) - \kappa^2 (A \pm i\kappa)^2 \right\}$ (14)

Représentons $\overline{\varphi_2}$ en fonction de κ dans son plan complexe. Soit κ_2 tel que la partie réelle de $\overline{\varphi_2}$ soit nulle.

$$R \overline{\varphi_2(\kappa_2)_\pm} = 0 \quad (15)$$

On vérifie que l'on a approximativement $\kappa_2 \cong 1/Ar^2$ donc

$$|\kappa_2 r| \ll 1 \quad |\kappa_2| \ll A \quad |g(\kappa_2)| \cong 1 \quad (16)$$

En $\kappa = \kappa_2$ on a pour partie imaginaire de $\overline{\varphi_2(\kappa)_\pm}$

$$\text{Imag } \overline{\varphi_2(\kappa)_\pm} \cong \mp \frac{2\lambda^2 A}{(4\pi)^2} \cdot \kappa_2^3$$

L'argument de $\overline{\varphi_{2+}}$ croît de $-\pi$ aux environs de $\kappa = \kappa_2$. Cet accroissement s'effectue sur un intervalle $\Delta \kappa_2$ tel que $|\Delta \kappa_2| \ll \kappa_2$. On pourra donc poser

$$\begin{aligned} \arg \overline{\varphi_2(\kappa)_+} &\cong 0 & \text{si } 0 &\leq \kappa < \kappa_2 \\ \arg \overline{\varphi_2(\kappa)_+} &\cong -\pi & \text{si } \kappa_2 < \kappa \leq A \end{aligned} \quad (17)$$

et l'on obtient pour $\overline{\varphi_2(\kappa)_\pm}$ la représentation suivante:

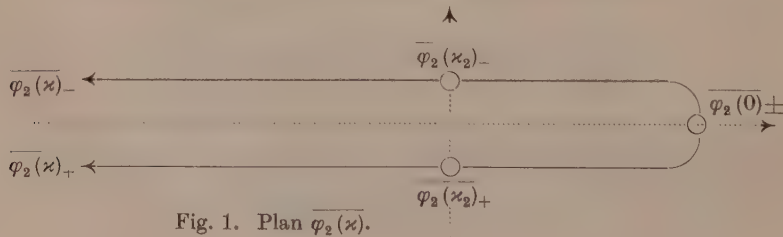


Fig. 1. Plan $\overline{\varphi_2(\kappa)}$.

Représentons aussi $\varphi_1(\kappa)_{\pm}$ dans son plan complexe. Soit κ_1 tel que la partie réelle de $\varphi_1(\kappa)_{\pm}$ soit nulle

$$R\varphi_1(\kappa_1)_{\pm} = 0 \quad (18)$$

On vérifie que pour λ tendant vers ∞ , κ_1 tend vers 0 comme $1/\lambda$. L'argument de $\varphi_1(\kappa)_+$ croît de $-\pi$ aux environs de $\kappa = \kappa_1$. Cet accroissement s'effectue sur un intervalle $\Delta\kappa_1$ tel que $|\Delta\kappa_1| \ll \kappa_1$. Par conséquent, quand $\lambda \rightarrow \infty$ ($\kappa_1 \rightarrow 0$) nous poserons :

$$\arg \varphi_1(\kappa)_+ \supseteq -\pi \quad \text{pour} \quad 0 \supseteq \kappa_1 < \kappa \ll A \quad (19)$$

et nous obtiendrons pour $\varphi_1(\kappa)_{\pm}$ une représentation identique à celle de la fig. 1, l'indice 1 remplaçant l'indice 2 de la figure. La comparaison entre (17) et (19) montre que sur l'intervalle $0 \supseteq \kappa_1 < \kappa < \kappa_2$ les arguments des fonctions $\varphi_1(\kappa)_+$ et $\varphi_2(\kappa)_+$ diffèrent de π , tandis que pour $\kappa > \kappa_2$ les deux fonctions ont approximativement le même argument. En conséquence, pour calculer $V(r)$, nous diviserons l'intervalle d'intégration $0 \leq \kappa \leq \infty$ en deux parties : l'une $0 \supseteq \kappa_1 \leq \kappa \leq \kappa_2 \supseteq 1/A r^2$ qui fournit $V_1(r)$, l'autre $1/A r^2 \supseteq \kappa_2 < \kappa \leq \infty$ qui donne $V_2(r)$, le potentiel total $V(r)$ s'exprimant comme somme de $V_1(r)$ et de $V_2(r)$.

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r) \quad (20)$$

Nous calculons $V_1(r)$ à l'aide de (5), $V_2(r)$ avec (4). On trouve d'abord

$$V_1(r) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{Ar^2}} d\kappa \cdot \frac{\kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} \cdot 2\pi$$

$$V_1(r) = -4 \left(\sqrt{\mu^2 + \left(\frac{1}{Ar^2}\right)^2} - \mu \right) \quad (21)$$

$V_2(r)$ calculé à partir de (4) est donné par

$$V_2(r) = -\frac{1}{\pi i} \int_{\frac{1}{Ar^2}}^{\infty} d\kappa \frac{\kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} 2 \log \frac{\overline{\varphi_2(\kappa)_+}}{\varphi_1(\kappa)_+} \frac{\overline{\varphi_2(\kappa)_-}}{\varphi_1(\kappa)_-}$$

On a d'ailleurs en ne conservant dans $\varphi_1(\kappa)_{\pm}$ que le terme en λ^2

$$\frac{\overline{\varphi_2(\kappa)_{\pm}}}{\varphi_1(\kappa)_{\pm}} = 1 - \frac{(1 \mp 2i\kappa r)e^{\pm 2i\kappa r}}{\kappa^2 r^4 (A \pm i\kappa)^2} = 1 + y(\kappa)_{\pm}$$

Si $\kappa > 1/Ar^2$, on aura $|y(\kappa)| < 1$. Nous développerons

$\log(1 + y(\kappa)_{\pm}) = y(\kappa)_{\pm} + \dots$. L'évaluation de l'erreur commise montre que, pour l'intervalle $\kappa > 1/Ar^2$ on peut poser

$$\log(1 + y(\kappa)_{\pm}) \cong y(\kappa)_{\pm}$$

Il vient

$$V_2(r) = -\frac{1}{\pi i} \int_{\frac{1}{Ar^2}}^{\infty} d\kappa \cdot \frac{2\kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} (y(\kappa)_+ - y(\kappa)_-)$$

Seuls les éléments $\kappa \ll A$ contribuent à l'intégrale (à cause de $Ar \gg 1$). Au dénominateur de $y(\kappa)_{\pm}$ nous remplacerons donc $(A \pm i\kappa)$ par A .

$$V_2(r) = \frac{8}{\pi A^2 r^3} \int_{\frac{1}{Ar^2}}^{\infty} \frac{d\kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} \left(\frac{\sin 2\kappa r}{2\kappa r} - \cos 2\kappa r \right)$$

Utilisant le fait que $|\kappa_2 r| \cong 1/Ar \ll 1$ on vérifie que l'on peut remplacer dans $V_2(r)$ la limite inférieure $1/Ar^2$ par 0

$$V_2(r) = \frac{8}{\pi A^2 r^3} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\mu^2 + x^2}} \left(\frac{\sin 2xr}{2xr} - \cos 2xr \right) \quad (23)$$

Nous retrouvons dans $V_2(r)$, à un facteur numérique près qui provient du choix de fonctions-poids différentes, le potentiel donné par J. JAUCH dans (I), page 187. Les calculs précédents montrent que cette formule est incomplète et que l'on a d'après (20), (21) et (23)

$$V(r) = -4 \left\{ \sqrt{\mu^2 + \left(\frac{1}{Ar^2} \right)^2} - \mu \right\} + \frac{8}{\pi A^2 r^3} \int_0^{\infty} \frac{d\kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} \left\{ \frac{\sin 2\kappa r}{2\kappa r} - \cos 2\kappa r \right\} \quad (24)$$

Pour discuter $V(r)$ nous exprimerons $V_2(r)$ au moyen des fonctions de Hankel. On a

$$\int_0^{\infty} dy \frac{\cos y}{\sqrt{(2\mu r)^2 + y^2}} \equiv \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(2i\mu r)$$

$V_2(r)$ s'écrira

$$V_2(r) = \frac{4}{A^2 r^3} \left\{ \frac{1}{2\mu r} \int_0^{2\mu r} d\varrho \, i H_0^{(1)}(i\varrho) - i H_0^{(1)}(2i\mu r) \right\}$$

$$V_2(r) = \frac{4}{A^2 r^3} \left\{ \frac{1}{2 \mu r} \int_0^\infty d\rho \, i H_0^{(1)}(i \rho) \right. \\ \left. - \frac{1}{2 \mu r} \int_{2 \mu r}^\infty d\rho \, i H_0^{(1)}(i \rho) - i H_0^{(1)}(2 i \mu r) \right\}$$

L'intégrale

$$\int_0^\infty d\rho \, i H_0^{(1)}(i \rho)$$

vaut 1. On aura finalement

$$V_2(r) = \frac{4}{A^2 r^3} \left\{ \frac{1}{2 \mu r} - \frac{1}{2 \mu r} \int_{2 \mu r}^\infty d\rho \, i H_0^{(1)}(i \rho) - i H_0^{(1)}(2 i \mu r) \right\} \quad (23a)$$

Remarquons que $V_2(r)$ (23) a pour valeur maximale $\frac{8}{\pi A^2 r^3}$, valeur atteinte pour $\mu r = 0$, puisque

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y} \left(\frac{\sin 2 y r}{2 y r} - \cos 2 y r \right) = 1$$

et que $V_2(r)$ est une fonction décroissante de μr .

Intervalle I :

$$\frac{1}{A} \ll r \ll \frac{1}{\sqrt{\mu A}}$$

c'est-à-dire

$$\mu r \ll \frac{1}{A r} \ll 1$$

On a (21) et (23)

$$V_1(r) = -\frac{4}{A r^2}$$

$$V_2(r) \cong -\frac{8}{\pi A^2 r^3} \int_0^\infty \frac{dy}{y} \left(\frac{\sin y}{y} - \cos y \right) = \frac{8}{\pi A^2 r^3}$$

Comme on avait supposé $A r \gg 1$, il restera pour $V(r)$

$$V(r) \cong V_1(r) = -\frac{4}{A r^2} \quad (25)$$

Dans le cas particulier de la théorie des paires d'électrons $\mu \cong 0$; la formule (25) est valable pour toutes les valeurs intéressantes

de r . Comme nous le verrons plus loin, la partie $V_1(r)$ du potentiel fournit des forces saturées qui n'ont aucun équivalent dans la théorie des paires de mésons de spin 0 (cf. II).

Intervalle II:

$$r \gg \frac{1}{\sqrt{\mu A}} \quad \text{soit} \quad \mu \gg \frac{1}{Ar^2}$$

Dans ce cas, l'utilisation de (20), (21) et (23) conduit à

$$V(r) = -\frac{2}{(Ar^2)^2\mu} + \frac{4}{A^2r^3} \left\{ \frac{1}{2\mu r} - \frac{1}{2\mu r} \int_{2\mu r}^{\infty} d\varrho \, i H_0^{(1)}(i\varrho) - i H_0^{(1)}(2i\mu r) \right\}$$

$$V(r) = -\frac{4}{A^2r^3} \left\{ i H_0^{(1)}(2i\mu r) + \frac{1}{2\mu r} \int_{2\mu r}^{\infty} d\varrho \, i H_0^{(1)}(i\varrho) \right\} \quad (26)$$

L'utilisation des développements asymptotiques des fonctions de Hankel pour $\mu r \gg 1$ permettra de poser, en nous bornant au terme principal

$$V(r) = -\frac{4}{A^2r^3} \cdot \frac{e^{-2\mu r}}{\sqrt{\pi\mu r}} \quad (\mu r \gg 1) \quad (27)$$

$V(r)$ correspond donc à une force attractive de portée $\sim 1/\mu$.

Réseau de nucléons.

Supposons que le volume de périodicité $V=L^3$ contienne $Z=N^3$ nucléons disposés en réseau cubique de maille a^3 , c'est-à-dire que \mathbf{x}_{si} est un multiple de $a=N/L$. (1) aura la forme

$$\{(\vec{\alpha} \cdot \mathbf{f}) + \beta\mu - \Omega\} \psi_{\mathbf{f}} + \frac{\lambda}{V} g_{\mathbf{f}}^* \beta \sum_{s=1}^Z \sum_{\mathbf{f}'} e^{i(\mathbf{f}-\mathbf{f}' \cdot \mathbf{x}_s)} g_{\mathbf{f}'} \psi_{\mathbf{f}'} = 0$$

La somme

$$\sum_{s=1}^Z e^{i(\mathbf{f}-\mathbf{f}' \cdot \mathbf{x}_s)}$$

n'est différente de zéro que si $\mathbf{f}-\mathbf{f}'$ appartient au réseau réciproque. Soit \mathbf{b}_h ($\mathbf{b}_{hi} = \frac{2\pi}{a} \mathbf{h}_i$) l'un de ces vecteurs, alors

$$\frac{1}{V} \sum_{s=1}^Z e^{i(\mathbf{f}-\mathbf{f}' \cdot \mathbf{x}_s)} = \begin{cases} a^{-3} & \text{si } \mathbf{f}' - \mathbf{f} = \mathbf{b}_h \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

Chacune des mailles du réseau réciproque (volume $\left(\frac{2\pi}{a}\right)^3$) contient $\left(\frac{L}{a}\right)^3 = Z$ points du réseau \mathfrak{f} . Le terme H' n'établit un couplage qu'entre les points équivalents de \mathfrak{f} . Par suite, le quotient du déterminant Δ par Δ_0 (cf. (2)) se réduit à un produit de Z fonctions du type

$$1_{\mathfrak{f}}(\Omega^2) = \{(1 + \lambda \mu F_{\mathfrak{f}}(\Omega^2))^2 - \lambda^2 \Omega^2 F_{\mathfrak{f}}^2(\Omega^2) + \lambda^2 \mathfrak{G}_{\mathfrak{f}}^2(\Omega^2)\}^2 \quad (29)$$

où

$$F_{\mathfrak{f}}(\Omega^2) = \sum_{s=1}^Z e^{-i(\mathfrak{f} \cdot \mathbf{x}_s)} \cdot \frac{1}{V} \sum_{\mathfrak{f}'} e^{i(\mathfrak{f}' \cdot \mathbf{x}_s)} \frac{|g_{\mathfrak{f}'}|^2}{\omega_{\mathfrak{f}'}^2 - \Omega^2}$$

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{f}}(\Omega^2) = \sum_{s=1}^Z e^{-i(\mathfrak{f} \cdot \mathbf{x}_s)} \frac{1}{V} \sum_{\mathfrak{f}'} \mathfrak{f}' e^{i(\mathfrak{f}' \cdot \mathbf{x}_s)} \frac{|g_{\mathfrak{f}'}|^2}{\omega_{\mathfrak{f}'}^2 - \Omega^2}$$

Définissons les fonctions $\varphi_{Z\mathfrak{f}}$

$$\varphi_{Z\mathfrak{f}}^2(\zeta) = \Delta_{\mathfrak{f}}(\zeta) \quad (30)$$

$\varphi_Z(\zeta)$ (2), s'écrira

$$\varphi_Z(\zeta) = \prod_{[\mathfrak{f}]} \varphi_{Z\mathfrak{f}}(\zeta) \quad (31)$$

$[\mathfrak{f}]$ désignant l'ensemble des points de \mathfrak{f} contenus dans une cellule du réseau réciproque. Dans $\varphi_{Z\mathfrak{f}}(\zeta)$ introduisons de nouveau κ lié à ζ par la relation $\zeta = \mu^2 + \kappa^2 = \mu^2 + \xi + i\eta$. Soit

$$\chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_{\pm} = \lim_{\eta = \pm 0} \frac{1}{V} \sum_{\mathfrak{f}'} e^{i(\mathfrak{f}' \cdot \mathbf{x}_s)} \frac{|g_{\mathfrak{f}'}|^2}{\mathfrak{f}'^2 - \kappa^2} \quad (32)$$

A la limite $V = \infty$, $\chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_{\pm}$ s'identifie avec $\chi(r_s, \kappa)_{\pm}$ (9), $r_s = |\mathbf{x}_s|$ remplaçant r dans (9). $F_{\mathfrak{f}}(\kappa)$ et $\mathfrak{G}_{\mathfrak{f}}(\kappa)$ s'écriront

$$F_{\mathfrak{f}}(\kappa) = \sum_{s=1}^Z e^{-i(\mathfrak{f} \cdot \mathbf{x}_s)} \cdot \chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_{\pm}$$

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{f}}(\kappa) = \sum_{s=1}^Z e^{-i(\mathfrak{f} \cdot \mathbf{x}_s)} \frac{1}{i} \text{grad}_s \chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_{\pm}$$

Dans $\mathfrak{G}_{\mathfrak{f}}(\kappa)$ le terme $s=1$ disparaît quand le nucléon $s=1$ est à l'origine ($\mathbf{x}_1 = 0$), ce que nous supposons dorénavant. Il vient pour $\varphi_{Z\mathfrak{f}}(\kappa)_{\pm}$

$$\varphi_{Z\mathfrak{f}}(\kappa)_{\pm} = 1 + 2\lambda\mu \left(\sum_{s=1}^Z e^{-i(\mathfrak{f} \cdot \mathbf{x}_s)} \chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_{\pm} \right) - \lambda^2 \kappa^2 \left(\sum_{s=1}^Z e^{-i(\mathfrak{f} \cdot \mathbf{x}_s)} \chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_{\pm} \right)^2 + \lambda^2 \left(\sum_{s=2}^Z e^{-i(\mathfrak{f} \cdot \mathbf{x}_s)} \frac{1}{i} \text{grad}_s \chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_{\pm} \right)^2 \quad (33)$$

Séparons dans les sommes s le terme $s = 1$ qui fournit la fonction $\varphi_1(\kappa)_{\pm}$

$$\begin{aligned} \varphi_{Z\mathfrak{f}}(\kappa)_{\pm} = \varphi_1(\kappa)_{\pm} + 2\lambda\mu \left(\sum_{s=2}^Z e^{-i(\mathfrak{f} \cdot \mathbf{x}_s)} \chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_{\pm} \right) \\ - \lambda^2 \kappa^2 \left\{ \left(\sum_{s=1}^Z e^{-i(\mathfrak{f} \cdot \mathbf{x}_s)} \chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_{\pm} \right)^2 - \frac{|g(\kappa)|^4}{(4\pi)^2} (A \pm i\kappa)^2 \right\} \\ + \lambda^2 \left(\sum_{s=2}^Z e^{-i(\mathfrak{f} \cdot \mathbf{x}_s)} \frac{1}{i} \text{grad}_s \chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_{\pm} \right)^2 \end{aligned} \quad (33a)$$

A la limite $a \rightarrow \infty$, Z constant, $V = Za^3 \rightarrow \infty$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \chi(r_s, \kappa)_{\pm} = 0 \quad \text{si } s \neq 1 \quad (r_s \neq 0)$$

Dans cette limite $\varphi_{Z\mathfrak{f}}(\kappa)_{\pm} = \varphi_1(\kappa)_{\pm}$ et il reste pour l'énergie

$$E_Z(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{A'} \frac{\kappa d\kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} 2 \sum_{[\mathfrak{f}]} \log \left(\frac{\varphi_1(\kappa)_+}{\varphi_1(\kappa)_-} \right) = ZE_1 \quad (34)$$

L'énergie du volume V est constituée par la somme des énergies propres des Z nucléons. L'énergie potentielle de V sera par définition

$$U_Z(a) = E_Z(a) - ZE_1 \quad (35)$$

Pour calculer $U_Z(a)$, définissons

$$U_{Z\mathfrak{f}}(a) = -\frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\kappa d\kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} \left\{ \log \left(\frac{\varphi_{Z\mathfrak{f}}(\kappa)_+}{\varphi_{Z\mathfrak{f}}(\kappa)_-} \right) - \log \left(\frac{\varphi_1(\kappa)_+}{\varphi_1(\kappa)_-} \right) \right\} \quad (36)$$

$$U_Z(a) = \sum_{[\mathfrak{f}]} U_{Z\mathfrak{f}} \quad (37)$$

Couplage très fort ($\lambda \rightarrow \infty$).

Conservons dans (33) les termes en λ^2 seulement

$$\begin{aligned} \varphi_{Z\mathfrak{f}}(\kappa)_{\pm} = -\lambda^2 \kappa^2 \left(\sum_{s=1}^Z e^{i(\mathfrak{f} \cdot \mathbf{x}_s)} \chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_{\pm} \right)^2 \\ + \lambda^2 \left(\sum_{s=2}^Z e^{-i(\mathfrak{f} \cdot \mathbf{x}_s)} \cdot \frac{1}{i} \text{grad}_s \chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_{\pm} \right)^2 \end{aligned} \quad (38)$$

On reconnaît facilement qu'il existe pour chaque $\varphi_{Z\mathfrak{f}}$ une valeur $\kappa_{\mathfrak{f}}$ telle que la partie réelle de $\varphi_{Z\mathfrak{f}}(\kappa)_{\pm}$ soit nulle

$$R\varphi_{Z\mathfrak{f}}(\kappa_{\mathfrak{f}})_{\pm} = 0 \quad (39)$$

Nous calculerons $\kappa_{\mathfrak{f}}$ plus loin et montrerons que l'on a pour a

suffisamment grand $|\kappa_{\mathfrak{f}} r_s| \ll 1$ (pour tout s). On vérifiera aisément d'après ce qui suit que la partie imaginaire de $\varphi_{Z\mathfrak{f}}$ en $\kappa_{\mathfrak{f}}$ vaut

$$\text{Imag } \varphi_{Z\mathfrak{f}}(\kappa_{\mathfrak{f}})_{\pm} \cong \mp \lambda^2 \kappa_{\mathfrak{f}}^2 \frac{1}{(4\pi)^2} 2A\kappa_{\mathfrak{f}} \quad (40)$$

autrement dit, comme pour $\varphi_2(\kappa)_{\pm}$ on aura à distinguer deux intervalles d'intégration

$$\begin{aligned} \kappa < \kappa_{\mathfrak{f}} \quad \arg \varphi_{Z\mathfrak{f}}(\kappa)_{-} &\cong \arg \varphi_{Z\mathfrak{f}}(\kappa)_{+} \cong 0 \\ \kappa > \kappa_{\mathfrak{f}} \quad \arg \varphi_{Z\mathfrak{f}}(\kappa)_{-} &\cong \arg \varphi_{Z\mathfrak{f}}(\kappa)_{+} + 2\pi \end{aligned} \quad (41)$$

Pour le calcul de $U_{Z\mathfrak{f}}$ la situation est la même que celle qui s'était présentée pour celui de $V(r)$, (17), (19) et fig. 1. Nous divisons l'intervalle d'intégration en deux parties, désignant par $U_{Z\mathfrak{f}}^{(1)}$ et $U_{Z\mathfrak{f}}^{(2)}$ les parties de $U_{Z\mathfrak{f}}$ qui en proviennent. Soit d'abord $U_{Z\mathfrak{f}}^{(1)}$ défini par

$$U_{Z\mathfrak{f}}^{(1)} = -\frac{1}{\pi i} \int_0^{\kappa_{\mathfrak{f}}} \frac{\kappa d\kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} \left\{ \log \left(\frac{\varphi_{Z\mathfrak{f}}(\kappa)_{+}}{\varphi_{Z\mathfrak{f}}(\kappa)_{-}} \right) - \log \left(\frac{\varphi_1(\kappa)_{+}}{\varphi_1(\kappa)_{-}} \right) \right\} \quad (42)$$

d'après (41) et (19) on a

$$\log \left(\frac{\varphi_{Z\mathfrak{f}}(\kappa)_{-}}{\varphi_{Z\mathfrak{f}}(\kappa)_{+}} \right) \cong 0 \quad \log \left(\frac{\varphi_1(\kappa)_{+}}{\varphi_1(\kappa)_{-}} \right) \cong -2\pi i \quad \text{pour } \kappa < \kappa_{\mathfrak{f}}$$

ce qui donne

$$U_{Z\mathfrak{f}}^{(1)} = -2(\sqrt{\mu^2 + \kappa_{\mathfrak{f}}^2} - \mu) \quad (43)$$

Soit d'autre part

$$U_{Z\mathfrak{f}}^{(2)} = U_{Z\mathfrak{f}} - U_{Z\mathfrak{f}}^{(1)} \\ U_{Z\mathfrak{f}}^{(2)} = -\frac{1}{\pi i} \int_{\kappa_{\mathfrak{f}}}^{\infty} \frac{\kappa d\kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} \left\{ \log \left(\frac{\varphi_{Z\mathfrak{f}}(\kappa)_{+}}{\varphi_{Z\mathfrak{f}}(\kappa)_{-}} \right) - \log \left(\frac{\varphi_1(\kappa)_{+}}{\varphi_1(\kappa)_{-}} \right) \right\} \quad (44)$$

Lorsque $\kappa > \kappa_{\mathfrak{f}}$, les arguments de $\varphi_{Z\mathfrak{f}}(\kappa)_{\pm}$ et $\varphi_1(\kappa)_{\pm}$ diffèrent peu. On a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varphi_{Z\mathfrak{f}}(\kappa)}{\varphi_1(\kappa)} \right)_{\pm} &= 1 + \frac{2 \left(\sum_{s=2}^Z e^{-i(\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{x}_s)} \chi(\mathfrak{x}_s, \kappa)_{\pm} \right)}{\frac{1}{4\pi} |g(\kappa)|^2 (A \pm i\kappa)} \\ &+ \frac{\left(\sum_{s=2}^Z e^{-i(\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{x}_s)} \chi(\mathfrak{x}_s, \kappa)_{\pm} \right)^2}{\left(\frac{1}{4\pi} \cdot |g(\kappa)|^2 (A \pm i\kappa) \right)^2} - \frac{\left(\sum_{s=2}^Z e^{-i(\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{x}_s)} \frac{1}{i} \text{grad}_s \chi(\mathfrak{x}_s, \kappa)_{\pm} \right)^2}{\kappa^2 \left(\frac{1}{4\pi} |g(\kappa)|^2 (A \pm i\kappa) \right)^2} \end{aligned} \quad (45)$$

Développons

$$\log \left(\frac{\varphi_{Z\bar{t}}(\kappa)}{\varphi_1(\kappa)} \right)_{\pm}$$

suivant

$$\frac{\chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_{\pm}}{\frac{1}{4\pi} |g(\kappa)|^2 (A \pm i\kappa)},$$

négligeons les termes d'ordre ≥ 3 et définissons

$$U_Z^{(2)} = \sum_{\bar{t}} U_{Z\bar{t}}^{(2)} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} U_Z^{(2)} = & -\frac{1}{\pi i} \sum_{\bar{t}} \int_{\kappa_{\bar{t}}}^{\infty} \frac{\kappa d\kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} \left\{ 2 \frac{\left(\sum_{s=2}^Z e^{-i(\bar{t} \cdot \mathbf{x}_s)} \chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_+ \right)}{\frac{1}{4\pi} |g(\kappa)|^2 (A + i\kappa)} \right. \\ & - 2 \frac{\left(\sum_{s=2}^Z e^{-i(\bar{t} \cdot \mathbf{x}_s)} \chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_- \right)}{\frac{1}{4\pi} |g(\kappa)|^2 (A - i\kappa)} \\ & - \left(\frac{\sum_{s=2}^Z e^{-i(\bar{t} \cdot \mathbf{x}_s)} \chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_+}{\frac{1}{4\pi} |g(\kappa)|^2 (A + i\kappa)} \right)^2 + \left(\frac{\sum_{s=2}^Z e^{-i(\bar{t} \cdot \mathbf{x}_s)} \chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_-}{\frac{1}{4\pi} |g(\kappa)|^2 (A - i\kappa)} \right)^2 \\ & - \left(\frac{\sum_{s=2}^Z e^{-i(\bar{t} \cdot \mathbf{x}_s)} \frac{1}{i} \operatorname{grad}_s \chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_+}{\frac{\kappa}{4\pi} |g(\kappa)|^2 (A + i\kappa)} \right)^2 \\ & \left. + \left(\frac{\sum_{s=2}^Z e^{-i(\bar{t} \cdot \mathbf{x}_s)} \frac{1}{i} \operatorname{grad}_s \chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_-}{\frac{\kappa}{4\pi} |g(\kappa)|^2 (A - i\kappa)} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

Une évaluation de l'erreur commise montre que l'on peut remplacer $\kappa_{\bar{t}}$ par 0 dans chacune des intégrales ci-dessus. (L'hypothèse $|\kappa_{\bar{t}} r_s| \ll 1$ est alors utilisée.) Remarquons de plus que

$$\begin{aligned} \sum_{[\bar{t}]} e^{-i(\bar{t} \cdot \mathbf{x}_s)} &= 0 \quad \text{si} \quad \mathbf{x}_s \neq 0 \\ \sum_{[\bar{t}]} e^{-i(\bar{t} \cdot \mathbf{x}_s + \mathbf{x}_{s'})} &= \begin{cases} Z & \text{si} \quad \mathbf{x}_s + \mathbf{x}_{s'} = 0 \pmod{L^1} \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \end{aligned} \quad (47)$$

¹⁾ $\mathbf{x}_s = 0 \pmod{L}$ signifie que les composantes de \mathbf{x}_s sont des multiples entiers de $L = V^{1/3}$.

Il vient pour $U_Z^{(2)}$

$$U_Z^{(2)} = \frac{Z}{2\pi i} \sum_{s>1} \int_0^\infty \frac{\kappa d\kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} \left\{ \frac{\chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_+ \cdot \chi(-\mathbf{x}_s, \kappa)_+}{\left(\frac{1}{4\pi} |g(\kappa)|^2 (A + i\kappa)\right)^2} - \frac{\chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_- \cdot \chi(-\mathbf{x}_s, \kappa)_-}{\left(\frac{1}{4\pi} |g(\kappa)|^2 (A - i\kappa)\right)^2} - \frac{(\text{grad}_s \chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_+ \cdot \text{grad}_s \chi(-\mathbf{x}_s, \kappa)_+)}{\left(\frac{\kappa}{4\pi} |g(\kappa)|^2 (A + i\kappa)\right)^2} + \frac{(\text{grad}_s \chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_- \cdot \text{grad}_s \chi(-\mathbf{x}_s, \kappa)_-)}{\left(\frac{\kappa}{4\pi} |g(\kappa)|^2 (A - i\kappa)\right)^2} \right\} \quad (48)$$

Calculons (47) en prenant pour valeur approximative de $\chi(\mathbf{x}_s, \kappa)$ celle obtenue en supposant $Z = \infty$, c'est-à-dire $\chi(r_s, \kappa)_\pm$ (cf. (9), $|\mathbf{x}_s| = r_s \gg 1/A$). De plus, posons au dénominateur $(A \pm i\kappa) \cong A$. Il vient

$$U_Z^{(2)}(a) = \frac{Z}{2} \sum_{s>1} \frac{8}{\pi A^2 r_s^3} \int_0^\infty \frac{d\kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} \left(\frac{\sin 2\kappa r_s}{2\kappa r_s} - \cos 2\kappa r_s \right) \quad (49)$$

La comparaison avec (23) montre que l'on a

$$U_Z^{(2)}(a) = \frac{Z}{2} \sum_{s>1} V_2(r_s) \quad (50)$$

Nous définirons

$$U_Z^{(1)}(a) = \sum_{[t]} U_{Zt}^{(1)}(a) = -2 \sum_{[t]} (\sqrt{\mu^2 + \kappa_t^2} - \mu) \quad (51)$$

ce qui donnera

$$U_Z(a) = U_Z^{(1)}(a) + U_Z^{(2)}(a) = -2 \sum_{[t]} (\sqrt{\mu^2 + \kappa_t^2} - \mu) + \frac{Z}{2} \sum_{s>1} V_2(r_s) \quad (52)$$

Pour discuter $U_Z(a)$ il nous faut calculer les κ_t définis par (39). Nous les déterminons approximativement en reprenant (38) où nous remplaçons de nouveau $\chi(\mathbf{x}_s, \kappa)_\pm$ par $\chi(r_s, \kappa)_\pm$ (9)¹⁾.

$$\begin{aligned} \kappa_t^2 R \left(\sum_{s=1}^Z e^{-i(\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}_s)} \cdot \chi(r_s, \kappa_t)_\pm \right)^2 \\ = R \left(\sum_{s=2}^Z e^{-i(\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}_s)} \cdot \frac{1}{i} \text{grad}_s \chi(r_s, \kappa_t)_\pm \right)^2 \end{aligned} \quad (53)$$

¹⁾ Cette substitution n'est strictement permise qu'à la limite $V = \infty$, $Z = \infty$. Cependant elle fournit une bonne approximation pour Z fini lorsque les points \mathbf{x}_s ne se trouvent pas dans le voisinage des surfaces du cube V centré à l'origine. La contribution de ces points n'est d'ailleurs pas notable puisque la somme du membre de droite converge rapidement et que la somme $\sum_{s=2}^Z \frac{e^{-i(\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}_s)}}{r_s}$ se révélera négligeable devant A .

Retournons à (9). Nous avons supposé $|\kappa_{\mathbf{f}} r_s| \ll 1$ et $A r_s \gg 1$, ce qui entraîne $e^{\pm i \kappa_{\mathbf{f}} r_s} \underline{\approx} 1$, $e^{-A r_s} \underline{\approx} 0$ et $|g(\kappa_{\mathbf{f}})| \underline{\approx} 1$. Il reste pour $s > 1$

$$\chi(r_s, \kappa_{\mathbf{f}}) \underline{\approx} \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r_s}$$

$$\text{grad } \chi(r_s, \kappa_{\mathbf{f}}) \underline{\approx} -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{e}_s}{r_s^2} \quad \left(\mathbf{e}_s = \frac{\mathbf{x}_s}{r_s} \right)$$

Séparons encore le terme $s = 1$ et négligeons $\kappa_{\mathbf{f}}$ devant A , on obtient

$$\kappa_{\mathbf{f}}^2 \left(A + \sum_{s=2}^Z \frac{e^{-i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}_s)}}{r_s} \right)^2 = - \left(\sum_{s=2}^Z e^{-i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}_s)} \cdot \frac{\mathbf{e}_s}{r_s^2} \right)^2 \equiv -(\mathbf{a}_{\mathbf{f}})^2 \quad (54)$$

Pour $\mathbf{f} = 0$ on a $\kappa_{\mathbf{f}} = 0$. Il reste à considérer les vecteurs $\mathbf{f} \neq 0$, c'est-à-dire $|\mathbf{f}| \gtrsim \frac{1}{L} = \frac{1}{a Z^{1/3}}$. Dans ce but soit

$$S = \sum_{s>1} \frac{e^{i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}_s)}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|} \quad (55)$$

Pour $\mathbf{x} = 0$ on retrouve la somme qui figure à côté de A , comme coefficient de $\kappa_{\mathbf{f}}^2$ dans (54) tandis que

$$\begin{aligned} (\text{grad}_{\mathbf{x}} S)_{\mathbf{x}=0} &= \sum_{s>1} \frac{e^{i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}_s)}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|^3} (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}) \\ &= \sum_{s>1} \frac{e^{i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}_s)}}{r_s^2} \mathbf{e}_s = \mathbf{a}_{\mathbf{f}} \end{aligned} \quad (56)$$

Suivant une méthode tirée de l'optique cristalline d'Ewald, nous diviserons S en deux parties

$$S = S_{\text{I}} + S_{\text{II}}$$

A la limite $Z = \infty$ on trouve (cf. p. ex. Born: Dynamik der Kristallgitter, formules 493 et suivantes)

$$S_{\text{I}} = \frac{4\pi}{a^3} \sum_{\mathbf{h}} \frac{e^{-\frac{\mathbf{f}_{\mathbf{h}}^2}{4E^2} + i(\mathbf{f}_{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{x})}}{|\mathbf{f}_{\mathbf{h}}|^2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^E e^{-x^2 \cdot s^2} ds \quad (55a)$$

$$S_{\text{II}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum'_s e^{i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}_s)} \int_{\mathbb{E}} e^{-(\mathbf{x}_s - \mathbf{x})^2 \cdot s^2} ds$$

$\mathbf{f}_{\mathbf{h}}$ désignant un vecteur du type

$$\mathbf{f}_{\mathbf{h}} = \mathbf{b}_{\mathbf{h}} + \mathbf{f}$$

E est un paramètre de séparation choisi convenablement. Lorsque $|\mathfrak{f}| \gtrsim \frac{1}{aZ^{1/3}}$, $S_{x=0}$ est de l'ordre de grandeur de $1/a$, ce qu'on voit facilement en choisissant $E = \frac{\gamma\pi}{2a}$ ($\gamma \sim 1$) de façon que le terme $h = 0$, $\mathfrak{f}_h = \mathfrak{f}$ soit le terme principal. A cause de $Aa \gg 1$, nous négligeons $S_{x=0}$ devant A dans (54), ce qui donne

$$\kappa_{\mathfrak{f}}^2 \simeq -\frac{1}{A^2} \alpha_{\mathfrak{f}}^2 \quad \text{pour } |\mathfrak{f}| \gtrsim \frac{1}{aZ^{1/3}} \quad (57)$$

On trouve d'abord en utilisant (47) et (56)

$$\sum_{[\mathfrak{f}]} \kappa_{\mathfrak{f}}^2 = -\frac{1}{A^2} \sum_{[\mathfrak{f}]} \alpha_{\mathfrak{f}}^2 = \frac{Z}{A^2} \cdot \sum_{s \geq 1} \frac{1}{r_s^4} \quad (58)$$

qui, évalué au moyen d'une intégrale, donne

$$\sum_{\mathfrak{f}} \kappa_{\mathfrak{f}}^2 = \frac{Z}{A^2 a^4} \cdot 4\pi\gamma' \quad (\gamma' \sim 1) \quad (58a)$$

Nous calculons $\alpha_{\mathfrak{f}}$ au moyen de (55a)

$$\alpha_{\mathfrak{f}} = (\text{grad}_x S)_{x=0} = \frac{4\pi}{a^3} \sum_h i\mathfrak{f}_h \frac{e^{-\frac{\mathfrak{f}_h^2}{4E^2}}}{|\mathfrak{f}_h|^2} + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_s' \mathfrak{x}_s e^{i(\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{x}_s)} \int_E^{\infty} e^{-\mathfrak{x}_s^2 \varepsilon} d\varepsilon$$

Le choix $E = \frac{\gamma\pi}{2a}$ nous permet d'évaluer $\alpha_{\mathfrak{f}}$ et $\kappa_{\mathfrak{f}}$ (57) à l'aide du premier terme de la somme h .

$$\alpha_{\mathfrak{f}} \simeq \frac{4\pi}{a^3} i\mathfrak{f} \frac{e^{-\frac{|\mathfrak{f}|^2}{4E^2}}}{|\mathfrak{f}|^2}$$

$$|\kappa_{\mathfrak{f}}| = \frac{4\pi}{a^3 A} \frac{e^{-\frac{\mathfrak{f}^2}{4E^2}}}{|\mathfrak{f}|} \quad \text{pour } |\mathfrak{f}| \gtrsim \frac{1}{aZ^{1/3}} \quad (59)$$

Remarquons que la valeur moyenne de $\kappa_{\mathfrak{f}}^2$ prise sur les Z points de la cellule $|\mathfrak{f}|$ est d'après (58a)

$$\overline{\kappa_{\mathfrak{f}}^2} = \frac{1}{A^2 a^4} \cdot 4\pi\gamma' \quad (60)$$

L'hypothèse $|\kappa_{\mathfrak{f}} r_s| \ll 1$ faite ci-dessus implique donc la condition

$$\overline{\kappa_{\mathfrak{f}}^2} (aZ^{1/3})^2 \ll 1 \quad (61)$$

ou encore

$$a \gg \frac{Z^{1/3}}{A}$$

Nous chercherons à retrouver dans $U_Z(a)$ des intervalles correspondant aux intervalles I et II de $V(r)$.

Intervalle I: Soit $\overline{\kappa_t^2} \gg \mu^2$, c'est-à-dire d'après (60) et (61)

$$\frac{Z^{1/3}}{A} \ll a \ll \frac{1}{\sqrt{\mu A}} \quad (62)$$

ce qui implique $A/\mu \gg Z^{2/3}$, condition réalisable dans la théorie des paires d'électrons où $\mu \leq 0$. D'après (51)

$$U_Z^{(1)}(a) = -2 \sum_{|t|} |\kappa_t|$$

que nous évaluons au moyen d'une intégrale en utilisant (59)

$$\begin{aligned} U_Z^{(1)}(a) &= -2 \frac{1}{A a^3} \int_0^B \frac{1}{|\mathfrak{f}|} e^{-\frac{|\mathfrak{f}|^2}{4E^2}} \cdot \frac{4\pi |\mathfrak{f}|^2 d|\mathfrak{f}|}{\frac{1}{(Z a^3)}} \\ &= -\frac{8\pi Z}{A} \int_0^B |\mathfrak{f}| e^{-\frac{|\mathfrak{f}|^2}{4E^2}} d|\mathfrak{f}| \end{aligned}$$

nous déterminons B par la condition

$$\frac{4\pi}{3} B^3 = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^3,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} U_Z^{(1)}(a) &= -\frac{16\pi Z}{A} \left(-\frac{e^{-\frac{|\mathfrak{f}|^2}{4E^2}}}{E^2} \Big|_0^B \right) \leq -\frac{16\pi Z}{A \cdot E^2} \\ &= -\frac{16\pi}{A a^2} \cdot \left(\frac{2}{\gamma\pi}\right)^2 \cdot Z \end{aligned}$$

le second terme de $U_Z(a)$ est

$$U_Z^{(2)}(a) = \frac{Z}{2} \sum_{s>1} V(r_s).$$

$V(r_s)$ a pour valeur maximale

$$\frac{8}{\pi A^2 r_s^3}$$

(cf. remarque de la page 9). On en conclut à l'aide de $Aa \gg Z^{1/3}$ (61) que $U_Z^{(2)}(a)$ est négligeable devant $U_Z^{(1)}(a)$ pour l'intervalle considéré. Il restera

$$U_Z(a) \leq U_Z^{(1)}(a) \leq -16\pi \left(\frac{2}{\gamma\pi}\right)^2 \cdot \frac{Z}{a^2 A} \quad (63)$$

L'énergie potentielle du volume V est négative et proportionnelle au nombre Z des nucléons. *Les forces sont attractives et saturées.* Le facteur de proportionnalité a^{-2} correspond bien à la dépendance en r du potentiel $V(r)$ de l'intervalle I (25). Remarquons que cet intervalle n'a aucun équivalent dans la théorie des paires de spin 0.

Intervalle II: Supposons $\overline{\kappa_t^2} \ll \mu^2$, c'est-à-dire

$$a \ll \frac{1}{\sqrt{A}\mu} \quad U_Z(a) \cong -2 \sum_{[t]} \frac{\kappa_t^2}{2\mu} + \frac{Z}{2} \cdot \sum_{s>1} V_2(r_s) \quad (64)$$

et d'après (58), (23a) et (26)

$$U_Z(a) \cong -\frac{Z}{2} \sum_{s=2}^Z \frac{4}{A^2 r_s^3} \left\{ i H_0^{(1)}(2 i \mu r_s) + \frac{1}{2 \mu r_s} \int_{2 \mu r_s}^{\infty} d \varrho i H_0^{(1)}(i \varrho) \right\} \quad (65)$$

$$U_Z(a) = \frac{Z}{2} \sum_{s>1} V(r_s) \quad (65a)$$

L'énergie est égale à la somme des énergies potentielles de toutes les paires de nucléons, résultat identique à celui que l'on obtient dans la théorie des paires de spin 0 pour l'intervalle correspondant (II). La formule (65) n'est d'ailleurs qu'une formule approchée puisque dans le développement de

$$\log \frac{\varphi_{Zt}(\kappa)}{\varphi_1(\kappa)}$$

(45) qui sert au calcul de (46), nous avons négligé les termes d'ordre ≥ 3 . Si l'on tient compte de ces termes, on obtient, comme dans la théorie scalaire, des forces multicorps (« Mehrkörperkräfte ») que nous avons négligées.

Nous calculons encore $U_Z(a)$ lorsque $a \rightarrow 0$. Dans ce but nous choisirons pour fonction g_t

$$|g_t| = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < B \\ 0 & \text{si } |t| > B \end{cases} \quad (66)$$

B étant introduit dans la théorie au même titre que A , $\frac{1}{B}$ sera interprété comme rayon du nucléon. Le choix de cette nouvelle fonction n'apporte pas de changement notable lorsque $a < \frac{\pi}{B}$ (cf. II). On calculera $E_Z(a)$ au moyen de (3) et de (31)

$$E_Z(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \sum_{[t]} \log \varphi_{Zt}(\zeta) \quad (67)$$

Si l'on utilise (28) dans le calcul des sommes sur s de (33), il vient (cf. 32)

$$\varphi_{Zt}(\kappa) = 1 + \frac{2\lambda\mu}{a^3} \sum_h \frac{|g_{t+b_h}|^2}{|\mathfrak{f}+b_h|^2 - \kappa^2} - \frac{\lambda^2 \kappa^2}{a^6} \left(\sum_h \frac{|g_{t+b_h}|^2}{|\mathfrak{f}+b_h|^2 - \kappa^2} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{a^6} \left(\sum_h \frac{(\mathfrak{f} + b_h) \cdot |g_{t+b_h}|^2}{|\mathfrak{f} + b_h|^2 - \kappa^2} \right)^2 \quad (68)$$

Choisissons pour cellule $[\mathfrak{f}]$ celle qui a pour centre l'origine

$$-\frac{\pi}{a} \leq \mathfrak{f}_i \leq \frac{\pi}{a}$$

Si l'on a $a \lesssim \pi/B$ alors d'après (66) $g_{t+b_h} = 0$ pour tout $b_h \neq 0$. Les sommes h qui figurent dans (68) se réduisent aux termes $h = 0$. Avec $\mu^2 + \kappa^2 = \Omega^2$ il vient

$$\varphi_{Zt}(\Omega^2) = \begin{cases} 1 + \left(\frac{2\lambda\mu}{a^3} + \frac{\lambda^2}{a^6} \right) \left(\frac{1}{\omega_t^2 - \Omega^2} \right) & \text{pour } |\mathfrak{f}| < B \\ 1 & \text{dans les autres cas.} \end{cases} \quad (69)$$

Cette fonction de $\zeta = \Omega^2$ n'a qu'une racine pour $|\mathfrak{f}| < B$

$$\Omega_t^2 = \omega_t^2 + \frac{2\lambda\mu}{a^3} + \frac{\lambda^2}{a^6}$$

et (67) donnera

$$E_Z(a) = -2 \sum_{|\mathfrak{f}| < B} (\Omega_t - \omega_t); \quad \Omega_t, \omega_t > 0$$

ou encore

$$E_Z(a) = -\frac{Z a^3}{\pi^2} \int_0^{\pi} dk \cdot k^2 \left(\sqrt{\omega_t^2 + \frac{2\lambda\mu}{a^3} + \frac{\lambda^2}{a^6}} - \omega_t \right) \quad (70)$$

Supposons que

$$\omega_B^2 = \mu^2 + B^2 \ll \frac{2\lambda\mu}{a^3} + \frac{\lambda^2}{a^6} \quad (71)$$

ce qui est toujours réalisable pour a suffisamment petit et $\mu \lesssim B$. Nous calculerons avec $\mu = 0$ et observerons que la condition (71) peut être remplacée par

$$a \ll \left(\frac{\lambda}{B} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (71a)$$

Lorsque le couplage est fort $\lambda B^2 \gg 1$, la condition $a \lesssim \pi/B$ que nous

avons admise, suffit pour garantir (71a). Il vient en ne conservant que les termes en λ et en λ^0

$$E_Z(a) \cong -\frac{Z a^3}{\pi^2} \int_0^B dk k^2 \left(\frac{\lambda}{a^3} - k \right)$$

$$E_Z(a) \cong -\frac{Z \lambda B^3}{3 \pi^2} + \frac{Z a^3 \cdot B^4}{4 \pi^2} \quad (72)$$

L'énergie potentielle de V est égale à

$$U_Z(a) = E_Z(a) - Z E_1$$

Les formules qui donnent E_1 avec la fonction particulière (66) se trouvent déjà dans le travail de JAUCH (I)¹). On trouve pour E_1

$$E_1 = -\frac{\lambda B^3}{3 \pi^2} + B \left(\frac{2}{3 \pi} \log (\lambda B^2) + \gamma \right) \quad \gamma \cong 0,8 \quad (73)$$

L'énergie potentielle de V sera

$$U_Z(a) = -Z \left\{ B \left[\frac{2}{3 \pi} \log (\lambda B^2) + \gamma \right] - \frac{a^3 B^4}{4 \pi^2} \right\}$$

Ce résultat, lorsque $a = 0$ coïncide avec celui de WIGNER, CRITCHFIELD et TELLER²). L'énergie de liaison d'un nucléon

$$-\frac{U_Z(a)}{Z} = B \left\{ \frac{2}{3 \pi} \log (\lambda B^2) + \gamma \right\} - \frac{B^4 a^3}{4 \pi^2} \quad (74)$$

est positive et de l'ordre de grandeur de B . Les forces décrites sont saturées et attractives. La formule (74) est d'ailleurs valable pour $a < B^{-1} \cong$ rayon du nucléon. Une comparaison entre (74) et (63)

¹) E_1 se compose de deux parties E_1' et E_1''

$$E_1 = E_1' + E_1''$$

E_1' provient du déplacement des niveaux compris entre 0 et $-B$. On évalue facilement E_1' à l'aide de (5) où l'on remplace $\varphi_Z(x)$ par $\varphi_1(x)$ (8); (cf. aussi (I) formule (4.4)). On trouve

$$E_1' = B \left\{ \frac{2}{3 \pi} \log (\lambda B^2) + \gamma \right\} \quad \gamma \cong 0,8 \dots$$

tandis que E_1'' calculé dans (I) § 7, et qui provient du déplacement de deux niveaux inférieurs $-B$ qui se détachent du spectre continu vaut (η est à remplacer par $\lambda/4 \pi^3$)

$$E_1'' = -\frac{\lambda B^3}{3 \pi^2}$$

²) Phys. Rev. **56**, p. 530 et suiv.

montre que dans cette région les forces sont beaucoup plus grandes que celles de l'intervalle I (62)

$$a \gg \frac{Z^{\frac{1}{2}}}{A}.$$

Par conséquent, si l'on veut identifier les forces nucléaires observées avec celles que nous avons calculées, la longueur B^{-1} ou A^{-1} doit être choisie de l'ordre de grandeur de leur portée, c'est-à-dire $\sim 10^{-13}$ cm. La théorie se révèle donc ici identique à la théorie scalaire (cf. II). En particulier, dans chacune de ces théories, la masse μ de la particule du champ ne joue aucun rôle pour autant que μ soit $\lesssim A$. A cet égard la théorie des paires d'électrons est tout aussi légitime que celle des paires de mésons. Par contre, la discussion de la diffusion des particules du champ par les nucléons exclut une théorie des paires de mésons, comme NELSON et OPPENHEIMER¹⁾ l'ont indiqué. En effet, la section de diffusion calculée d'après WEINBERG²⁾ est de l'ordre de grandeur de $1/A^2$, ce qui donne $\sim 10^{-26}$ cm² d'après ce qui précède. Les particules du champ ne peuvent donc pas être identifiées avec les mésons des rayons cosmiques, dont la section de diffusion est, comme on le sait, cent fois plus petite. En ce qui concerne la théorie des paires d'électrons, les expériences sur les anomalies de diffusion ne paraissent pas encore suffisamment concluantes pour permettre une comparaison avec la théorie.

En terminant ce travail, je me fais un plaisir de remercier Monsieur le Professeur WENTZEL qui m'en a proposé le sujet et qui m'a constamment guidé de ses conseils.

Institut de Physique de l'Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich.

¹⁾ Bulletin of the Amer. Phys. Soc. Dec. 1941, Vol. 16, N° 6.

²⁾ Phys. Rev. **59**, p. 776 (1941).

Zur Vektormesonentheorie¹⁾

von Gregor Wentzel.

(1. XI. 1943.)

Die symmetrische Vektortheorie mit dem allgemeinen, zweiparametrischen Kopplungsansatz (statische Näherung) wird für den Fall starker Kopplung untersucht. Die Rechnung verläuft verschieden, je nachdem ob das Verhältnis f/g der beiden Kopplungsparameter dem Betrage nach unterhalb oder oberhalb eines kritischen Wertes liegt (§ 11). Im ersten Falle sind die Ergebnisse wesentlich dieselben wie beim speziellen Kopplungsansatz $f = 0$ (keine Kopplung der longitudinalen Mesonen). Für beide Fälle werden abgeleitet: die Isobaren-Energie (§§ 9, 13), der Mesonstreuquerschnitt (§§ 10, 13) und die statischen Kernkräfte für grosse Abstände (§§ 15, 16).

A. Allgemeines zum Ein-Nucleon-Problem.

§ 1. Problemstellung.

Beim Vergleich der Feldtheorien der Kernkräfte mit der Erfahrung darf man bekanntlich nicht die mittels der Störungsmethode abgeleiteten Formeln zugrundelegen; die tatsächliche Stärke der Kernkräfte nötigt vielmehr zur Annahme einer so starken Kopplung zwischen Feld und Nucleonen, dass die Entwicklungen nach steigenden Potenzen der Kopplungsparameter unbrauchbar werden. Zuverlässigere Ergebnisse verspricht die Methode der Entwicklung nach *fallenden* Potenzen der Kopplungsparameter²⁾. Jedenfalls müssen die verschiedenen Varianten der Mesontheorie unter der Annahme einer *starken Kopplung* mathematisch durchdiskutiert sein, bevor man darangehen kann, sie anhand der Erfahrungsdaten einer mehr quantitativen Prüfung zu unterziehen.

Unter diesem Gesichtswinkel soll hier speziell die „*symmetrische Vektortheorie*“ in Angriff genommen werden. Es handelt sich also um Mesonen vom Spin 1 und mit den Ladungen ± 1 und 0, die mit Nucleonen (Proton-Neutronen) stark gekoppelt sind, und zwar wird sowohl für die longitudinal- als für die transversal-polarisierten Mesonen eine Kopplung angenommen, d. h. es wird der *allgemeinste* relativistisch zulässige *Wechselwirkungsansatz* ge-

¹⁾ Herrn A. SOMMERFELD zu seinem 75. Geburtstag gewidmet.

²⁾ G. WENTZEL, Helv. Phys. Acta **13**, S. 269, 1940 (im Folgenden als „I“ zitiert), ebenda **14**, S. 633, 1941 („II“), **15**, S. 685, 1942 („III“) und **16**, S. 222, 1943 („IV“). Weitere Zitate in der nächsten Fussnote.

macht. Dagegen wird durchweg nur die *statische Näherung* behandelt, d. h. die Nucleonen werden als unendlich schwer und ruhend betrachtet.

Die *Näherungsmethode* ist dieselbe, die sich bereits in der Skalartheorie bewährt hat (I, II). Die kompliziertere Struktur der Vektorthorie bedingt freilich in einigen Schritten der Rechnung eine etwas abweichende Darstellung. Dies betrifft namentlich den in den früheren Arbeiten eingeführten Gitterraum, dessen Verwendung in der Vektorthorie ganz unzweckmässig wäre. Die Einführung des Gitterraumes bedeutet nämlich die Entwicklung der Feldfunktionen nach einem speziellen Orthogonalfunktionensystem, welches dem Wechselwirkungstypus der Skalartheorie angepasst ist. Jeder Kopplungstypus stellt aber seine besonderen Anforderungen an das zweckmässig zu verwendende Orthogonalsystem, dessen Wahl im übrigen noch weitgehend der Willkür überlassen bleibt (vgl. §§ 3 und 14)¹⁾. Hiermit hängt zusammen, dass man insbesondere über die *Formfunktion des Nucleons* noch willkürlich verfügen kann, während die Einführung des Gitterraumes auch in dieser Hinsicht eine Spezialisierung bedeutet. In der Skalartheorie, wo man in den Endformeln (statische Näherung) ohne Schwierigkeit den Grenzübergang zum ausdehnungslosen Nucleon vollziehen kann (vgl. II), ist diese Beschränkung der Allgemeinheit von geringerer Bedeutung. Anders in der Vektorthorie (und übrigens auch in der Pseudoskalartheorie; vgl. IV), wo man mit einem nicht-verschwindenden Protonradius a zu rechnen gezwungen ist, weil der Grenzübergang $a \rightarrow 0$ zu absurden Folgerungen führen würde (schon in der statischen Näherung; z. B. geht die Isobaren-Anregungsenergie mit a gegen 0). Dies ist ein Mangel, der vermutlich allen Feldtheorien anhaftet, die spin-abhängige Kernkräfte liefern. Wir müssen diesen Mangel in Kauf nehmen, werden aber dann Wert darauf zu legen haben, dass die Freiheit in der Wahl der Formfunktion des Protons nicht unnötig eingeschränkt wird.

Das Vektormesonfeld der symmetrischen Theorie besteht aus 3 reellen Vektorfeldern $\vec{\psi}_\varrho(x)$ mit den 9 räumlichen Komponenten $\psi_{k\varrho}(x)$ ($k = 1, 2, 3$; $\varrho = 1, 2, 3$); der Index ϱ bezieht sich auf den „isotopen Spin“. $\pi_{k\varrho}(x)$ sei die zu $\psi_{k\varrho}(x)$ kanonisch konjugierte

¹⁾ Schon in den Rechnungen von OPPENHEIMER und SCHWINGER, deren Ergebnisse in Phys. Rev. **60**, S. 150, 1941, kurz zusammengefasst sind, wurde ein solches allgemeineres Orthogonalfunktionensystem verwendet; desgleichen in einer — hier bisher nicht erhältlichen — Arbeit von PAULI über die symmetrische Pseudoskalartheorie (Phys. Rev. 1942?). Diese Angaben verdanke ich Briefen von Herrn W. PAULI an Herrn M. FIERZ und an mich selbst.

Feldfunktion. Dann lautet die Hamiltonfunktion des kräftefreien Mesonfeldes bekanntlich:

$$H^0 = \frac{1}{2} \sum_e \int dX \left\{ |\vec{\pi}_e|^2 + \frac{1}{\mu^2} (\operatorname{div} \vec{\pi}_e)^2 + \mu^2 |\vec{\psi}_e|^2 + |\operatorname{rot} \vec{\psi}_e|^2 \right\}. \quad (1.1)$$

μ ist die Mesonruhmase in reziproken Längen ausgedrückt (\hbar und c werden immer $= 1$ gesetzt). Den Wechselwirkungsterm der Hamiltonfunktion schreiben wir sogleich in statischer Näherung an, und zwar vorerst nur für das *Ein-Nucleon-Problem*: Es befinde sich ein einziges (ruhendes) Nucleon im Ursprung; seine Formfunktion sei δ_a :

$$\delta_a(x) = \text{reelle Funktion von } |x|, \quad \int dX \delta_a(x) = 1. \quad (1.2)$$

Die Pauli'schen Spinmatrizen des Nucleons werden mit σ_i , die analogen isotopen Spinmatrizen mit τ_e bezeichnet. Die Hamiltonfunktion schreibt sich dann¹⁾:

$$H = H^0 + H' + H'', \quad (1.3)$$

$$H' = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{ie} \sigma_i \tau_e \int dX \delta_a(x) \operatorname{rot}_i \vec{\psi}_e \\ - f \sum_e \tau_e \int dX \delta_a(x) \operatorname{div} \vec{\pi}_e;$$

H'' ist ein Term $\sim f^2$, der aber im Ein-Nucleon-Problem konstant ist und ignoriert werden kann: $H'' = 0$. Die Dimensionen der (reellen) Kopplungsparameter sind: g = Länge, f = Fläche.

§ 2. Methode.

Unser Näherungsverfahren beruht auf folgendem Grundgedanken: H' ist, infolge der bilinearen Abhängigkeit von den zweireihigen Matrizen σ_i, τ_e , eine 4-reihige Matrix bezüglich der Spin- und isotopen Spin-Indices des Nucleons. Diese 4-reihige Matrix werde zunächst durch Transformation mit einer unitären Matrix S diagonal gemacht; wie sich zeigen wird, kann das Ergebnis wie folgt geschrieben werden:

$$S^* H' S = -\gamma \{ y_1 \tau_3 + y_2 \sigma_3 + y_3 \sigma_3 \tau_3 \}, \quad (2.1)$$

wo σ_3 und τ_3 diagonal gewählt sind (Eigenwerte ± 1); γ ist eine

¹⁾ Vgl. G. WENTZEL, Quantentheorie der Wellenfelder, Deuticke 1943 (im Folgenden zitiert als QdW), § 14; die dort für die nicht-symmetrische Theorie ($\vec{\psi}_3 = 0$) angegebenen Formeln sind leicht gemäss der symmetrischen Theorie (s. § 10 daselbst) zu ergänzen.

positive Konstante, und die y_n sind in noch zu bestimmender Weise von den Feldfunktionen ψ, π abhängig. Die Eigenwerte von H' sind also:

$$\left. \begin{aligned} \gamma \lambda_0 &= \gamma (-y_1 - y_2 - y_3) & (\tau_3 = +1, \sigma_3 = +1), \\ \gamma \lambda_1 &= \gamma (-y_1 + y_2 + y_3) & (\tau_3 = +1, \sigma_3 = -1), \\ \gamma \lambda_2 &= \gamma (+y_1 - y_2 + y_3) & (\tau_3 = -1, \sigma_3 = +1), \\ \gamma \lambda_3 &= \gamma (+y_1 + y_2 - y_3) & (\tau_3 = -1, \sigma_3 = -1). \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Werden die $y_n \geq 0$ gewählt, so ist $\gamma \lambda_0$ der tiefste Eigenwert (ausser wenn zwei der y_n verschwinden, welchen Fall wir ausschliessen können). In der Schrödingergleichung

$$(-E + H) F = 0 \quad (2.3)$$

substituieren wir für die (4-komponentige) Schrödingerfunktion F :

$$F = S \cdot F' \quad (2.4)$$

Die transformierte Schrödingergleichung lässt sich dann, da S mit den y_n kommutiert, folgendermassen schreiben:

$$\left. \begin{aligned} S^* (-E + H^0 + H') S F' \\ \equiv (-E + S^* \{ H^0 - \gamma \sum_n y_n \} S \\ + \gamma \{ y_1 (1 - \tau_3) + y_2 (1 - \sigma_3) + y_3 (1 - \sigma_3 \tau_3) \}) F' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Die Grösse

$$H^0 - \gamma \sum_n y_n = K \quad (2.6)$$

hat, als Funktion der Feldvariablen, ein *Minimum* (ebenso auch $S^* K S$), und im Falle starker Kopplung genügt es, kleine Schwingungen um diese Minimallage zu betrachten. Die dieser Minimallage entsprechenden Werte der γy_n sind bei starker Kopplung sehr gross; genauer gesagt: mindestens zwei der Energieterme γy_n sind sehr gross gegen die zu betrachtenden Anregungsenergien der kleinen Schwingungen. Wir denken uns nun die der Schrödingergleichung (2.5) entsprechenden Komponentengleichungen einzeln angeschrieben und beachten, dass die Diagonalmatrix

$$\gamma \{ y_1 (1 - \tau_3) + y_2 (1 - \sigma_3) + y_3 (1 - \sigma_3 \tau_3) \}$$

folgende Diagonalkomponenten hat:

$$\begin{array}{ll} 0 & \text{für } \tau_3 = +1, \sigma_3 = +1; \\ 2\gamma(y_2 + y_3) & \text{für } \tau_3 = +1, \sigma_3 = -1; \\ 2\gamma(y_3 + y_1) & \text{für } \tau_3 = -1, \sigma_3 = +1; \\ 2\gamma(y_1 + y_2) & \text{für } \tau_3 = -1, \sigma_3 = -1. \end{array}$$

Im Limes unendlich starker Kopplung (z. B. $g \rightarrow \infty$) gehen diese 4 Komponenten über in $0, \infty, \infty, \infty$. Die Eigenwerte E der Gleichung (2.5) zerfallen in 2 Gruppen, die in diesem Limes unendlich weit auseinanderliegen, und man erkennt leicht, dass die Eigen-

werte der tiefliegenden Gruppe durch eine *einkomponentige* Schrödingergleichung bestimmt werden, die wir wie folgt schreiben:

$$(-E + (S^* K S)_{00}) F'_0 = 0; \quad (2.7)$$

dabei bedeutet F'_0 diejenige der 4 Komponenten von F' , welche den Werten $\tau_3 = +1, \sigma_3 = +1$ der Spin- und isotopen Spin-Indices entspricht (d. h. dem Eigenwert $\gamma \lambda_0$ von H'), und analog ist unter $(S^* K S)_{00}$ dasjenige Diagonalelement der vierreihigen Matrix $S^* K S$ zu verstehen, das zu den Werten $\tau_3 = +1, \sigma_3 = +1$ gehört (K ist durch (2.6) definiert). Das Gesagte gilt streng im Limes unendlich starker Kopplung, *angenähert* aber auch bei endlicher, immer noch starker Kopplung; was dabei unter „starker Kopplung“ zu verstehen ist, kann erst später präzisiert werden (vgl. (5.13)). In der Tat zerfallen auch dann noch die Eigenwerte E in zwei Gruppen, die so weit auseinanderliegen, dass man sich nur für die tiefliegende Gruppe zu interessieren braucht, und diese tiefliegenden Eigenwerte bestimmen sich näherungsweise durch die *einkomponentige* Schrödingergleichung (2.7), vorausgesetzt, dass die Ausserdiagonalelemente $(S^* K S)_{0m}$ der Matrix $S^* K S$ klein sind gegen die nicht-verschwindenden Grössen γy_n (bzw. gegen deren Werte in der Minimallage), was bei starker Kopplung zutrifft (vgl. § 8). Von (2.7) ausgehend, kann man leicht durch eine Störungsrechnung zu sukzessiv verbesserten Approximationen gelangen, was auf eine Entwicklung nach fallenden Potenzen der Kopplungsparameter hinausläuft¹⁾. Alle für die Theorie charakteristischen Aussagen sind aber schon aus (2.7) zu gewinnen, und wir beschränken uns deshalb in allem Folgenden auf diese Näherung. Die Hauptaufgabe reduziert sich dann auf die Berechnung des massgebenden Matrixelementes (0,0) der Matrix $S^* K S = S^* (H^0 - \gamma \sum_n y_n) S$, wofür in erster Linie die Grössen y_n sowie die Matrix S aus (2.1) zu bestimmen sind.

§ 3. Einführung passender Feldvariablen.

Die reellen Ortsfunktionen $U_s(x)$ ($s = 1 \cdots \infty$) mögen ein vollständiges Orthogonalsystem bilden:

$$\int dX U_r(x) U_s(x) = \delta_{rs}, \quad \sum_s U_s(x) U_s(x') = \delta(x - x').^2) \quad (3.1)$$

¹⁾ Für die Skalartheorie wurde die Störungsrechnung in I, § 6 skizziert. In den dortigen Formeln (54) bis (57) (mit (29)) ist die den obigen Gleichungen (2.4 ff) entsprechende S-Transformation durchgeführt.

²⁾ \sum soll andeuten, dass die unter dem Σ -Zeichen stehenden Indices von 1 bis ∞ laufen, während sonst nur über 1, 2, 3 summiert wird.

Anstelle der Feldfunktionen $\psi_{k\varrho}(x)$, $\pi_{k\varrho}(x)$ führen wir neue kanonische Variable q , p ein durch die Formeln

$$\left. \begin{aligned} \psi_{k\varrho}(x) &= \sum_s^\infty U_s(x) q_{sk\varrho}, \quad \pi_{k\varrho}(x) = \sum_s^\infty U_s(x) p_{sk\varrho}, \\ q_{sk\varrho} &= \int dX U_s(x) \psi_{k\varrho}(x), \quad p_{sk\varrho} = \int dX U_s(x) \pi_{k\varrho}(x). \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

In den neuen Variablen ausgedrückt lautet H^0 (1.1):

$$H^0(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{rs} \sum_{kl\varrho} (A_{rk,sl} p_{rk\varrho} p_{sl\varrho} + B_{rk,sl} q_{rk\varrho} q_{sl\varrho}), \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{rk,sl} &= \int dX U_r \left(\delta_{kl} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \right) U_s, \\ B_{rk,sl} &= \int dX U_r \left(\delta_{kl} (\mu^2 - \Delta) + \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \right) U_s. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Um andererseits für H' eine möglichst einfache Darstellung zu erhalten, wählen wir die Funktionen U_1 , U_2 , U_3 wie folgt:

$$U_i(x) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \delta_a(x)}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3); \quad (3.5)$$

dabei bestimmt sich η durch die Normierungsbedingung $\int dX U_i^2 = 1$:

$$\eta^2 = \int dX \left(\frac{\partial \delta_a(x)}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{1}{3} \int dX \delta_a(x) (-\Delta) \delta_a(x); \quad (3.6)$$

η ist von der Grössenordnung $a^{-5/2}$. Die 3 Funktionen (3.5) sind offenbar aufeinander orthogonal. U_4 , U_5 , ... brauchen wir dann nur den Bedingungen (3.1) zu unterwerfen; eine genauere Kenntnis dieser Funktionen wird nicht vonnöten sein. Mit (3.2 und 5) wird

$$\begin{aligned} \int dX \delta_a(x) \operatorname{rot}_1 \tilde{\psi}_\varrho &= -\eta \int dX (U_2 \psi_{3\varrho} - U_3 \psi_{2\varrho}) = -\eta (q_{23\varrho} - q_{32\varrho}), \\ \int dX \delta_a(x) \operatorname{div} \tilde{\pi}_\varrho &= -\eta \int dX \sum_i U_i \pi_{i\varrho} = -\eta \sum_i p_{i\varrho}; \end{aligned}$$

also nach (1.4):

$$\begin{aligned} H' &= \eta \left\{ \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_\varrho \tau_\varrho [\sigma_1 (q_{23\varrho} - q_{32\varrho}) + \sigma_2 (q_{31\varrho} - q_{13\varrho}) + \sigma_3 (q_{12\varrho} - q_{21\varrho})] \right. \\ &\quad \left. + f \sum_\varrho \tau_\varrho \sum_i p_{i\varrho} \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Weiter definieren wir für $i = 1, 2, 3$:

$$\left. \begin{aligned} q_{(ik)e} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (q_{ik_e} + q_{ki_e}), & q_{[ik]e} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (q_{ik_e} - q_{ki_e}), \\ p_{(ik)e} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p_{ik_e} + p_{ki_e}), & p_{[ik]e} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p_{ik_e} - p_{ki_e}). \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Für $i \neq k$ definieren diese Formeln neue kanonische Variablenpaare $q_{(ik)e}$, $p_{(ik)e}$ bzw. $q_{[ik]e}$, $p_{[ik]e}$, die wir gelegentlich auch als eigentliche kanonische Koordinaten verwenden werden; die Definitionsformeln (3.8) sollen aber auch für $i = k$ gelten. Allgemein verwenden wir bezüglich beliebiger Grössen a, b die Bezeichnungen:

$$\left. \begin{aligned} a_{(ik)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{ik} + a_{ki}), & a_{[ik]} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{ik} - a_{ki}), \\ a_{(i} b_{k)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_i b_k + a_k b_i), & a_{[i} b_{k]} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_i b_k - a_k b_i). \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Z. B. wird nach (3.4), bei Berücksichtigung von (3.1 und 5):

$$A_{[ik],sl} = \delta_{s[i} \delta_{k]l} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta_{si} \delta_{kl} - \delta_{sk} \delta_{il}) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.10)$$

Beachtet man dies, so schreiben sich die p -abhängigen Terme in H^0 (3.3) mit den Variablen (3.8) wie folgt:¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{rs} \sum_{kl_e} A_{rk,sl} p_{rk_e} p_{sl_e} &= \frac{1}{2} \sum_{rs}'' \sum_{kl_e} A_{rk,sl} p_{rk_e} p_{sl_e} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_s' \sum_{ikl_e} A_{(ik),sl} p_{(ik)e} p_{sl_e} + \frac{1}{8} \sum_{ijk} A_{(ik),(jl)} p_{(ik)e} p_{(jl)e} \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{ik_e} p_{[ik]e}^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Für die q -abhängigen Terme in H^0 gilt eine ähnliche Formel, doch wird diese im Folgenden nicht gebraucht. Schliesslich führen wir die Variablen (3.8) auch in H' (3.7) ein; schreiben wir zur Abkürzung

$$q_{[23]e} = q_{1e}, \quad q_{[31]e} = q_{2e}, \quad q_{[12]e} = q_{3e}, \quad (3.12)$$

so wird

$$H' = \eta \left\{ g \sum_{i_e} \sigma_i \tau_e q_{ie} + f \sum_{i_e} \tau_e p_{ii_e} \right\}. \quad (3.13)$$

¹⁾ Ein Strich am Summenzeichen deutet an, dass die Indexwerte 1, 2, 3 auszulassen sind:

$$\sum_s' = \sum_{s=4}^{\infty}, \quad \sum_{rs}'' = \sum_{r=4}^{\infty} \sum_{s=4}^{\infty}$$

Alternativ führen wir folgende Bezeichnungsweise ein: $\langle jk \rangle$ be-
deute den zyklisch zu j, k gehörigen Index, also $\langle 23 \rangle = 1$, $\langle 31 \rangle = 2$,
 $\langle 12 \rangle = 3$; dann schreibt sich (3.7) oder (3.13): ¹⁾

$$H' = \eta \left\{ g \sum_{\langle jk \rangle e} \sigma_{\langle jk \rangle} \tau_e q_{[jk]e} + f \sum_{ie} \tau_e p_{ii e} \right\}. \quad (3.14)$$

Zur Verwendung im Folgenden definieren wir hier noch
Größen $\bar{A}_{sl, rk}$, $\bar{B}_{sl, rk}$ durch die Formeln:

$$\sum_s \sum_l A_{rk, sl} \bar{A}_{sl, r'k'} = \sum_s \sum_l B_{rk, sl} \bar{B}_{sl, r'k'} = \delta_{rr'} \delta_{kk'}; \quad (3.15)$$

es sind also \bar{A}, \bar{B} die zu den Matrizen A, B inversen Matrizen.
Dieser Forderung entsprechen die folgenden Ansätze:

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{sl, rk} &= \int dX U_s \left(\delta_{lk} + \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} \frac{1}{\mu^2 - \Delta} \right) U_r, \\ \bar{B}_{sl, rk} &= \int dX U_s \left(\delta_{lk} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} \right) \frac{1}{\mu^2 - \Delta} U_r, \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

wo der Operator $(\mu^2 - \Delta)^{-1}$ in bekannter Weise definiert ist durch

$$\frac{1}{\mu^2 - \Delta} U(x) = \int dX' U(x') \frac{e^{-\mu |x' - x|}}{4\pi |x' - x|} \quad (3.17)$$

(die Operationen $(\mu^2 - \Delta)^{-1}$ und $\partial/\partial x_k$ sind in der Reihenfolge
vertauschbar). Dass die Relationen (3.15) mit (3.4 und 16) erfüllt
sind, verifiziert man leicht auf Grund der Identität:

$$\sum_l \left(\delta_{kl} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \right) \left(\delta_{lk'} + \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_{k'}} \frac{1}{\mu^2 - \Delta} \right) = \delta_{kk'}.$$

Eine besondere Rolle spielen im Folgenden die Größen $\bar{B}_{[ij], rk}$
($j = 1, 2, 3$). Beachtet man (3.5), so ergibt sich aus (3.16):

$$\bar{B}_{[ij], rk} = \delta_{kl} C_{jr}, \quad \text{wo } C_{jr} = \int dX U_j \frac{1}{\mu^2 - \Delta} U_r. \quad (3.18)$$

Speziell für $r = i$ ($= 1, 2, 3$) wird nach (3.5) und (1.2) aus Sym-
metriegründen $C_{ji} = \delta_{ji} \cdot C$, also

$$\bar{B}_{[ij]ik} = C \cdot \delta_{kl} \delta_{ji}, \quad C = C_{11} = \frac{1}{3} \frac{1}{\eta^2} \int dX \delta_a(x) \frac{-\Delta}{\mu^2 - \Delta} \delta_a(x). \quad (3.19)$$

¹⁾ In der Summe $\sum_{\langle jk \rangle}$ kommt natürlich jede Indexkombination j, k ($j \neq k$)
nur einmal vor; es ist also $\sum_{\langle jk \rangle} = \frac{1}{2} \sum_{jk}$.

B. Spezieller Kopplungsansatz: $\mathbf{f} \doteq 0$.**§ 4. Die Eigenwerte von H' .**

Für $f = 0$ haben wir nach (3.13):

$$H' = \gamma \sum_i \sigma_i \tau_e q_{ie}, \quad \text{mit } \gamma = \eta g. \quad (4.1)$$

Um diese 4-reihige Matrix, gemäss dem in § 2 skizzierten Programm, auf Diagonalform zu transformieren, führen wir zunächst einige Hilfsgrössen ein. Wir betrachten die zwei symmetrischen Tensoren

$$T_{e\sigma} = \sum_i q_{ie} q_{i\sigma}, \quad T'_{ij} = \sum_e q_{ie} q_{je} \quad (e, \sigma, i, j = 1, 2, 3). \quad (4.2)$$

Man erkennt leicht, dass beide Tensoren die gleichen (positiven) Eigenwerte haben; wir nennen diese r_n^2 ($n = 1, 2, 3$) und bezeichnen die zugehörigen normierten Eigenvektoren mit s_n (Komponenten s_{en}) bzw. s'_n (Komponenten s'_{in}):

$$\sum_{\sigma} T_{e\sigma} s_{\sigma n} = r_n^2 s_{en}, \quad \sum_j T'_{ij} s'_{jn} = r_n^2 s'_{in}; \quad (4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_e s_{en} s_{em} &= \delta_{nm}, & \sum_i s'_{in} s'_{im} &= \delta_{nm}, \\ \sum_n s_{en} s_{\sigma n} &= \delta_{e\sigma}, & \sum_n s'_{in} s'_{jn} &= \delta_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Die Eigenvektoren s_n und s'_n hängen wie folgt zusammen:

$$s_{en} = \frac{1}{r_n} \sum_i s'_{in} q_{ie}, \quad s'_{in} = \frac{1}{r_n} \sum_e s_{en} q_{ie}.$$

Wegen (4.4) folgt hieraus:

$$q_{ie} = \sum_n r_n s'_{in} s_{en}. \quad (4.5)$$

In dieser Weise können also die 9 Grössen q_{ie} durch die Eigenwerte und Eigenvektoren der Tensoren T, T' dargestellt werden.

Wir setzen (4.5) in (4.1) ein:

$$H' = \gamma \sum_n r_n \left(\sum_i \sigma_i s'_{in} \right) \left(\sum_e \tau_e s_{en} \right). \quad (4.6)$$

Da die Koeffizientenschemata s_{en} bzw. s'_{in} Drehungen im dreidimensionalen Raum darstellen, kann man bekanntlich unitäre Matrizen Y, Y' konstruieren mit den Eigenschaften:

$$\sum_e \tau_e s_{en} = Y \tau_n Y^*, \quad \sum_i \sigma_i s'_{in} = Y' \sigma_n Y'^*. \quad (4.7)$$

Da Y nur von den τ_e , Y' nur von den σ_i abhängt, gilt: $[Y, \sigma_i] = 0$, $[Y', \tau_e] = 0$, $[Y, Y'] = 0$. Folglich gibt (4.6) mit (4.7):

$$H' = \gamma \cdot Y Y' \cdot \sum_n r_n \sigma_n \tau_n \cdot (Y Y')^*. \quad (4.8)$$

Es bleiben also nur noch die 3 Matrizen $\sigma_n \tau_n$ simultan diagonal zu machen. Dazu kann z. B. die unitäre Matrix

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1 + i \tau_2) \quad (4.9)$$

dienen; in der Tat verifiziert man leicht:

$$\sigma_1 \tau_1 = -Z \tau_3 Z^*, \quad \sigma_2 \tau_2 = -Z \sigma_3 Z^*, \quad \sigma_3 \tau_3 = -Z \sigma_3 \tau_3 Z^* \quad (4.10)$$

(σ_3 und τ_3 seien wieder diagonal gewählt). Hiermit wird (4.8):

$$H' = -\gamma S (r_1 \tau_3 + r_2 \sigma_3 + r_3 \sigma_3 \tau_3) S^*, \quad \text{mit } S = Y Y' Z. \quad (4.11)$$

Dies stimmt mit (2.1) überein, wo

$$y_n = r_n \quad (4.12)$$

zu setzen ist. Die Eigenwerte von H' lassen sich also, wie behauptet, in der Form (2.2) darstellen, wo die $y_n = r_n$ als Quadratwurzeln der Eigenwerte der Tensoren (4.2) zu berechnen sind. Die Betrachtungen im § 2 setzen übrigens noch voraus, dass die $r_n \geq 0$ gewählt werden, ferner $\gamma = \eta g > 0$, was durch Wahl des Vorzeichens von η , d. h. des Normierungsfaktors in (3.5), zu erreichen ist.

§ 5. Minimallagen. Bedingung für starke Kopplung.

Die in (2.6) definierte Funktion K lautet jetzt, mit (4.12):

$$K = H^0 - \gamma \sum_n r_n. \quad (5.1)$$

In H^0 denken wir uns gemäss (3.8) die Variablen $q_{(ik)e}$ und $q_{[ik]e}$ eingeführt, wobei wir die $q_{[ik]e}$ oder q_{ie} (vgl. (3.12)) gemäss (4.5) durch die r_n ausgedrückt denken:

$$q_{[ik]e} = \sum_n r_n s'_{\langle ik \rangle n} s_{en} \quad (5.2)$$

(bezüglich der Bezeichnung $\langle ik \rangle$ vgl. (3.14)). Wir suchen nun das Minimum von K als Funktion der Variablen q_{sl_e} und r_n , wobei die $q_{[ik]e}$ mit den r_n durch (5.2) verknüpft sind; s_{en} und s'_{in} gelten hierbei als konstant. Führen wir den Nebenbedingungen

(5.2) entsprechende Lagrange-Multiplikatoren $\alpha_{\langle ik \rangle q}$ ein, so haben wir also das Variationsproblem:

$$dK - \sum_{\langle ik \rangle q} \alpha_{\langle ik \rangle q} \cdot d(q_{[ik]q} - \sum_n r_n s'_{\langle ik \rangle n} s_{qn}) = 0, \quad (5.3)$$

oder mit (5.1) und (3.3) (vgl. auch (3.8 und 9)):

$$\sum_r \sum_k B_{rk,sl} q_{rkq} - \sum_{\langle ik \rangle q} \alpha_{\langle ik \rangle q} \delta_{s[i} \delta_{k]l} = 0, \quad (5.4)$$

$$\gamma - \sum_{\langle ik \rangle q} \alpha_{\langle ik \rangle q} s'_{\langle ik \rangle n} s_{qn} = 0 \quad (n = 1, 2, 3). \quad (5.5)$$

(5.4) ergibt vermöge (3.15):

$$q_{rkq} = \sum_s \sum_l \bar{B}_{sl,rk} \sum_{\langle i'k' \rangle} \alpha_{\langle i'k' \rangle q} \delta_{s[i'} \delta_{k']l} = \sum_{\langle i'k' \rangle} \alpha_{\langle i'k' \rangle q} \bar{B}_{[i'k'],rk}. \quad (5.6)$$

Speziell für $r = i$ ($= 1, 2, 3$) folgt hieraus, bei Verwendung von (3.19):

$$q_{ikq} = C \sum_{\langle i'k' \rangle} \alpha_{\langle i'k' \rangle q} \delta_{k[k'} \delta_{i']i}, \quad q_{(ik)q} = 0, \quad q_{[ik]q} = C \alpha_{\langle ik \rangle q}.$$

Die Multiplikatoren α haben also die Werte:

$$\alpha_{\langle ik \rangle q} = \frac{1}{C} q_{[ik]q} = \frac{1}{C} \sum_m r_m s'_{\langle ik \rangle m} s_{qm}. \quad (5.7)$$

Wenn man dies in (5.5) einsetzt und dort die Summationen über die Indices q und $\langle ik \rangle$ mit Hilfe von (4.4) ausführt, so folgt: $r_n = \gamma C$. Die Funktion K nimmt demnach ihren Minimalwert an für folgende Werte der r_n und q_{rkq} :

$$\dot{r}_n = \gamma C, \quad \dot{q}_{rkq} = \gamma \sum_{jl} \bar{B}_{[jl],rk} \sum_n s'_{\langle jl \rangle n} s_{qn}, \quad (5.8)$$

insbesondere gilt für $r = i \leq 3$:

$$\dot{q}_{(ik)q} = 0, \quad \dot{q}_{[ik]q} = \gamma C \sum_n s'_{\langle ik \rangle n} s_{qn}. \quad (5.9)$$

Vollziehen wir also im q -Raum die Translation

$$r_n = \dot{r}_n + r_n', \quad q_{rkq} = \dot{q}_{rkq} + q'_{rkq}, \quad (5.10)$$

so wird K offenbar in eine quadratische Form plus additive Konstante verwandelt, nämlich:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{rs} \sum_{klq} (A_{rk,sl} p_{rkq} p_{slq} + B_{rk,sl} q'_{rkq} q'_{slq}) + \text{const.}; \quad (5.11)$$

hier sind die $q'_{[ik]e}$ ($i \leq 3$) durch die r'_n ausgedrückt zu denken gemäss der Formel

$$q'_{[ik]e} = \sum_n r'_n s'_{\langle ik \rangle n} s_{en}. \quad (5.12)$$

Obwohl K von den r' und q' rein quadratisch abhängt, entsprechen die Lösungen von (2.7) doch nicht unter allen Umständen harmonischen Schwingungen. Dies liegt (ähnlich wie in der Skalartheorie; vgl. I, § 5, und II, 1. Abschnitt) daran, dass die Variablen r_n auf die Bereiche $r_n \geq 0$, folglich die $r'_n = r_n - \gamma C$ auf die Bereiche $r'_n \geq -\gamma C$ beschränkt sind. Nur wenn diese Ungleichungen die Bewegungsfreiheit der oszillatorischen Koordinaten r'_n nicht merklich einschränken, d. h. wenn der Erwartungswert von $r_n'^2$ klein gegen $(\gamma C)^2$ ist, kann man mit harmonischen Schwingungen als Lösungen rechnen. Für eine grössenordnungsmässige Abschätzung genügt es, $\overline{r_n'^2}$ für die Nullpunktsschwingung zu berechnen. Ferner ist leicht zu sehen, dass $\overline{r_n'^2}$ durch den für *kräftefreie* Mesonen ($g = 0$) berechneten Erwartungswert von $q_{[ik]e}^2$ ersetzt werden kann. Man findet so:

$$\overline{r_n'^2} \sim \int dX U_1 \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - 4}} U_1 \sim \begin{cases} \frac{1}{\eta^2 a^4} & \text{für } a\mu \ll 1, \\ \frac{1}{\eta^2 \mu a^5} & \text{für } a\mu \gg 1. \end{cases}$$

Andererseits ist nach (3.19)

$$\gamma C = g \eta C \sim \begin{cases} \frac{g}{\eta a^3} & \text{für } a\mu \ll 1, \\ \frac{g}{\eta \mu^3 a^5} & \text{für } a\mu \gg 1. \end{cases}$$

Die Bedingung $\overline{r_n'^2} \ll (\gamma C)^2$ lautet demnach:

$$\left. \begin{aligned} |g| &\gg a && \text{für } a\mu \ll 1, \\ g^2 &\gg a^5 \mu^3 && \text{für } a\mu \gg 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Ungestörte harmonische Schwingungen gibt es also nur bei *genügend starker Kopplung*: Im wichtigeren Falle $a\mu \ll 1$ muss der *Kopplungsparameter* $|g|$ gross gegen den *Protonradius* a sein, damit unser Verfahren ohne weiteres anwendbar ist. Wie aus dem Folgenden hervorgeht, genügt dies auch, damit die ersten Schritte der Entwicklung nach fallenden Potenzen von g rasch konvergieren.

§ 6. Einführung von Winkelkoordinaten.

Mit der Abkürzung

$$\Gamma = \gamma C = g \eta C \quad (6.1)$$

schreiben wir die Formel (5.9) für $\dot{q}_{[ik]e}$ (vgl. (3.12)):

$$\dot{q}_{ie} = \Gamma S_{ie}, \quad \text{wo } S_{ie} = \sum_n s'_{in} s_{en}. \quad (6.2)$$

Die S_{ie} definieren wiederum eine Drehung:

$$\sum_e S_{ie} S_{je} = \delta_{ij}, \quad \sum_i S_{ie} S_{i\sigma} = \delta_{e\sigma}. \quad (6.3)$$

Die allgemeine Drehung im dreidimensionalen Raum lässt sich durch 3 Euler'sche Winkel darstellen:

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= \cos \Theta \cos \Phi \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi, \dots, S_{13} = \sin \Theta \cos \Phi, \\ &\dots, S_{23} = \sin \Theta \sin \Phi, \\ S_{31} &= -\sin \Theta \cos \Psi, S_{32} = -\sin \Theta \sin \Psi, S_{33} = \cos \Theta; \\ 0 &\leq \Theta \leq \pi, \quad 0 \leq \Phi < 2\pi, \quad 0 \leq \Psi < 2\pi. \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Ferner entnehmen wir aus (6.2) $s'_{in} = \sum_{\sigma} S_{i\sigma} s_{\sigma n}$ und setzen dies in (5.12) ein:

$$q'_{ie} = \sum_{\sigma} S_{i\sigma} \xi_{e\sigma}, \quad \text{wo } \xi_{e\sigma} = \sum_n r'_n s_{en} s_{\sigma n} = \xi_{\sigma e}. \quad (6.5)$$

Als symmetrischer Tensor hat ξ sechs unabhängige Komponenten. Vermöge (6.2, 4 und 5) können wir nun die 9 Feldvariablen $q_{[jk]e} = q_{ie} = \dot{q}_{ie} + q'_{ie}$ durch 9 neue Variable

$$\Theta, \Phi, \Psi; \xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{33}; \xi_{23} = \xi_{32}, \xi_{31} = \xi_{13}, \xi_{12} = \xi_{21} \quad (6.6)$$

darstellen:

$$q_{ie} = \Gamma S_{ie} (\Theta \Phi \Psi) + \sum_{\sigma} \xi_{e\sigma} S_{i\sigma} (\Theta \Phi \Psi). \quad (6.7)$$

Die zu den q -Variablen (6.6) kanonisch konjugierten Impulse nennen wir

$$p_{\Theta}, p_{\Phi}, p_{\Psi}; \pi_{11}, \pi_{22}, \pi_{33}; \pi_{23} = \pi_{32}, \pi_{31} = \pi_{13}, \pi_{12} = \pi_{21}. \quad (6.8)$$

Man erhält sie als Funktionen der p_{ie} ($= p_{[jk]e}$) mit Hilfe der „erzeugenden Funktion“

$$G = \sum_{ie} (\Gamma S_{ie} + \sum_{\sigma} \xi_{e\sigma} S_{i\sigma}) p_{ie}$$

durch die Gleichungen

$$p_{\Theta} = \frac{\partial G}{\partial \Theta}, \dots, \pi_{e\sigma} = \frac{\partial G}{\partial \xi_{e\sigma}}; \quad (6.9)$$

z. B. wird (wenn man $\xi_{e\sigma} \equiv \xi_{\sigma e}$ beachtet):

$$\pi_{e\sigma} = \sum_i (S_{i\sigma} p_{ie} + S_{ie} p_{i\sigma} - \delta_{e\sigma} S_{ie} p_{ie}).$$

Diese Gleichungen haben wir nach den p_{ie} aufzulösen. Dies kann durch Entwicklung nach den $\xi_{e\sigma}$ geschehen. Man beachte, dass die Variablen $\xi_{e\sigma}$ (nach ihrer Definition (6.5)) nur Schwingungen ausführen, deren Amplituden klein gegen Γ sind; denn dies war gerade die Aussage der „Bedingung für starke Kopplung“ (5.13). Diese Bedingung garantiert also die rasche Konvergenz einer Entwicklung nach $\xi_{e\sigma} / \Gamma$. Für das Folgende genügt die Angabe der ξ -freien Terme.

Zur Darstellung des Ergebnisses führen wir folgende Operatoren ein:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= + \sin \Psi \cdot p_\Theta + \frac{\cos \Psi}{\sin \Theta} (p_\Phi + \cos \Theta \cdot p_\Psi), \\ P_2 &= - \cos \Psi \cdot p_\Theta + \frac{\sin \Psi}{\sin \Theta} (p_\Phi + \cos \Theta \cdot p_\Psi), \\ P_3 &= p_\Psi. \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Dies sind hermitesche Operatoren mit den Vertauschungsrelationen von Drehimpulsen:

$$[P_2, P_3] = i P_1, [P_3, P_1] = i P_2, [P_1, P_2] = i P_3. \quad (6.11)$$

Ferner gilt:

$$\left. \begin{aligned} [P_e, S_{ie}] &= 0, \\ i [P_3, S_{i2}] &= -i [P_2, S_{i3}] = S_{i1}, \dots, \dots \text{ (zyklisch). } \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Hiermit definieren wir weitere hermitesche Operatoren:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{i1} &= \frac{1}{2\Gamma} (S_{i3} P_2 - S_{i2} P_3 + i S_{i1}) \\ &= \frac{1}{2\Gamma} (P_2 S_{i3} - P_3 S_{i2} - i S_{i1}), \dots, \dots \text{ (zyklisch); } \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\bar{\pi}_{i1} = S_{i1} \pi_{11} + \frac{1}{2} S_{i2} \pi_{12} + \frac{1}{2} S_{i3} \pi_{13}, \dots, \dots \text{ (zyklisch). } \quad (6.14)$$

Das Ergebnis der oben angedeuteten Rechnung lautet dann (in hermitisierter Form):

$$p_{ie} = \bar{p}_{ie} + \bar{p}_{ie} + \dots \quad (6.15)$$

(die Punkte deuten die ξ enthaltenden Terme an). In der Tat folgt aus (6.7, 12, 13, 14):

$$i [\bar{p}_{ie}, q_{j\sigma}] = \frac{1}{2} (\delta_{ij} \delta_{e\sigma} - S_{i\sigma} S_{je}) + \dots, \quad (6.16)$$

$$i [\bar{p}_{ie}, q_{j\sigma}] = \frac{1}{2} (\delta_{ij} \delta_{e\sigma} + S_{i\sigma} S_{je}) + \dots, \quad (6.17)$$

so dass die Vertauschungsrelationen $i[p_{i_e}, q_{j_\sigma}] = \delta_{ij} \delta_{e\sigma}$ hinsichtlich der ξ -freien Terme erfüllt sind.

Wir kommen jetzt auf die in § 5 besprochene q -Raum-Translation zurück. Unter Verwendung von (5.8, 9) und (6.2, 5) können wir die Translation (5.10) folgendermassen schreiben:

$$\left. \begin{aligned} q_{(jk)_e} &= q'_{(jk)_e}, \quad q_{[jk]_e} \equiv q_{i_e} = \Gamma S_{i_e} + \sum_{\sigma} \xi_{e\sigma} S_{i_\sigma}, \\ r > 3: q_{rk_e} &= \bar{q}_{rk_e} + q'_{rk_e}, \quad \text{wo } \bar{q}_{rk_e} = \gamma \sum_{\langle j|l \rangle} \bar{B}_{[j|l], rk} S_{\langle j|l \rangle_e}. \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

Neben den Variablen (6.6) denken wir uns nun die Grössen $q'_{(jk)_e}$ ($j \neq k$), q'_{j_e} und q'_{rk_e} ($r > 3$) als Lagenkoordinaten eingeführt. Dabei ist zu beachten, dass die Verschiebung \bar{q}_{rk_e} der q -Variablen mit $r > 3$ von den Winkelkoordinaten $\Theta \Phi \Psi$ abhängt. Man muss daher, um eine kanonische Transformation zu erhalten, noch eine lineare Transformation des p -Raumes vornehmen. Wir machen den Ansatz:

$$\left. \begin{aligned} p_{(jk)_e} &= p'_{(jk)_e}, \quad p_{[jk]_e} \equiv p_{i_e} = p'_{i_e} + \sum_s' \sum_{l\sigma} \lambda_{i_e, sl\sigma} p'_{sl\sigma}, \\ r > 3: p_{rk_e} &= p'_{rk_e}. \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

Dabei soll p'_{i_e} denselben Operator bedeuten, der in (6.15) mit p_{i_e} bezeichnet wurde:

$$p'_{i_e} = \bar{p}_{i_e} + \bar{\bar{p}}_{i_e} + \dots, \quad i[p'_{i_e}, q_{j_\sigma}] = \delta_{ij} \delta_{e\sigma} \quad (6.20)$$

Damit die kanonischen Vertauschungsrelationen für die alten und neuen Variablen gelten, muss man nur die Koeffizienten λ in (6.19) so wählen, dass

$$i[p_{i_e}, q_{rk_\sigma}] = \lambda_{i_e, rk_\sigma} + i[p'_{i_e}, \bar{q}_{rk_\sigma}] = 0 \quad \text{für } r > 3.$$

Nach (6.18) ergibt dies, bis auf uninteressante ξ -Terme:

$$\lambda_{i_e, rk_\sigma} = -i\gamma \sum_{\langle j|l \rangle} \bar{B}_{[j|l], rk} [\bar{p}_{i_e}, S_{\langle j|l \rangle_\sigma}] + \dots \quad (r > 3),$$

oder, da $S_{\langle j|l \rangle_\sigma} \cong (\gamma C)^{-1} q_{\langle j|l \rangle_\sigma}$, nach (6.16):

$$\lambda_{i_e, rk_\sigma} = \begin{cases} -\frac{1}{2C} \sum_{\langle j|l \rangle} \bar{B}_{[j|l], rk} (\delta_{i\langle j|l \rangle} \delta_{e\sigma} - S_{i_\sigma} S_{\langle j|l \rangle_e}) + \dots & \text{für } r > 3, \\ 0 & \text{für } r \leq 3. \end{cases} \quad (6.21)$$

Es bleibt noch übrig, die neuen Variablen in die Funktion K (5.11) einzuführen. Da die Grössen $p_{i_e} \equiv p_{[jk]_e}$ nach (3.11) nur in dem Term

$$\frac{1}{4} \sum_{j|k_e} p_{[jk]_e}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i_e} p_{i_e}^2$$

vorkommen, kann man das Ergebnis wie folgt darstellen:

$$K = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{rs} \sum_{klq} (A_{rk,sl} p'_{rkq} p'_{slq} + B_{rk,sl} q'_{rkq} q'_{slq}) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{iq} \left[-p_{iq}^{'2} + \left\{ p'_{iq} + \sum_s \sum_{l\sigma} \lambda_{iq,sl\sigma} p'_{sl\sigma} \right\}^2 \right] + \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

In den q' -abhängigen Termen sind gemäss (5.12) bzw. (6.5) die Grössen $q'_{[jk]q}$ durch $\sum_{\sigma} \xi_{q\sigma} S_{\langle jk \rangle \sigma}$ ersetzt zu denken.

§ 7. Aufspaltung von K in Isobarenterm und Energie der freien Mesonen.

K (6.22) hängt quadratisch von den Drehimpuls-Operatoren P_n (6.10) ab, nämlich auf dem Wege über die p'_{iq} (vgl. (6.20 und 13)). Um eine Separation in P_n -abhängige und P_n -unabhängige Terme (die ersteren werden die Isobaren-Energie liefern) zu erhalten, führen wir eine Translation im p -Raum durch:

$$p'_{(jk)q} = p''_{(jk)q} + \dot{p}_{(jk)q}, \quad p'_{sl\sigma} = p''_{sl\sigma} + \dot{p}_{sl\sigma} \quad (s \geq 3) \quad (7.1)$$

(wobei also die p'_{iq} untransformiert bleiben und daher hier unter die „Konstanten“ gerechnet werden können), mit der Forderung, dass die in den p'' linearen Terme verschwinden sollen.

Die Bestimmung der Translation \dot{p} erfolgt am einfachsten durch Bestimmung des Minimums von K (6.22) bei festgehaltenen $p'_{[ij]q}$:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial p'_{sl\sigma}} (K - \sum_{\langle ij \rangle q} \beta_{\langle ij \rangle q} p'_{[ij]q}) \\ & = \sum_r \sum_k A_{rk,sl} p'_{rk\sigma} + \sum_{iq} \lambda_{iq,sl\sigma} p_{iq} - \sum_{\langle ij \rangle} \beta_{\langle ij \rangle \sigma} \delta_{[i] \delta_{j]l} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

wo unter p_{iq} seine Darstellung aus (6.19) zu verstehen ist. Multipliziert man (7.2) mit $\bar{A}_{sl,r'k'}$, so folgt durch Summation nach s, l auf Grund von (3.15) und mit $\bar{A}_{[i]j, rk} = \delta_{r[i] \delta_{j]k}$ (vgl. 3.16)):

$$p'_{rk\sigma} = - \sum_s \sum_l \bar{A}_{sl,rk} \sum_{iq} \lambda_{iq,sl\sigma} p_{iq} + \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{r[i] \delta_{j]k} \beta_{\langle ij \rangle \sigma}. \quad (7.3)$$

Bildet man speziell $p'_{[jk]\sigma}$, so verschwindet der Beitrag der ersten Summe in (7.3), da $\bar{A}_{sl,[jk]} = 0$ für $s > 3$ und $\lambda_{iq,sl\sigma} = 0$ für $s \leq 3$; folglich:

$$\beta_{[jk]\sigma} = p'_{[jk]\sigma}. \quad (7.4)$$

Gehen wir mit (7.3) in p_{iq} (6.19) ein, so wird dort

$$\sum_s \sum_{l\sigma} \lambda_{iq,sl\sigma} p'_{sl\sigma} = - \sum_{j\sigma} A_{iq,j\sigma} p_{j\sigma}, \quad (7.5)$$

wo

$$A_{iq,j\sigma} = \sum_{rs} \sum_{kl\tau} \lambda_{iq,rk\tau} \bar{A}_{rk,sl} \lambda_{j\sigma,sl\tau}. \quad (7.6)$$

(6.19) liefert somit folgendes Gleichungssystem für die $p_{i\varrho}$:

$$p_{i\varrho} + \sum_{j\sigma} A_{i\varrho, j\sigma} p_{j\sigma} = p'_{i\varrho}. \quad (7.7)$$

Zur Berechnung der Koeffizienten A (7.6) auf Grund von (6.21) und (3.16) können folgende Formeln dienen:

$$\sum_{rs}'' \sum_{kl} \bar{B}_{[i\varrho], rk} \bar{A}_{rk, sl} \bar{B}_{[j\varrho], sl} = (D - C^2) (\delta_{ij} \delta_{\varrho'\varrho} - \delta_{i\varrho'} \delta_{j\varrho}), \quad (7.8)$$

$$D = \frac{1}{3} \sum_r \sum_i C_{ir}^2 = \frac{1}{3} \frac{1}{\eta^2} \int dX \delta_a(x) \frac{-A}{(\mu^2 - A)^2} \delta_a(x) \quad (7.9)$$

(das Auftreten von $D - C^2$ statt D in (7.8) ist dadurch bedingt, dass die Summationsindices r, s nur von 4 bis ∞ laufen); ferner (vgl. (6.3)):

$$\sum_{k\tau} (\delta_{ik} \delta_{\varrho\tau} - S_{i\tau} S_{k\varrho}) (\delta_{jk} \delta_{\sigma\tau} - S_{j\tau} S_{k\sigma}) = 2 (\delta_{ij} S_{\varrho\sigma} - S_{i\sigma} S_{j\varrho}) \quad (7.10)$$

Mit (7.6, 8, 10) ergibt sich:

$$A_{i\varrho, j\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{C^2} - 1 \right) (\delta_{ij} \delta_{\varrho\sigma} - S_{i\sigma} S_{j\varrho}). \quad (7.11)$$

Hiermit lauten die Gleichungen (7.7):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{D}{C^2} + 1 \right) p_{i\varrho} - \frac{1}{2} \left(\frac{D}{C^2} - 1 \right) \sum_{j\sigma} S_{i\sigma} S_{j\varrho} p_{j\sigma} = p'_{i\varrho}.$$

Durch Multiplikation mit $S_{j\varrho} S_{i\sigma}$ und Summation über i, ϱ folgt:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{D}{C^2} + 1 \right) \sum_{i\varrho} S_{j\varrho} S_{i\sigma} p_{i\varrho} - \frac{1}{2} \left(\frac{D}{C^2} - 1 \right) p_{j\sigma} = \sum_{i\varrho} S_{j\varrho} S_{i\sigma} p'_{i\varrho}.$$

Aus diesen beiden Gleichungssystemen lassen sich die Doppelsummen auf den linken Seiten leicht eliminieren, und man findet schliesslich:

$$p_{i\varrho} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{C^2}{D} \right) p'_{i\varrho} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{C^2}{D} \right) \sum_{j\sigma} S_{i\sigma} S_{j\varrho} p'_{j\sigma}. \quad (7.12)$$

Hiermit kann man nun in (7.3) eingehen, womit, in Verbindung mit (7.4), die durchzuführende Translation bestimmt ist. Für das Folgende ist namentlich der Minimalwert von K wichtig. Beachtet man, dass nach (7.2, 4) und (6.19)

$$\sum_{rs} \sum_{kl\sigma} A_{rk, sl} p'_{rks} p'_{sl\sigma} = \sum_{i\varrho} \{ (p'_{i\varrho} - p_{i\varrho}) p_{i\varrho} + p_{i\varrho}^2 \},$$

so folgt für den Minimalwert:

$$K_0 = \frac{1}{2} \sum_{i\varrho} p'_{i\varrho} p_{i\varrho} + \text{const.}, \quad (7.13)$$

$$K_0 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{C^2}{D} \right) \sum_{i\ell} p'_{i\ell}{}^2 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{C^2}{D} \right) \sum_{ij\ell\sigma} p'_{i\ell} S_{i\sigma} S_{j\ell} p'_{j\sigma} + \text{const.} \quad (7.14)$$

Für K (6.22) erhält man, mit Hilfe von (3.11):

$$K = K_0 + \frac{1}{2} \sum_{rs}'' \sum_{kl\ell} A_{rk,sl} p''_{rke} p''_{sle} + \frac{1}{2} \sum_s' \sum_{ik\ell} A_{(ik),sl} p''_{(ik)e} p''_{sle} + \frac{1}{8} \sum_{ijk\ell} A_{(ik),(j\ell)} p''_{(ik)e} p''_{(j\ell)e} + \frac{1}{2} \sum_{rs} \sum_{kl\ell} B_{rk,sl} q'_{rke} q'_{sle} + K_S \quad (7.15)$$

wo

$$K_S = \frac{1}{2} \sum_{i\ell} \left(\sum_s' \sum_{l\sigma} \lambda_{i\ell,sl\sigma} p''_{sl\sigma} \right)^2. \quad (7.16)$$

Zu den vorstehenden Rechnungen ist zu bemerken, dass sie so ausgeführt sind, als seien die $\lambda_{i\ell,sl\sigma}$ mit den $p'_{j\tau}$ vertauschbar. In Wirklichkeit sind in den Formeln noch gewisse Symmetrisierungen vorzunehmen, was aber in konsequenter Weise erst geschehen kann, nachdem die p -Raum-Translation (7.1) zu einer kanonischen Transformation ergänzt worden ist. Die Verschiebungen \dot{p}_{rke} hängen nämlich (vgl. (7.3, 4 und 12) mit (6.13, 14 und 20)) von den Variablen (6.6, 8) ab, was zu ähnlichen Transformationsformeln wie (6.18, 19) führt, nur dass die Rollen von q - und p -Raum vertauscht sind. Die Durchführung dieser kanonischen Transformation interessiert aber erst, wenn man zur nächst höheren Näherung im Sinne der Entwicklung nach fallenden Potenzen von g übergeht; die aus der Transformation resultierenden K -Terme — sie beschreiben wie K_S (7.16) Wechselwirkungen zwischen freien Mesonen und den Proton-Isobaren — enthalten mindestens den Faktor g^{-1} , während der „Streuterm“ K_S von g frei ist, und sie können in erster Näherung vernachlässigt werden, sofern die „Bedingung für starke Kopplung“ (5.13) erfüllt ist. Wir wollen hier über diese Näherung nicht hinausgehen. Dies bedeutet, dass wir in K (7.15) einfach

$$q'_{rke} = q''_{rke} \quad (7.17)$$

setzen können, wobei gemäss früheren Bemerkungen (vgl. 5.12), (6.5))

$$q''_{[jk]e} = \sum_{\sigma} \xi_{e\sigma} S_{\langle jk \rangle \sigma} \quad (7.18)$$

während K_0 und K_S durch (7.14 und 16) definiert bleiben.

Wir haben schliesslich noch für die $p'_{i\ell}$ in K_0 ihre Werte (6.20) zu substituieren, wobei die kleinen ξ -abhängigen Terme in

unserer Näherung vernachlässigbar sind. Mit Hilfe der Formeln (6.3, 13 und 14) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}\sum_{i\varrho} p'_{i\varrho}{}^2 &= \sum_{i\varrho} (\bar{p}_{i\varrho}^2 + \bar{\bar{p}}_{i\varrho}^2) = \frac{1}{2I^2} \left(\sum_n P_n^2 + \frac{3}{2} \right) + \sum_{\varrho} \pi_{\varrho\varrho}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\varrho < \sigma} \pi_{\varrho\sigma}^2, \\ \sum_{i\varrho\sigma} p'_{i\varrho} S_{i\sigma} S_{j\varrho} p'_{j\sigma} &= \sum_{i\varrho\sigma} (\bar{p}_{i\varrho} S_{i\sigma} S_{j\varrho} \bar{p}_{j\sigma} + \bar{\bar{p}}_{i\varrho} S_{i\sigma} S_{j\varrho} \bar{\bar{p}}_{j\sigma}) \\ &= \frac{1}{2I^2} \left(- \sum_n P_n^2 + \frac{3}{2} \right) + \sum_{\varrho} \pi_{\varrho\varrho}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\varrho < \sigma} \pi_{\varrho\sigma}^2\end{aligned}$$

Dies in (7.14) eingesetzt, ergibt (mit $\Gamma = g \eta C$, vgl. (6.1)):

$$K_0 = \frac{1}{4g^2\eta^2D} \sum_n P_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{\varrho} \pi_{\varrho\varrho}^2 + \frac{1}{4} \sum_{\varrho < \sigma} \pi_{\varrho\sigma}^2 + \text{const.} \quad (7.19)$$

Hier ist der erste Term der wichtigste, da er die Isobaren-Energie liefern wird. Bei der Berechnung seines Koeffizienten müssen wir die Fälle $a\mu \ll 1$ und $\gg 1$ unterscheiden. Für den Fall $a\mu \ll 1$ erkennt man leicht, dass in der Definitionsformel (7.9) für D der Operator $(\mu^2 - \Delta)$ durch $(-\Delta)$ ersetzt werden kann; definieren wir nun den Protonradius a quantitativ durch die Formel¹⁾

$$\frac{1}{a} = 4\pi \int dX \delta_a(x) \frac{1}{-\Delta} \delta_a(x) = \int dX \int dX' \frac{\delta_a(x) \delta_a(x')}{|x-x'|}, \quad (7.20)$$

so kommt:

$$\eta^2 D = \frac{1}{12\pi a}, \quad \frac{1}{4g^2\eta^2D} = \frac{3\pi a}{g^2} \text{ für } a\mu \ll 1. \quad (7.21)$$

Für den weniger interessanten Fall $a\mu \gg 1$ genüge die Angabe der Größenordnung:

$$\eta^2 D \sim \frac{1}{a^5\mu^4}, \quad \frac{1}{4g^2\eta^2D} \sim \frac{a^5\mu^4}{g^2} \text{ für } a\mu \gg 1. \quad (7.22)$$

§ 3. S-Transformation.

Für die Aufstellung der einkomponentigen Schrödingergleichung (2.7) haben wir nun noch den Operator K mit der unitären Matrix S zu transformieren und speziell das Diagonalelement $(S^* K S)_{00}$ zu bilden.

Obwohl wir im § 4 eine exakte Konstruktion der Matrix S für beliebige Werte der $q_{i\varrho}$ angegeben haben (vgl. (4.11)), ist es für den gegenwärtigen Zweck bequemer, mit einer Näherungsdarstellung zu arbeiten, die dem Umstände Rechnung trägt, dass die

¹⁾ Vgl. OPPENHEIMER und SCHWINGER, l. c. (Fussnote S. 552).

Variablen $\xi_{e\sigma}$ in (6.7) nur kleine Schwingungen ausführen. Betrachten wir also zunächst den „Wert nullter Näherung“ von H' (4.1), den wir erhalten, wenn wir $\xi_{e\sigma} = 0$, $q_{ie} = \Gamma S_{ie}$ setzen:

$$\hat{H}' = \gamma \Gamma \sum_{ie} \sigma_i \tau_e S_{ie}, \quad (8.1)$$

und bestimmen wir die Matrix \hat{S} , die \hat{H}' auf Diagonalform transformiert: Die Matrix

$$X = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Phi}{2} - i \sigma_3 \sin \frac{\Phi}{2} \\ \cos \frac{\Psi}{2} + i \sigma_3 \sin \frac{\Psi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\Theta}{2} - i \sigma_2 \sin \frac{\Theta}{2} \\ \cos \frac{\Psi}{2} + i \sigma_3 \sin \frac{\Psi}{2} \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

ist so gewählt, dass

$$\sum_i \sigma_i S_{ie} (\Theta \Phi \Psi) = X \sigma_e X^*; \quad (8.3)$$

daher wird nach (4.10)

$$\hat{H}' = \gamma \Gamma \cdot X \cdot \sum_n \sigma_n \tau_n \cdot X^* = -\gamma \Gamma \cdot X Z (\tau_3 + \sigma_3 + \sigma_3 \tau_3) Z^* X^*.$$

Mit

$$\hat{S} = X Z \quad (8.4)$$

wird also $\hat{S}^* \hat{H}' \hat{S}$, wie verlangt, diagonal. Kehren wir jetzt zum vollständigen Ausdruck (4.1) für H' , mit (6.7), zurück, so wird wegen (8.3):

$$\hat{S}^* H' \hat{S} = -\gamma \Gamma (\tau_3 + \sigma_3 + \sigma_3 \tau_3) + \gamma \sum_{ie} \xi_{ie} \cdot (Z^* \sigma_i \tau_e Z). \quad (8.5)$$

Die Matrix S kann mit der üblichen Störungsmethode durch Entwicklung nach den ξ_{ie} bestimmt werden. Schreiben wir $S = \hat{S} \cdot S'$, so sind die Matricelemente ¹⁾ S'_{0m} und S'_{m0} ($m \neq 0$) höchstens von der Grössenordnung ξ_{ie} / Γ , also bei starker Kopplung (vgl. § 5) $\ll 1$.

Wir bilden jetzt $S^* K S = K + S^* [K, S]$. Die einzigen Terme in K (7.15), die mit S nicht kommutieren, sind in K_0 (7.19) enthalten:

$$S^* [K, S] = \frac{1}{4 g^2 \eta^2 D} S^* \left[\sum_n P_n^2, S \right] + S'^* \left[\left(\frac{1}{2} \sum_e \pi_{ee}^2 + \frac{1}{4} \sum_{e < \sigma} \pi_{e\sigma}^2 \right), S' \right]. \quad (8.6)$$

Hier ist der zweite Term, der nur von den $\xi_{e\sigma}$ und $\pi_{e\sigma}$ abhängt, in unserer Näherung zu vernachlässigen; in der Tat ist sein Beitrag zum Diagonalelement $(S^* K S)_{00}$ in der Schrödingergleichung

¹⁾ Der Index 0 bezieht sich (gemäss der Bezeichnung in § 2) auf den tiefsten Eigenwert von \hat{H}' ($\tau_3 = \sigma_3 = 1$).

(2.7) von der Ordnung der bereits früher (§ 7) vernachlässigten Wechselwirkungsterme. Es bleibt also (vgl. (8.4)):

$$S^* [K, S] = \frac{1}{4 g^2 \eta^2 D} S'^* Z^* X^* \left[\sum_n P_n^2, X \right] Z S'.$$

Nun folgt aber aus (6.10) und (8.2):

$$\left. \begin{aligned} X^* \cdot P_n \cdot X &= P_n + \frac{\sigma_n}{2} \\ X^* \cdot \sum_n P_n^2 \cdot X &= \sum_n \left(P_n + \frac{\sigma_n}{2} \right)^2 = \sum_n P_n^2 + \sum_n \sigma_n P_n + \frac{3}{4}, \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

$$S^* [K, S] = \frac{1}{4 g^2 \eta^2 D} \left\{ \sum_n (S'^* Z^* \sigma_n Z S') P_n + \frac{3}{4} \right\}. \quad (8.8)$$

Berechnet man die Matrizen $Z^* \sigma_n Z$ nach (4.9), so zeigt sich, dass ihre Diagonalelemente verschwinden; infolgedessen sind die Diagonalelemente $(S'^* Z^* \sigma_n Z S')_{00}$ vernachlässigbar klein. In unserer Näherung ist daher $(S^* [K, S])_{00}$ eine Konstante, die in die additive Konstante in K_0 (7.19) einbezogen werden kann. Somit wird $(S^* K S)_{00} = K$, und die Schrödingergleichung (2.7) lautet:

$$(-E + K) F'_0 = 0. \quad (8.9)$$

Im § 2 wurde hervorgehoben, dass die Gültigkeit der einkomponentigen Gleichung (2.7), d. h. (8.9), auf der Voraussetzung beruht, dass die Ausserdiagonalelemente $(S^* K S)_{om}$ klein gegen die γy_n sind, d. h. hier: klein gegen $\gamma^2 C$ (vgl. (4.12) und (5.8)). Diese Ausserdiagonalelemente sind aber vollständig in den Ausdrücken (8.8) bzw. (8.6) enthalten, und man erkennt leicht, dass die Forderung ihrer Kleinheit gegen $\gamma^2 C$ wieder auf die „Bedingung für starke Kopplung“ (5.13) hinausläuft.

§ 9. Die Proton-Isobaren.

Für die Diskussion der Gleichung (8.9) empfiehlt sich eine Entwicklung nach den Eigenfunktionen des in K_0 stehenden Energieterms

$$H^I = \frac{1}{4 g^2 \eta^2 D} \sum_n P_n^2 = \frac{1}{4 g^2 \eta^2 D} \left\{ \frac{1}{\sin \Theta} p_\Theta \sin \Theta p_\Theta + \frac{p_\Phi^2 + 2 \cos \Theta p_\Phi p_\Psi + p_\Psi^2}{\sin^2 \Theta} \right\}, \quad (9.1)$$

der mit der Hamiltonfunktion eines Kugelspihls übereinstimmt. In der Gleichung $(-E^I + H^I) f = 0$ sind Φ und Ψ zyklische Variable, also

$$f = e^{i(m\Phi + n\Psi)} u(\Theta). \quad (9.2)$$

Dabei sind m und n *halbzahlig*; denn die ursprüngliche Schrödingerfunktion $F = SF'$ (vgl. (2.3, 4)), die in Φ und Ψ periodisch mit der Periode 2π sein muss, enthält nach (8.4 und 2) in ihren Komponenten die Faktoren

$$e^{\pm i/2 \Phi} \cdot e^{\pm i/2 \Psi} \cdot f \sim e^{i(m \pm \frac{1}{2}) \Phi} \cdot e^{i(n \pm \frac{1}{2}) \Psi}.$$

Mit $p_\Phi = m$, $p_\Psi = n$ sind die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Kugelkreisels (9.1) in bekannter Weise zu berechnen¹⁾. Die Eigenwerte sind:

$$\left. \begin{aligned} E_j^I &= \frac{1}{4g^2\eta^2 D} \cdot j(j+1), \quad \text{wo } j \geq |m|, j \geq |n|, \\ m, n \text{ und } j &\text{ halbzahlig.} \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

(Bezüglich des Koeffizienten $(4g^2\eta^2 D)^{-1}$ vgl. (7.21, 22).) Damit sind die stationären Zustände bestimmt, die durch Bindung von Mesonen an das Nucleon entstehen können²⁾. Die Eigenfunktionen $u_{jm_n}(\Theta)$ werden wir erst später — bei der Berechnung der Kernkräfte — benötigen.

Die Bedeutung der Quantenzahlen j, m, n ergibt sich durch die Betrachtung der Gesamtladung und des Gesamtdrehimpulses³⁾:

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{1}{2}(1 + \tau_3) + \int dX \sum_k (\psi_{k1} \pi_{k2} - \psi_{k2} \pi_{k1}), \\ M_{\langle ij \rangle} &= \frac{1}{2} \sigma_{\langle ij \rangle} - \int dX \sum_q \left\{ \sum_k \pi_{kq} \left(x_i \frac{\partial \psi_{kq}}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial \psi_{kq}}{\partial x_i} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\pi_{iq} \psi_{jq} - \pi_{jq} \psi_{iq}) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Diese Grössen spalten sich, nach Einführung der in unserer Näherung zuletzt verwendeten Variablen, in Beiträge des (zusammengesetzten) Nucleons und der „freien“ Mesonen. Wir geben nur die Nucleon-Beiträge an, und zwar sogleich mit der Matrix S transformiert, d. h. als auf die Schrödingerfunktion F' anzuwendende Operatoren. Für die Nucleon-Ladung erhält man:

$$e^I = \hat{S}^* \left\{ \frac{1}{2}(1 + \tau_3) + P_3 \right\} \hat{S} = \frac{1}{2} + P_3 + \frac{1}{2} Z^* (\tau_3 + \sigma_3) Z$$

(vgl. (8.4, 7)), oder, da F' praktisch einkomponentig ist und da die Diagonalelemente von $Z^* \tau_3 Z$ und $Z^* \sigma_3 Z$ verschwinden:

$$e^I = \frac{1}{2} + p_\Psi = \frac{1}{2} + n. \quad (9.5)$$

¹⁾ Vgl. etwa A. SOMMERFELD, Atombau und Spektrallinien, 2. Band, S. 161 ff.

²⁾ Vgl. IV, wo die Isobaren-Energie gleichzeitig auch für die symmetrische Pseudoskalartheorie und die Möller-Rosenfeld-Mischung angegeben ist.

³⁾ Vgl. QdW, § 12; insbesondere (12.44, 56, 57, 58).

Der Drehimpuls des Nucleons wird (vgl. (8.3, 7) und (6.12)):

$$M_i^I = \hat{S}^* \left\{ \frac{1}{2} \sigma_i - \sum_n S_{in} P_n \right\} \hat{S} = - \sum_n S_{in} P_n;$$

$$M_3^I = p_\phi = m, \quad \sum_i (M_i^I)^2 = \sum_n P_n^2 = j(j+1). \quad (9.6)$$

Es sind also j, m die Spinquantenzahlen, $n + \frac{1}{2}$ die Ladungszahl des Nucleons. Hieraus folgt insbesondere, dass die 4 Grundzustände des Nucleons $j = \frac{1}{2}$, $m = \pm \frac{1}{2}$, $n = \pm \frac{1}{2}$ (vgl. (9.3)) den empirisch bekannten Proton-Neutron-Zuständen zugeordnet werden können.

§ 10. Die Streuung der Mesonen am Nucleon.

Zieht man die Isobaren-Energie H^I von K (7.15 bis 19) ab, so entspricht der Rest $(K - H^I)$ der Hamiltonfunktion der „freien“ Mesonen, einschliesslich ihrer Wechselwirkung mit dem Nucleon. Diese Wechselwirkung äussert sich formelmässig in zweierlei Art: erstens im Auftreten des „Streuterm“ K_S , zweitens darin, dass anstelle der in H^0 (3.3, 11) auftretenden Variablen $q_{[i k] \varrho}$, $p_{[i k] \varrho}$ jetzt in $(K - H^I)$ die Variablen $\xi_{\varrho \sigma}$, $\pi_{\varrho \sigma}$ mit etwas anderen Koeffizienten erscheinen. Schon hierdurch würde, auch wenn der K_S -Term nicht vorhanden wäre, eine Mesonstreuung bewirkt, doch ist diese sehr schwach verglichen mit der durch K_S bedingten Streuung, vorausgesetzt, dass die Meson-Energie $\omega_k = \sqrt{\mu^2 + k^2} \ll a^{-1}$ ist¹⁾. Wir vernachlässigen diese schwache Streuung, indem wir $K - H^I$ durch $H^0(p'', q'') + K_S$ ersetzen. Ferner sei die kinetische Energie des Mesons $\omega_k - \mu$ so gross angenommen, dass die Energieunterschiede der beim Streuprozess mitspielenden Isobaren-Zustände dagegen vernachlässigt werden können ($H^I \rightarrow \text{const.}$). In dieser Approximation wird die Hamiltonfunktion:

$$K = H^0(p'', q'') + K_S + \text{const.} \quad (10.1)$$

Zum Übergang in den Impulsraum setzen wir:

$$q''_{s l \varrho} = - \int dK V_s(k) \omega_k^{-1} P_{l \varrho}(k), \quad p''_{s l \varrho} = \int dK V_s^*(k) \omega_k Q_{l \varrho}(k),$$

$$V_s(k) = (2\pi)^{-3/2} \int dX U_s(x) e^{i k x}, \quad \alpha_{i \varrho, l \sigma}(k) = \omega_k \sum_s \lambda_{i \varrho, s l \sigma} V_s^*(k),$$

$$K_S = \frac{1}{2} \sum_{i \varrho} \left| \int dK \sum_{l \sigma} \alpha_{i \varrho, l \sigma}(k) Q_{l \sigma}(k) \right|^2.$$

Man sieht leicht, dass $\sum_l k_l \alpha_{i \varrho, l \sigma}(k) = 0$ ist, und dies bedeutet,

¹⁾ Der Sachverhalt ist also ähnlich wie in der Skalartheorie; für diese wurde der entsprechende Beweis in I, Anhang 1, ausgeführt.

dass die longitudinal polarisierten Mesonen keine Streuung erfahren. Dann wird; bei Beschränkung auf transversale Mesonen:

$$\sum_l k_l P_{l_e} = \sum_l k_l Q_{l_e} = 0, \quad K = \frac{1}{2} \int dK \sum_{l_e} \{ |P_{l_e}|^2 + \omega_k^2 |Q_{l_e}|^2 \} + K_S.$$

K ist hiernach gleich der Hamiltonfunktion eines Oszillatorensystems, dessen Eigenschwingungen durch das Gleichungssystem

$$(-\omega^2 + \omega_k^2) Q_{l_e}(k) + \sum_{i_e} \alpha_{i_e, l_e}^*(k) \int dK' \sum_{l'_e} \alpha_{i_e, l'_e}(k') Q_{l'_e}(k') = 0 \quad (10.2)$$

bestimmt sind. Die Lösungen ergeben sich aus dem Ansatz¹⁾:

$$Q_{l_e}(k) = \delta(\vec{k} - \vec{k}_0) \delta_{l_0} \delta_{\sigma_0} - \sum_{i_e} p_{i_e} \frac{\alpha_{i_e, l_e}^*(k)}{k^2 - k_0^2} \quad (\omega^2 = \mu^2 + k_0^2), \quad (10.3)$$

wo l_0 die Spinpolarisation und σ_0 die „Ladungspolarisation“ der einfallenden ebenen Mesonwelle charakterisiert; erstere ist natürlich transversal zu wählen: wenn \vec{k}_0 parallel der x_1 -Achse, $l_0 = 2$ oder 3. Durch Einsetzen von (10.3) in (10.2)²⁾ erhält man für die Koeffizienten p_{i_e} wieder die Gleichungen (7.7) mit (7.6) bzw. (7.11), nur ist auf der rechten Seite von (7.7) p'_{i_e} durch $\alpha_{i_e, l_0 \sigma_0}(k_0)$ ersetzt; mit dieser Änderung kann die Lösung (7.12) übernommen werden. Schliesslich erhält man für die Eigenschwingungen im Ortsraum (asymptotisch für grosse $|x|$):

$$\left. \begin{aligned} \int dK Q_{l_e}(k) e^{ikx} &= e^{ik_0 x} \delta_{l_0} \delta_{\sigma_0} - \frac{a}{2} \beta^2 \frac{e^{i|k_0||x|}}{|x|} f_{l_e, l_0 \sigma_0} \\ f_{l_e, l_0 \sigma_0} &= \sum_{\langle i' i'' \rangle} \sum_{\langle j' j'' \rangle} \delta_{l' i'} \delta_{l_0 j'} \delta_{\sigma_0 j''} \{ \delta_{\langle i' i'' \rangle \langle j' j'' \rangle} \delta_{\sigma_0 \sigma_0} - S_{\langle i' i'' \rangle \sigma_0} S_{\langle j' j'' \rangle \sigma_0} \}, \\ s &= \frac{\vec{x}}{|x|}, \quad s_0 = \frac{\vec{k}_0}{|k_0|}, \quad \beta^2 = \frac{k_0^2}{\mu^2 + k_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

Hier ist der Protonradius a wieder durch (7.20 oder 21) definiert (die obige Annahme $a\omega \ll 1$ bedingt $a\mu \ll 1$).

¹⁾ Dieser Ansatz ist demjenigen nachgebildet, den J. W. WEINBERG (Phys. Rev. **59**, S. 776, 1941) in der „Paartheorie“ zur Berechnung der Streuung verwendet hat.

²⁾ In dem Integral

$$\int dK \frac{\sum_{i_e} \alpha_{i_e, l_e}(k) \alpha_{i'_e, l'_e}^*(k)}{k^2 - k_0^2} \equiv A$$

ist bei der Integration nach $|k|$ der Pol $|k| = |k_0|$ in der negativ-imaginären Halbebene zu umgehen (ebenso wie bei der Fouriertransformation in den Ortsraum, die eine auslaufende Streuwelle liefern soll; s. (10.4)). Der im obigen Integral A auftretende Nenner $k^2 - k_0^2$ kann aber, bei Vernachlässigung von Termen, die relativ klein sind wie $a\omega$ gegen 1, durch $k^2 + \mu^2 = \omega_k^2$ ersetzt werden; dann wird A gleich der in (7.6 oder 11) definierten Grösse $A_{l_e, i'_e l'_e}$.

Die Amplitude der Streuwelle in (10.4) hängt von den Winkeln $\Theta \Phi \Psi$ ab; sie ist also als ein auf die Nucleon-Eigenfunktionen (9.2) wirkender Operator aufzufassen; die zugehörige Matrix beschreibt die mit dem Streuprozess verbundenen Nucleon-Übergänge. Was den Wirkungsquerschnitt für die Streuung in den Raumwinkel $d\Omega$ anlangt, wollen wir ihn hier nur angeben in der Summe über alle Endpolarisationen l, σ und im Mittel über alle Anfangspolarisationen l_0, σ_0 (wobei die nicht gestreuten longitudinalen Mesonen mitgezählt sind):

$$\frac{dQ}{d\Omega} = \left(\frac{3}{2} a \beta^2\right)^2 \cdot \frac{1}{9} \sum_{l\sigma, l_0\sigma_0} f_{l\sigma, l_0\sigma_0}^2 = a^2 \beta^4 \cdot \frac{1}{16} \{5 + (\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s}_0)^2\} \cdot {}^1 \quad (10.5)$$

Schliesslich ist zu bemerken, dass die der Schwingungsenergie $K - H^1$ entsprechende „Nullpunktsenergie“, da sie von derjenigen des kräftefreien Mesonfeldes abweicht, einen Beitrag zur Selbstenergie des Nucleons liefert, der jedoch spin- und ladungsunabhängig und daher ohne Interesse ist.

C. Allgemeiner Kopplungsansatz.

§ 11. Die Extremallagen.

Wir kehren zum allgemeinen Fall $f \neq 0, g \neq 0$ zurück und bestimmen zunächst wieder die Eigenwerte von H' (3.13). Für den Term $\sim g$ können die Formeln (4.2 bis 8) unverändert übernommen werden; die Hinzufügung des Terms $\sim f$ in (4.8) ergibt dann:

$$H' = \gamma \cdot Y Y' \cdot \left\{ \sum_n r_n \sigma_n \tau_n + \sum_n u_n \tau_n \right\} \cdot (Y Y')^*, \quad (11.1)$$

$$u_n = \frac{f}{g} \sum_{i_0} p_{i i_0} s_{0n} \quad (11.2)$$

(vgl. (4.4, 7)). Das Eigenwertproblem dieser 4-reihigen Matrix hat folgende charakteristische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} -\lambda + r_3 + u_3 & u_1 - i u_2 & 0 & r_1 - r_2 \\ u_1 + i u_2 & -\lambda - r_3 - u_3 & r_1 + r_2 & 0 \\ 0 & r_1 + r_2 & -\lambda - r_3 + u_3 & u_1 - i u_2 \\ r_1 - r_2 & 0 & u_1 + i u_2 & -\lambda + r_3 - u_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (11.3)$$

Die 4 Wurzeln λ_m dieser biquadratischen Gleichung sind in der

¹ In IV (letzte Formel) wurde dieser Streuquerschnitt um einen Faktor 3 zu gross angegeben. — Wenn, statt über die Anfangsladungen des Mesons, über die Anfangszustände des Nucleons gemittelt wird, ist das Ergebnis das gleiche.

Form (2.2) darstellbar, wo y_1^2, y_2^2, y_3^2 sich als Wurzeln der kubischen Gleichung („Resolvente“)

$$z^3 - z^2 \sum_n (r_n^2 + u_n^2) + z \left\{ \sum_{n < m} r_n^2 r_m^2 + \sum_n r_n^2 u_n^2 \right\} - r_1^2 r_2^2 r_3^2 = 0 \quad (11.4)$$

berechnen lassen; d. h. die y_n können durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \sum_n y_n^2 &= \sum_n (r_n^2 + u_n^2) \\ \sum_{n < m} y_n^2 y_m^2 &= \sum_{n < m} r_n^2 r_m^2 + \sum_n r_n^2 u_n^2 \\ y_1 y_2 y_3 &= r_1 r_2 r_3 \quad (y_n \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

bestimmt werden. Berechnet man nämlich mit Hilfe von (2.2) und (11.5) die Grössen $-\sum_i \lambda_i$, $\sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j$, $-\sum_{i < j < k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k$ und $\prod_i \lambda_i$, so ergeben sich gerade die Koeffizienten der Gleichung (11.3). Wir denken uns die y_n vermöge (11.5) als Funktionen der r_n und u_n berechnet; eine allgemeine explizite Darstellung dieser Funktionen wird sich erübrigen.

Zur Bestimmung des Minimums von K (2.6) gehen wir wieder von dem Variationsproblem (5.3) aus, wo aber in K jetzt $\sum y_n$ anstelle von $\sum r_n$ auftritt. Während die Gleichungen (5.4), und damit auch (5.6 und 7), unverändert gelten, hat man anstelle von (5.5):

$$\gamma \frac{\partial \sum_n y_n}{\partial r_m} - \sum_{\langle i k \rangle_q} \alpha_{\langle i k \rangle_q} s'_{\langle i k \rangle_m} s_{qm} = 0;$$

oder mit (5.7) und (6.1):

$$r_m = F \frac{\partial \sum_n y_n}{\partial r_m}. \quad (11.6)$$

Andererseits ist K jetzt nicht mehr rein quadratisch von den p_{sle} abhängig, und wir haben deshalb $\partial K / \partial p_{sle} = 0$ zu setzen, d. h. nach (2.6), (3.3) und (11.2):

$$\sum_r \sum_k A_{rk,sl} p_{rke} - \gamma \frac{f}{g} \delta_{sl} \sum_m \frac{\partial \sum_n y_n}{\partial u_m} s_{qm} = 0. \quad (11.7)$$

Mit (3.15) ergibt dies:

$$p_{rke} = \gamma \frac{f}{g} \left(\sum_l \bar{A}_{il,rk} \right) \sum_m \frac{\partial \sum_n y_n}{\partial u_m} s_{qm}. \quad (11.8)$$

Bildet man hiermit u_m nach (11.2), so folgt:

$$u_m = \Gamma' \frac{\partial \sum_n y_n}{\partial u_m}, \quad (11.9)$$

$$\Gamma' = \gamma \left(\frac{f}{g} \right)^2 \sum_{kl} \bar{A}_{ll, kk} = 3 \left(\frac{\mu f}{g} \right)^2 \Gamma. \quad (11.10)$$

Die letzte Gleichung ergibt sich aus (3.16), mit (3.5), (3.19) und (6.1), durch Verwendung der Identität $\Delta + \Delta^2 (\mu^2 - \Delta)^{-1} = \mu^2 \Delta (\mu^2 - \Delta)^{-1}$. Als Wert von K in der so bestimmten Extremallage findet man, mit Hilfe von (5.4, 7), (11.2, 7, 9):

$$\overset{\circ}{K} = \frac{\gamma}{2} \sum_m \left(\frac{r_m^2}{\Gamma} + \frac{u_m^2}{\Gamma'} - 2 y_m \right). \quad (11.11)$$

Die Gleichungen (11.6 und 9), die uns zur Bestimmung der möglichen Extremallagen dienen werden, kann man noch umformen, indem man die auf ihren rechten Seiten stehenden Ableitungen der y_n nach den r_m bzw. u_m mit Hilfe von (11.5) ausrechnet:

$$r_m \left\{ 1 - \Gamma \frac{\sum_{n < n'} y_n y_{n'} + \sum_n r_n^2 - r_m^2 + u_m^2 + \frac{r_1 r_2 r_3}{r_m^2} \sum_n y_n}{(y_2 + y_3)(y_3 + y_1)(y_1 + y_2)} \right\} = 0, \quad (11.12)$$

$$u_m \left\{ 1 - \Gamma' \frac{\sum_{n < n'} y_n y_{n'} + r_m^2}{(y_2 + y_3)(y_3 + y_1)(y_1 + y_2)} \right\} = 0. \quad (11.13)$$

Hier sind natürlich die y_n gemäss (11.5) als Funktionen der r_m und u_m zu betrachten.

Die Gleichungen (11.6, 9 bzw. 12, 13) haben mehrere Lösungen, deren $\overset{\circ}{K}$ -Werte wir vergleichen müssen, um das eigentliche Minimum zu finden.

Fall I: Alle $u_m = 0$. Wie in §§ 4 und 5 ist dann

$$y_n = r_n = \Gamma, \quad \overset{\circ}{K}^I = -\frac{1}{2} \gamma \cdot 3 \Gamma. \quad (11.14)$$

Fall II: $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 \neq 0$. Nach (11.4 oder 5) ist dann

$$y_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + u_3^2} \pm \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + u_3^2} \right), \quad y_3 = r_3;$$

$$\text{nach (11.13), } m = 3: \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + u_3^2} = \Gamma';$$

$$\text{nach (11.12), } m = 3: r_3 = \Gamma;$$

(11.12) mit $m = 1, 2$ gibt zwei linear-homogene Gleichungen für

r_1 und r_2 , deren Determinante nur für $\Gamma' = 2 \Gamma$ verschwindet. Es ist also

$$r_1 = r_2 = 0, \quad r_3 = \Gamma, \quad u_3 = \Gamma' \quad (\text{wenn } \Gamma' \neq 2 \Gamma). \quad (11.15)$$

Nach (11.11) ist $\hat{K}^{\text{II}} = -\frac{1}{2} \gamma \cdot (\Gamma + \Gamma')$;

$$\hat{K}^{\text{I}} \leq \hat{K}^{\text{II}}, \text{ je nachdem } \Gamma' \leq 2 \Gamma. \quad (11.16)$$

Fall III: $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0, u_3 = 0$. Dann ist nach (11.13) mit $m = 1, 2$: $r_1 = r_2 = r$. Unter der Voraussetzung $r \neq 0$ folgt weiter aus (11.12) mit $m = 1, 2$: $u_1 = \pm u_2 = u$. (11.4 oder 5) ergibt dann

$$y_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(r + r_3)^2 + 2 u^2} \pm \sqrt{(r - r_3)^2 + 2 u^2} \right), \quad y_3 = r;$$

$$(11.13) \text{ mit } m = 1, 2: \sqrt{(r + r_3)^2 + 2 u^2} = \Gamma';$$

$$(11.12), m = 1, 2, 3: r = \frac{\Gamma(\Gamma' - \Gamma)}{2\Gamma' - 3\Gamma}, \quad r_3 = \frac{\Gamma^2}{2\Gamma' - 3\Gamma}.$$

Damit u reell wird, muss $r + r_3 \leq \Gamma'$ sein, d. h. $\Gamma' \geq 2 \Gamma$; andernfalls existiert das Extremum III (mit $r \neq 0$) nicht. Nach (11.11):

$$\hat{K}^{\text{III}} = -\frac{1}{2} \gamma \cdot \left(\Gamma' + \frac{\Gamma(\Gamma' - \Gamma)}{2\Gamma' - 3\Gamma} \right).$$

Im Sonderfall $r = 0$ wird $y_1 = y_2 = 0, y_3 = \sqrt{r_3^2 + u_1^2 + u_2^2}$; damit gibt (11.6, 9): $y_3 = \Gamma'$ und (falls $\Gamma' \neq \Gamma$) $r_3 = 0$, d. h. alle $r_n = 0$. Dies ist der später zu behandelnde Fall V.

Fall IV: Alle $u_m \neq 0$. Dann ist nach (11.13): $r_1 = r_2 = r_3 = r$, und nach (11.12), sofern $r \neq 0$: $u_1^2 = u_2^2 = u_3^2 = u^2$. ($r = 0$ führt wieder auf Fall V.) Für $r \neq 0$ wird

$$y_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{4 r^2 + 3 u^2} \pm \sqrt{3 u^2} \right), \quad y_3 = r;$$

$$\text{nach (11.13): } \sqrt{4 r^2 + 3 u^2} = \Gamma', \quad \text{nach (11.12): } r = \frac{\Gamma \Gamma'}{3 \Gamma' - 4 \Gamma}.$$

Das Extremum IV existiert nur, wenn $2 r \leq \Gamma'$, d. h. wieder: $\Gamma' \geq 2 \Gamma$. Nach (11.11): $\hat{K}^{\text{IV}} = -\frac{1}{2} \gamma \cdot \Gamma' \left(1 + \frac{\Gamma}{3 \Gamma' - 4 \Gamma} \right)$.

Falls die Extrema III, IV überhaupt existieren ($\Gamma' \geq 2 \Gamma$), gilt:

$$\hat{K}^{\text{IV}} \geq \hat{K}^{\text{III}} \geq \hat{K}^{\text{II}}.$$

Die Fälle III, IV kommen daher für das Minimum nicht in Betracht, ausser in dem Sonderfall $\Gamma' = 2 \Gamma$, wo die Extremalwerte \hat{K} für I bis IV alle zusammenfallen.

Fall V: Alle $r_m = 0$. Man hat dann $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = \sqrt{\sum_m u_m^2} = I'$ (nach (11.9)); $K^V = -\frac{1}{2} \gamma \cdot I' > K^{\text{II}}$; auch dieser Fall scheidet also aus.

Nach (11.16) (vgl. auch (11.10)) lautet das Ergebnis: *Das stabile Gleichgewicht des Systems entspricht*

$$\text{Fall I, wenn } \frac{I'}{2 I} = \frac{3}{2} \left(\frac{\mu f}{g} \right)^2 < 1,$$

$$\text{Fall II, wenn } \frac{I'}{2 I} = \frac{3}{2} \left(\frac{\mu f}{g} \right)^2 > 1.$$

Wir nehmen im Folgenden $I' / 2 I$ so weit verschieden von 1 an, dass das tiefste Minimum genügend tief unterhalb des nächst höheren Extremums liegt, dass die Schwingungen um die Gleichgewichtslage als harmonisch gelten können. Ist $a \mu \ll 1$, so trifft dies jedenfalls für alle wichtigen Anwendungen zu, wenn

$$\frac{I'}{2 I} - 1 < -\left(\frac{a}{g}\right)^2 \text{ (Fall I) oder } \frac{I'}{2 I} - 1 > \frac{a}{g} \text{ (Fall II).}$$

Zur Behandlung der kleinen Schwingungen müssen wir die Wurzel $\lambda_0 = -\sum_n y_n$ der Gleichung (11.3) nicht nur im Minimum, sondern auch in dessen Umgebung kennen. Dazu genügt eine Störungsrechnung, und zwar eine „zweite Näherung“, da ja die Anharmonizitäten vernachlässigt werden sollen. Zur Durchführung der Rechnung setzt man zweckmässig (vgl. (4.9, 10)):

$$\begin{aligned} & \sum_n r_n \sigma_n \tau_n + \sum_n u_n \tau_n \\ = & \begin{cases} -Z(r_1 \tau_3 + r_2 \sigma_3 + r_3 \sigma_3 \tau_3) Z^* + \left\{ \sum_n u_n \tau_n \right\} \text{ im Fall I,} \\ (r_3 \sigma_3 \tau_3 + u_3 \tau_3) + \left\{ \sum_{n=1,2} (r_n \sigma_n \tau_n + u_n \tau_n) \right\} \text{ im Fall II,} \end{cases} \end{aligned}$$

wo jeweils der zweite, in geschweifter Klammer geschriebene Term als kleine „Störungsmatrix“ zu betrachten ist. Bei Berücksichtigung von (11.14, 15) ergibt die Störungsrechnung:

$$\gamma \lambda_0 = -\gamma \sum_n y_n = \begin{cases} -\gamma \left[\sum_n r_n + \frac{1}{4 I} \sum_m u_m^2 \right] & \text{für } I' < 2 I \text{ (Fall I),} \\ -\gamma \left[r_3 + u_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{(r_1 + r_2)^2}{I'} + \frac{u_1^2 + u_2^2}{I + I'} \right) \right] & \text{für } I' > 2 I \text{ (Fall II).} \end{cases} \quad (11.17)$$

Im Falle $\Gamma' < 2 \Gamma$ ist der Energieterm

$$-\frac{\gamma}{4\Gamma} \sum_m u_m^2 = -\frac{1}{4C} \left(\frac{f}{g}\right)^2 \sum_e \left(\sum_i p_{ii_e}\right)^2 \quad (11.18)$$

der *einzig* Zusatz, der zu den für $f = 0$ berechneten K -Termen (§§ 5 bis 10) hinzukommt (nach (6.19) und (7.3) ist $p_{ii_e} = p''_{ii_e}$), und zwar beschreibt dieser Term eine Kopplung der longitudinalen Mesonen an das Nucleon. Er lässt die Eigenfrequenzen $\omega_k = \sqrt{\mu^2 + k^2}$ der kleinen Schwingungen unverändert, ausser der tiefsten Frequenz ω_0 , die, wenn man $\Gamma' / 2 \Gamma$ von 0 gegen 1 anwachsen lässt, bei einem bestimmten Werte von $\Gamma' / 2 \Gamma$ sich vom kontinuierlichen Spektrum ablöst¹⁾ und von μ gegen 0 abnimmt; für $\Gamma' / 2 \Gamma > 1$ wird ω_0^2 negativ, d. h. das Gleichgewicht I wird instabil. Im hauptsächlich interessierenden Falle $a \mu \ll 1$ tritt aber die Ablösung der Frequenz ω_0 vom kontinuierlichen Spektrum erst ein, wenn $\Gamma' / 2 \Gamma$ dem Werte 1 sehr nahe gekommen ist:

$$1 - \frac{\Gamma'}{2\Gamma} < \varepsilon, \text{ wo } \varepsilon \sim (a \mu)^2 \ll 1. \quad (11.19)$$

Ferner bewirkt der Zusatzterm (11.18) — ähnlich wie K_S in § 10 — eine Abänderung der Normalschwingungen, die dem Auftreten von Streuwellen im Ortsraum entspricht, und zwar handelt es sich hier um eine *Streuung der longitudinalen Mesonen*. Diese Streuung ist aber sehr schwach im Vergleich zu der in § 10 berechneten K_S -Streuung der transversalen Mesonen (der Streuquerschnitt ist mindestens um einen Faktor $\sim (a \omega)^4$ kleiner, wenn wie in § 10 $a \omega \ll 1$ vorausgesetzt wird), ausser in dem Sonderfall (11.19), wo die Streuung der longitudinalen mit derjenigen der transversalen Mesonen vergleichbar werden kann, nämlich wenn $(a \omega)^2 \gtrsim 1 - \Gamma' / 2 \Gamma$.

Im übrigen bleiben, wie leicht zu sehen ist, alle Formeln der §§ 5 bis 10 unverändert gültig. Wir kommen also zu dem merkwürdigen Ergebnis, dass der zu f proportionale Term im H' -Ansatz (1.4) bei starker Kopplung (vgl. (5.13)) praktisch wirkungslos bleibt, solange $(\mu f / g)^2 < 2/3$, und dies gilt, wie sich zeigen wird, auch für die Kernkräfte. Lässt man aber $|f|$ über den kritischen Wert

¹⁾ Diese Erscheinung ist aus der „Paartheorie“ bekannt; vgl. CRITCHFIELD, Phys. Rev. **59**, S. 48, 1941. Die Frequenz ω_0 bestimmt sich durch die Gleichung

$$\int dX \delta_a(x) \frac{-\Delta}{(\mu^2 - \Delta) - \omega_0^2} \delta_a(x) - \frac{2\Gamma}{\Gamma'} \int dX \delta_a(x) \frac{-\Delta}{\mu^2 - \Delta} \delta_a(x);$$

sie ist eine dreifach zählende Eigenfrequenz (entsprechend den 3 Werten von q).

$\sqrt{2/3} |g| / \mu$ hinaus anwachsen, so ändert sich die Situation grundlegend; diesem Fall wenden wir jetzt unsere Aufmerksamkeit zu:

$$\frac{\Gamma'}{2\Gamma} = \frac{3}{2} \left(\frac{\mu f}{g} \right)^2 > 1. \quad (11.20)$$

§ 12. Translation und Einführung von Winkelkoordinaten.

Im „Falle II“ ist die Gleichgewichtslage nach (11.15) bestimmt durch

$$\dot{r}_1 = \dot{r}_2 = \dot{u}_1 = \dot{u}_2 = 0, \quad \dot{r}_3 = \Gamma, \quad \dot{u}_3 = \Gamma'. \quad (12.1)$$

Damit die Schwingung der Variablen $r_3' = r_3 - \Gamma$ sich trotz der Begrenzung $r_3 \geq 0$ ungestört ausbilden kann, muss wieder die Bedingung (5.13) erfüllt sein, wie eine sinngemässe Übertragung der Überlegung aus § 5 lehrt. Nach (11.20) ist dann auch $\mu |f| \gg a$ für $a\mu \ll 1$ bzw. $f^2 \gg a^5 \mu$ für $a\mu \gg 1$, und der Erwartungswert von $u_3'^2 = (u_3 - \Gamma')^2$ ergibt sich als klein gegen Γ'^2 .

Nach (4.5) und (12.1) wird

$$\dot{q}_{[jk]e} \equiv \dot{q}_{ie} = \Gamma s'_{i3} s_{e3}.$$

s_{13}, s_{23}, s_{33} bilden die Komponenten eines Einheitsvektors \hat{e} :

$$s_{13} = e_1 = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad s_{23} = e_2 = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad s_{33} = e_3 = \cos \vartheta; \quad (12.2)$$

analog:

$$s'_{13} = e'_1 = \sin \vartheta' \cos \varphi', \quad s'_{23} = e'_2 = \sin \vartheta' \sin \varphi', \quad s'_{33} = e'_3 = \cos \vartheta'. \quad (12.3)$$

Für die übrigen Komponenten der orthogonalen Transformation s_{en} können wir dann schreiben:

$$s_{e1} = \cos \psi \frac{\partial e_e}{\partial \vartheta} - \frac{\sin \psi}{\sin \vartheta} \frac{\partial e_e}{\partial \varphi}, \quad s_{e2} = \sin \psi \frac{\partial e_e}{\partial \vartheta} + \frac{\cos \psi}{\sin \vartheta} \frac{\partial e_e}{\partial \varphi};$$

entsprechend für s'_{i1} und s'_{i2} ; die Relationen (4.4) sind damit nämlich erfüllt wegen

$$\sum_e e_e \frac{\partial e_e}{\partial \vartheta} = \sum_e e_e \frac{\partial e_e}{\partial \varphi} = \sum_e \frac{\partial e_e}{\partial \vartheta} \frac{\partial e_e}{\partial \varphi} = 0, \quad \sum_e \left(\frac{\partial e_e}{\partial \vartheta} \right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \sum_e \left(\frac{\partial e_e}{\partial \varphi} \right)^2 = 1; \quad (12.4)$$

$$e_e e_\sigma + \frac{\partial e_e}{\partial \vartheta} \frac{\partial e_\sigma}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial e_e}{\partial \varphi} \frac{\partial e_\sigma}{\partial \varphi} = \delta_{e\sigma}. \quad (12.5)$$

Setzen wir noch zur Abkürzung $r_3 = \Gamma + r_3' = r$, so schreibt sich die Gleichung (4.5):

$$\begin{aligned} q_{ie} = & r e'_i e_e + \xi_1 \frac{\partial e'_i}{\partial \vartheta'} \frac{\partial e_e}{\partial \vartheta} + \xi_2 \frac{\partial e'_i}{\partial \vartheta'} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial e_e}{\partial \varphi} \\ & + \xi_3 \frac{1}{\sin \vartheta'} \frac{\partial e'_i}{\partial \varphi'} \frac{\partial e_e}{\partial \vartheta} + \xi_4 \frac{1}{\sin \vartheta'} \frac{\partial e'_i}{\partial \varphi'} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial e_e}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (12.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= +r_1 \cos \psi' \cos \psi + r_2 \sin \psi' \sin \psi, \quad \xi_2 = -r_1 \cos \psi' \sin \psi + r_2 \sin \psi' \cos \psi, \\ \xi_3 &= -r_1 \sin \psi' \cos \psi + r_2 \cos \psi' \sin \psi, \quad \xi_4 = +r_1 \sin \psi' \sin \psi + r_2 \cos \psi' \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

Anstelle der 9 Variablen q_{ie} führen wir nun die neuen Variablen ein:

$$\vartheta, \quad \varphi, \quad \vartheta', \quad \varphi', \quad r, \quad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \xi_4; \quad (12.8)$$

die dazu konjugierten Impulse seien

$$p_\vartheta, \quad p_\varphi, \quad p'_\vartheta, \quad p'_\varphi, \quad p_r, \quad \pi_1, \quad \pi_2, \quad \pi_3, \quad \pi_4.$$

Die (12.6) entsprechende p -Transformation kann man ähnlich wie in § 6 durch Entwicklung nach den ξ erhalten; das Ergebnis entspricht der Formel (6.15) mit

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_{ie} &= \frac{1}{r} \left\{ e'_i \left(\frac{\partial e_e}{\partial \vartheta} p_\vartheta + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial e_e}{\partial \varphi} p_\varphi \right) \right. \\ &\quad \left. + e_e \left(\frac{\partial e'_i}{\partial \vartheta'} p'_\vartheta + \frac{1}{\sin^2 \vartheta'} \frac{\partial e'_i}{\partial \varphi'} p'_\varphi \right) \right\}, \\ \bar{p}_{ie} &= e'_i e_e p_r + \frac{\partial e'_i}{\partial \vartheta'} \frac{\partial e_e}{\partial \vartheta} \pi_1 + \frac{\partial e'_i}{\partial \vartheta'} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial e_e}{\partial \varphi} \pi_2 \\ &+ \frac{1}{\sin \vartheta'} \frac{\partial e'_i}{\partial \varphi'} \frac{\partial e_e}{\partial \vartheta} \pi_3 + \frac{1}{\sin \vartheta'} \frac{\partial e'_i}{\partial \varphi'} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial e_e}{\partial \varphi} \pi_4. \end{aligned} \right\} \quad (12.9)$$

Mit der Transformation (12.6) ist jetzt wieder die Translation in den anderen q - und p -Richtungen, gemäss (5.6, 7) und (11.8, 9) mit (12.1), zu kombinieren:

$$\left. \begin{aligned} q_{rk e} &= q'_{rk e} + \gamma \sum_{\langle j l \rangle} \bar{B}_{[j l], rk} e'_{\langle j l \rangle} e_e \quad (r > 3), \\ q_{(jk) e} &= q'_{(jk) e}, \quad q_{ii e} = q'_{ii e}; \\ p_{rk e} &= p'_{rk e} + \gamma \frac{f}{g} \sum_l \bar{A}_{l l, rk} e_e \quad (r > 3), \\ p_{(jk) e} &= p'_{(jk) e} \quad (j \neq k), \quad p_{ii e} = p'_{ii e} + \gamma \frac{f}{g} \sum_l \bar{A}_{l l, ii} e_e, \\ p_{[jk] e} &= p_{ie} = p'_{ie} + \sum_s \sum_{l \sigma} (\lambda_{ie, sl \sigma} p'_{sl \sigma} + \mu_{ie, sl \sigma} q'_{sl \sigma}), \\ \text{wo } p'_{ie} &= \bar{p}_{ie} + \bar{\bar{p}}_{ie} + \dots \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (12.10)$$

Diese Formeln, dazu (12.6), stellen eine kanonische Transformation dar, wenn durch Wahl der Koeffizienten λ, μ dafür gesorgt

wird, dass $[p_{ie}, q_{rk\sigma}] = [p_{ie}, p_{rk\sigma}] = 0$; beachtet man (12.5), so kommt (bis auf Terme $\sim \xi$ oder r'_3):

$$\lambda_{ie, rk\sigma} = \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{C} \sum_{\langle jl \rangle} \bar{B}_{jl, rk} [e'_i e'_{\langle jl \rangle} (\delta_{e\sigma} - e_e e_\sigma) \\ & \quad + e_e e_\sigma (\delta_{i\langle jl \rangle} - e'_i e'_{\langle jl \rangle})] + \dots \text{für } r > 3, \\ & 0 \text{ für } r \leq 3; \end{aligned} \right\} \quad (12.11)$$

$$\mu_{ie, rk\sigma} = \frac{1}{C} \frac{f}{g} \sum_l \bar{A}_{il, rk} e'_i (\delta_{e\sigma} - e_e e_\sigma) + \dots \text{(für alle } r).$$

Man sieht leicht ein, dass die beiden Einheitsvektoren \vec{e} und \vec{e}' unabhängig voneinander alle Richtungen durchlaufen müssen, damit der System-Bildpunkt im Raum der q und p alle Minimal-lagen durchläuft. Es variieren also ϑ und ϑ' zwischen 0 und π , φ und φ' zwischen 0 und 2π .

Die Einführung der neuen Variablen in K gibt die (6.22) entsprechende Formel

$$K = H^0(p', q') + K'_S + \frac{1}{2} \sum_{ie} \left[-p_{ie}'^2 + \left\{ p_{ie}' + \sum_s \sum_{l\sigma} (\lambda_{ie, sl\sigma} p'_{sl\sigma} + \mu_{ie, sl\sigma} q'_{sl\sigma}) \right\}^2 \right] + \text{const.} \quad (12.12)$$

Mit K'_S ist der quadratische Term aus (11.17) (Fall II) gemeint, der sich nach (11.2, 10) und (12.7) wie folgt schreibt:

$$K'_S = -\frac{1}{2C} \left\{ \frac{g^2}{3(\mu f)^2} [(\xi_1 + \xi_4)^2 + (\xi_2 - \xi_3)^2] + \frac{f^2}{g^2 + 3(\mu f)^2} \left[\sum_e \left(\sum_i p'_{ie} \right)^2 - \left(\sum_{ie} p'_{ie} e_e \right)^2 \right] \right\}. \quad (12.13)$$

§ 13. Isobaren-Energie und Streuterme.

Es folgt, ähnlich wie in § 7, eine weitere (schwächere) Translation des q - p -Raumes, die zur Abseparation der Isobaren-Energie führen soll. Zur Bestimmung dieser Translation suchen wir wieder das Minimum von K bei konstant gehaltenen p'_{ie} , wobei wir den Term K'_S in (12.12) vorläufig beiseite lassen. Es gelten dann wieder die Formeln (7.2, 3, 4), wo nur p_{ie} jetzt gemäss (12.10) zu interpretieren ist. Dazu kommen die Gleichungen:

$$\frac{\partial K}{\partial q'_{sl\sigma}} = \sum_r \sum_k B_{rk, sl} q'_{rk\sigma} + \sum_{ie} \mu_{ie, sl\sigma} p_{ie} = 0, \text{ oder:}$$

$$q'_{rk\sigma} = - \sum_s \sum_l \bar{B}_{sl, rk} \sum_{ie} \mu_{ie, sl\sigma} p_{ie} \quad (13.1)$$

Wird dies mit (7.3) in $p_{i\sigma}$ (12.10) eingesetzt, so ergibt sich wieder das Gleichungssystem (7.7) für die $p_{i\sigma}$, aber mit folgender Bedeutung der Koeffizienten A (anstelle von (7.6 und 11)):

$$\left. \begin{aligned} A_{i\sigma, j\sigma} &= \sum_{rs} \sum_{kl\tau} (\lambda_{i\sigma, r k \tau} \bar{A}_{r k \tau, sl} \lambda_{j\sigma, sl \tau} + \mu_{i\sigma, r k \tau} \bar{B}_{r k \tau, sl} \mu_{j\sigma, sl \tau}) \\ &= \alpha \cdot e'_i e'_j (\delta_{e\sigma} - e_e e_\sigma) + \beta \cdot e_e e_\sigma (\delta_{ij} - e'_i e'_j), \\ \text{wo } \alpha &= \frac{D}{C^2} \left[1 + 3 \left(\frac{\mu f}{g} \right)^2 \right] - 1, \quad \beta = \frac{D}{C^2} - 1. \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

Die Auflösung der Gleichungen (7.7) nach den $p_{i\sigma}$ ergibt:

$$\left. \begin{aligned} p_{i\sigma} &= p'_{i\sigma} - \frac{\alpha}{1+\alpha} e'_i \sum_j e'_j p'_{j\sigma} - \frac{\beta}{1+\beta} e_e \sum_\sigma e_\sigma p'_{i\sigma} \\ &\quad + \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\beta}{1+\beta} \right) e'_i e_e \sum_{j\sigma} e'_j e_\sigma p'_{j\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (13.3)$$

Für den Minimalwert von K gilt wieder die Formel (7.13); setzt man dort $p_{i\sigma}$ nach (13.3) ein und drückt man die $p'_{i\sigma} = \bar{p}_{i\sigma} + \bar{\bar{p}}_{i\sigma}$ gemäss (12.9) aus, so erhält man mittels der Formeln (12.4):

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma^2} \left(\frac{\Delta}{1+\alpha} + \frac{\Delta'}{1+\beta} \right) + \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \sum_{v=1}^4 \pi_v^2 \right), \\ \Delta &\equiv \frac{1}{\sin \vartheta} p_\vartheta \sin \vartheta p_\vartheta + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}, \quad \Delta' \equiv \frac{1}{\sin \vartheta'} p'_\vartheta \sin \vartheta' p'_\vartheta + \frac{p_{\varphi'}^2}{\sin^2 \vartheta'} \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

Schliesslich kann man noch zeigen, dass die nachträgliche Hinzufügung des Terms K'_S (12.13) in (12.12) an Lage und Wert des Minimums nichts ändert, da nämlich in der Minimallage nach (7.3) $p'_{ii\sigma} = 0$ ist, und ebenso nach (13.1) $q'_{[jk]\sigma} = 0$, daher nach (12.6) $\xi_\nu = 0$.

Verschiebt man jetzt den Ursprung des q - p -Raumes in die Minimallage, so kommt analog zu (7.15, 16):

$$\left. \begin{aligned} K &= K_0 + \frac{1}{2} \sum_{rs}'' \sum_{kl\sigma} A_{r k \sigma, sl\sigma} p''_{r k \sigma} p''_{sl\sigma} + \frac{1}{2} \sum_s'' \sum_{ikl\sigma} A_{(ik), sl\sigma} p''_{(ik)\sigma} p''_{sl\sigma} \\ &\quad + \frac{1}{8} \sum_{ijk l\sigma} A_{(ik), (jl)\sigma} p''_{(ik)\sigma} p''_{(jl)\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{rs}'' \sum_{kl\sigma} B_{r k \sigma, sl\sigma} q''_{r k \sigma} q''_{sl\sigma} + K_S + K'_S, \end{aligned} \right\} \quad (13.5)$$

$$K_S = \frac{1}{2} \sum_{i\sigma} \left[\sum_s'' \sum_{l\sigma} (\lambda_{i\sigma, sl\sigma} p''_{sl\sigma} + \mu_{i\sigma, sl\sigma} q''_{sl\sigma}) \right]^2 \quad (13.6)$$

Die weiteren Überlegungen in § 7 lassen sich sinngemäss übertragen.

Der nächste Schritt ist die Bildung von $S^* K S$. Wir setzen wieder $S = \hat{S} \cdot S'$, wo \hat{S} die Matrix \hat{H}' (d. h. den Wert von H' in

der Minimallage (12.1)) diagonal macht. Setzt man die r_n - und u_n -Werte aus (12.1) in (11.1) ein, so wird

$$\hat{S}^* \hat{H} \hat{S} = \gamma (\Gamma \sigma_3 \tau_3 + \Gamma' \tau_3) \text{ mit } \hat{S} = Y Y', \quad (13.7)$$

wo Y und Y' den Gleichungen (4.7) für $n = 3$ genügen müssen, also mit (12.2, 3):

$$\sum_e \tau_e e_e = Y \tau_3 Y^*, \quad \sum_i \sigma_i e'_i = Y' \sigma_3 Y'^*.$$

Dies leisten die Matrizen

$$\left. \begin{aligned} Y &= \left(\cos \frac{\vartheta}{2} - i \tau_3 \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \left(\cos \frac{\vartheta}{2} - i \tau_2 \sin \frac{\vartheta}{2} \right), \\ Y' &= \left(\cos \frac{\vartheta'}{2} - i \sigma_3 \sin \frac{\vartheta'}{2} \right) \left(\cos \frac{\vartheta'}{2} - i \sigma_2 \sin \frac{\vartheta'}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (13.8)$$

Damit ist $\hat{S} = Y Y'$ bestimmt, und $S' = \hat{S}^{-1} S$ kann störungsmässig durch Entwicklung nach den ξ_v und r'_3 bestimmt werden, spielt aber wie in § 8 keine Rolle.

Wir haben nun das in die Schrödingergleichung (2.7) eingehende Matrixelement $(S^* K S)_{00}$ zu berechnen. Dabei ergibt sich die Isobaren-Energie aus den Termen $\sim \Delta$ und Δ' in K_0 (13.4):

$$H^{\Pi} = \frac{1}{2 \Gamma^2} \left\{ \frac{1}{1 + \alpha} (Y^* \Delta Y)_{00} + \frac{1}{1 + \beta} (Y'^* \Delta' Y')_{00} \right\}. \quad (13.9)$$

Mit (13.4 und 8) wird

$$Y^* [\Delta, Y] = \frac{1}{4} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left\{ \frac{1}{4} - (\tau_3 \cos \vartheta - \tau_1 \sin \vartheta) p_{\varphi} \right\} - \tau_2 (p_{\vartheta} + \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \vartheta)$$

Hier liefern die Terme $\sim \tau_1$ und τ_2 keinen Beitrag zum massgebenden Diagonalelement, in dem überdies $\tau_3 = +1$ zu setzen ist:

$$(Y^* \Delta Y)_{00} = \frac{1}{\sin \vartheta} p_{\vartheta} \sin \vartheta p_{\vartheta} + \frac{p_{\varphi}^2 - \cos \vartheta p_{\varphi} + \frac{1}{4}}{\sin^2 \vartheta} + \frac{1}{4}. \quad (13.10)$$

Entsprechend wird

$$(Y'^* \Delta' Y')_{00} = \frac{1}{\sin \vartheta'} p'_{\vartheta} \sin \vartheta' p'_{\vartheta} + \frac{p'^2_{\varphi} - \cos \vartheta' p'_{\varphi} + \frac{1}{4}}{\sin^2 \vartheta'} + \frac{1}{4}. \quad (13.11)$$

Abgesehen von der anderen Bezeichnung der Winkel und von der additiven Konstanten $1/4$ gleichen die Operatoren (13.10 und 11) dem Operator $\sum_n P_n^2$ in (9.1) mit $p_{\mathcal{U}} = -\frac{1}{2}$. Die Eigenfunktionen von H^{Π} sind daher wieder durch die Kugelkreisel-Eigenfunktionen darstellbar:

$$f = e^{i(n\varphi + m\varphi')} u(\vartheta) u(\vartheta'), \quad (13.12)$$

wo n und m halbzahlig sein müssen, damit $F = S F'$ die zu fordernde Periodizität in φ und φ' besitzt; und die Eigenwerte von H^{II} sind:

$$E_{kj}^{\text{II}} = \frac{1}{2\Gamma^2} \left\{ \frac{k(k+1)}{1+\alpha} + \frac{j(j+1)}{1+\beta} \right\} + \text{const}, \quad \left. \begin{array}{l} \text{wo } k \geq |n|, j \geq |m|, m, n, j, k \text{ halbzahlig.} \end{array} \right\} \quad (13.13)$$

Hier haben die Koeffizienten von $k(k+1)$ und $j(j+1)$ nach (13.2) mit (6.1) und (7.21, 22) folgende Werte:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } a\mu \ll 1: \frac{1}{2\Gamma^2(1+\alpha)} = \frac{6\pi a}{g^2 + 3(\mu f)^2}, \quad \frac{1}{2\Gamma^2(1+\beta)} = \frac{6\pi a}{g^2}; \\ \text{für } a\mu \gg 1: \frac{1}{2\Gamma^2(1+\alpha)} \sim \frac{1}{g^2 + 3(\mu f)^2}, \quad \frac{1}{2\Gamma^2(1+\beta)} \sim \frac{1}{g^2}. \end{array} \right\} \quad (13.14)$$

Die Untersuchung der Ladungs- und Drehimpulsgrößen (9.4) ergibt als Nucleon-Beiträge:

$$\begin{aligned} e^{\text{II}} &= Y^* \left\{ \frac{1}{2} (1 + \tau_3) + p_\varphi \right\} Y = \frac{1}{2} + p_\varphi = \frac{1}{2} + n; \\ M_i^{\text{II}} &= Y'^* \left\{ \frac{1}{2} \sigma_i + \frac{1}{\sin \vartheta'} \left(\frac{\partial e_i'}{\partial \varphi'} p_{\vartheta'} - \frac{\partial e_i'}{\partial \vartheta'} p_{\varphi'} \right) \right\} Y' \\ &= \frac{1}{\sin \vartheta'} \left(\frac{\partial e_i'}{\partial \varphi'} p_{\vartheta'} - \frac{\partial e_i'}{\partial \vartheta'} p_{\varphi'} \right) + \frac{\sigma_3}{2} \left(e_i' + \text{ctg } \vartheta' \frac{\partial e_i'}{\partial \vartheta'} \right), \end{aligned} \quad (13.15)$$

$$M_3^{\text{II}} = p_{\varphi'} = m, \quad (13.16)$$

$$\sum_i (M_i^{\text{II}})^2 = \frac{1}{\sin^2 \vartheta'} p_{\vartheta'}^2 \sin^2 \vartheta' p_{\varphi'}^2 + \frac{p_{\varphi'}^2 - \sigma_3 \cos \vartheta' p_{\varphi'} + \frac{1}{4}}{\sin^2 \vartheta'} ,$$

oder, da das massgebende Diagonalelement von $\sum_i (M_i^{\text{II}})^2$ mit demjenigen von $(Y'^* A' Y' - \frac{1}{4})$ (vgl. (13.11)) übereinstimmt:

$$\sum_i (M_i^{\text{II}})^2 = j(j+1). \quad (13.17)$$

Es sind also auch hier j, m die Spinquantenzahlen und $n + \frac{1}{2}$ die Ladungszahl des Nucleons. Die Zahl k , die im „Ladungsspinraum“ die Rolle des Gesamtspins j spielt, hat keine unmittelbare physikalische Bedeutung. — Die 4 Grundzustände, die das Nucleon nach (13.13) besitzt ($k = j = \frac{1}{2}$, $n = \pm \frac{1}{2}$, $m = \pm \frac{1}{2}$), können nach dem Gesagten den bekannten Proton-Neutron-Zuständen zugeordnet werden.

Im Falle $g^2 \ll (\mu f)^2$ wird nach (13.14) der Koeffizient von $j(j+1)$ in E^{II} gross gegen denjenigen von $k(k+1)$. Würde man,

entgegen der Bedingung für starke Kopplung (5.13), g gegen null gehen lassen, so würde die Anregungsenergie der Isobaren vom Spin $j > \frac{1}{2}$ gegen ∞ gehen, d. h. der Spin würde in dieser Grenze auf den Wert $j = \frac{1}{2}$ ($m = \pm \frac{1}{2}$) beschränkt sein, und man könnte statt (13.13, 14), z. B. für $a \mu \ll 1$, einfach schreiben:

$$E^{\text{II}} = \frac{2 \pi a}{(\mu f)^2} \cdot k(k+1), \quad \text{wo } k \geq |n|.$$

Dies ist aber die Isobaren-Energie nach der Theorie mit dem speziellen Kopplungsansatz, den man durch Nullsetzen von g in H' (1.4) erhält (mit $\mu/f \gg a$). Hiernach scheint es, dass die Gültigkeit der Formeln (13.13, 14) nur eine starke f -Kopplung voraussetzt, während g — abgesehen von der durch die Ungleichung (11.20) festgesetzten oberen Schranke — willkürlich wählbar wäre.

Was schliesslich die *Mesonstreuung* anlangt, so kann man ähnlich wie in § 10 — unter denselben Voraussetzungen — begründen, dass das Streuproblem näherungsweise auf Grund der Hamiltonfunktion (10.1) behandelt werden kann, wobei aber K_s jetzt durch (13.6) gegeben ist. Insbesondere liefert auch der Term K_s' (12.13) keinen wesentlichen Beitrag zur Streuung, solange $a \omega \ll 1$.¹⁾ Wir begnügen uns hier mit der Angabe des Resultats für die Streuung *longitudinaler* Mesonen im Sonderfall $g^2 \ll (\mu f)^2$: Mit den gleichen Bezeichnungen wie in (10.4) haben die Eigenschwingungen im Ortsraum folgendes Aussehen:

$$\vec{\psi}_\sigma(x) = s_0 e^{ik_0 x} \delta_{\sigma\sigma_0} - a \beta^2 \cdot s \frac{e^{i|k_0| |x|}}{|x|} \cdot (\delta_{\sigma\sigma_0} - e_\sigma e_{\sigma_0}). \quad (13.18)$$

Die Streuung ist also isotrop; Meson und Nucleon können Ladung austauschen, aber keinen Spin. Der Wirkungsquerschnitt, summiert über die Endladungen und gemittelt über die Anfangsladungen des Mesons, hat den Wert

$$\frac{dQ}{d\Omega} = \frac{2}{3} a^2 \beta^4. \quad (13.19)$$

¹⁾ Hier ist strenggenommen (wie auf S. 580) der Fall $\Gamma'/2 \Gamma \ll 1$ auszunehmen. — Der erste Term in K_s' (12.13) ($\sim [(\xi_1 + \xi_4)^2 + (\xi_2 - \xi_3)^2] = (r_1 + r_2)^2$) beschreibt eine Kopplung der transversalen Mesonen an das Nucleon; dieser Term ist es, der bewirkt, dass für $\Gamma'/2 \Gamma < 1$ das Gleichgewicht II instabil wird; die dafür massgebende Eigenfrequenz ω_0 (sie ist einfach zählend) bestimmt sich durch die Gleichung

$$\int dX \delta_a(x) \frac{-\Delta}{(\mu^2 - \Delta) - \omega_0^2} \delta_a(x) = \frac{\Gamma'}{2 \Gamma} \int dX \delta_a(x) \frac{-\Delta}{\mu^2 - \Delta} \delta_a(x).$$

D. Die Kernkräfte.

§ 14. Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen.

Indem wir N ruhende Nucleonen an den Orten x_ν ($\nu = 0 \dots N-1$) annehmen, setzen wir in der Hamiltonfunktion (1.3), bei gleichbleibendem H^0 (1.1): ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} H' &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_\nu \sum_{i\epsilon} \sigma_i^{(\nu)} \tau_\epsilon^{(\nu)} \int dX \delta_a(x-x_\nu) \operatorname{rot}_i \tilde{\psi}_\epsilon \\ &\quad - f \sum_\nu \sum_{\epsilon} \tau_\epsilon^{(\nu)} \int dX \delta_a(x-x_\nu) \operatorname{div} \tilde{\pi}_\epsilon = \sum_\nu H'_\nu, \\ H'' &= \frac{1}{2} (\mu f)^2 \sum_{\mu\nu} \left(\sum_{\epsilon} \tau_\epsilon^{(\mu)} \tau_\epsilon^{(\nu)} \right) \int dX \delta_a(x-x_\mu) \delta_a(x-x_\nu). \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

Wir entwickeln $\tilde{\psi}$ und $\tilde{\pi}$ wieder gemäss (3.1, 2) nach einem Orthogonalfunktionensystem, über dessen $3N$ erste Funktionen wir wie folgt verfügen:

$$U_{3\nu+i}(x) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \delta_a(x-x_\nu)}{\partial x_i} \quad (\nu = 0, 1 \dots N-1; i = 1, 2, 3). \quad (14.2)$$

Dabei sind die Abstände $|x_\mu - x_\nu|$ je zweier Nucleonen so gross angenommen, dass die Formfunktionen δ_a verschiedener Nucleonen nicht überlappen:

$$\delta_a(x-x_\mu) \delta_a(x-x_\nu) = 0 \text{ für } \mu \neq \nu. \quad (14.3)$$

Dann sind die $3N$ Funktionen (14.2) automatisch aufeinander orthogonal und normiert (vgl. (1.2), (3.6)). Mit (14.2) ergibt sich für H'_ν (vgl. (14.1)) die (3.14) entsprechende Darstellung:

$$H'_\nu = \eta \left\{ g \sum_{\langle jk \rangle \epsilon} \sigma_{\langle jk \rangle}^{(\nu)} \tau_\epsilon^{(\nu)} q_{3\nu+[j,k],\epsilon} + f \sum_{i\epsilon} \tau_\epsilon^{(\nu)} p_{3\nu+i,i,\epsilon} \right\}, \quad (14.4)$$

wobei, im Sinne der Bezeichnung (3.9)

$$q_{3\nu+[i,k],\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_{3\nu+i,k,\epsilon} - q_{3\nu+k,i,\epsilon}).$$

Der Term H'' (14.1) kann wegen (14.3) ignoriert werden.

Sei S_ν die (von den $\sigma_i^{(\nu)}$, $\tau_\epsilon^{(\nu)}$ des ν -ten Nucleons allein abhängende) unitäre Matrix, die $S_\nu^* H'_\nu S_\nu$ diagonal macht, so wird offenbar die 4^N -reihige Matrix $H' = \sum_\nu H'_\nu$ durch Transformation mit der unitären Matrix

$$S = \prod_\nu S_\nu \quad (14.5)$$

¹⁾ Vgl. QdW, § 14, speziell die dortigen Formeln (14.2, 3 und 10, 11).

auf Diagonalform gebracht. Die Eigenwerte von H' sind Summen der nach § 11 zu berechnenden Eigenwerte der H'_ν ; speziell der hauptsächlich interessierende tiefste H' -Eigenwert wird $= -\gamma \sum_\nu \sum_n y_n^{(\nu)}$, wo die $y_n^{(\nu)}$ sich wie folgt berechnen: man setze gemäss (5.2) und (11.2)

$$q_{3\nu+[i,k],e} = \sum_n r_n^{(\nu)} s'_{\langle ik \rangle n} s_{en}^{(\nu)}, \quad u_n^{(\nu)} = \frac{f}{g} \sum_{i,e} p_{3\nu+i,i,e} s_{en}^{(\nu)}; \quad (14.6)$$

dann ist $y_n^{(\nu)}$ als Funktion der $r_m^{(\nu)}$ und $u_m^{(\nu)}$ durch die (für jedes ν einzeln geltenden) Gleichungen (11.5) bestimmt. Die Überlegungen des § 2 — entsprechend ergänzt — führen dann wieder auf die einkomponentige Schrödingergleichung (2.7) mit

$$K = H^0 - \gamma \sum_\nu \sum_n y_n^{(\nu)}, \quad (14.7)$$

und bei starker Kopplung reduziert sich das Problem wiederum auf die Aufgabe, die kleinen Schwingungen um eine Gleichgewichtslage zu untersuchen. Um die *Kernkräfte* in einer ersten Näherung zu bestimmen, genügt sogar schon die Bestimmung der Gleichgewichtslage und des entsprechenden K -Wertes. Denn die potentielle Energie der statischen Kräfte ist nichts anderes als der abstandsabhängige Teil der „Selbstenergie“ des Nucleonensystems, und die Selbstenergie ist in einer ersten Näherung (Beschränkung auf die Terme höchster Ordnung in g und f) durch den Minimalwert von $(S^* K S)_{00}$ oder von K gegeben. Nur in dieser Näherung sollen die Kernkräfte hier untersucht werden.

Zur Bestimmung des Minimums variieren wir zunächst wieder die Variablen q_{slq} und $r_m^{(\nu)}$ unter Berücksichtigung der „Nebenbedingungen“ (14.6) ($s'_{in}^{(\nu)} s_{en}^{(\nu)} = \text{const}$):

$$dK - \sum_\nu \sum_{\langle ik \rangle e} \alpha_{\langle ik \rangle e}^{(\nu)} \cdot d(q_{3\nu+[i,k],e} - \sum_n r_n^{(\nu)} s'_{\langle ik \rangle n} s_{en}^{(\nu)}) = 0, \\ \sum_r \sum_k B_{rk,sl} q_{rke} - \sum_\nu \sum_{\langle ik \rangle} \alpha_{\langle ik \rangle e}^{(\nu)} \delta_{s,3\nu+[i,k]l} = 0, \quad (14.8)$$

$$\gamma \frac{\partial \sum_n y_n^{(\nu)}}{\partial r_m^{(\nu)}} - \sum_{\langle ik \rangle e} \alpha_{\langle ik \rangle e}^{(\nu)} s'_{\langle ik \rangle m} s_{em}^{(\nu)} = 0. \quad (14.9)$$

Bei der Variation der p_{slq} andererseits sind die $u_n^{(\nu)}$ gemäss (14.6) als Funktionen der p zu betrachten (vgl. (11.7)):

$$\frac{\partial K}{\partial p_{slq}} = \sum_r \sum_k A_{rk,sl} p_{rke} - \gamma \frac{f}{g} \sum_\nu \delta_{s,3\nu+l} \sum_m \frac{\partial \sum_n y_n^{(\nu)}}{\partial u_m^{(\nu)}} s_{em}^{(\nu)} = 0. \quad (14.10)$$

Aus (14.6, 8, 9, 10) folgt, dass im Minimum

$$\sum_{rs} \sum_{klq} B_{rk,sl} q_{rkq} q_{slq} = \gamma \sum_v \sum_m \frac{\partial \sum_n y_n^{(v)}}{\partial r_m^{(v)}} r_m^{(v)},$$

$$\sum_{rs} \sum_{klq} A_{rk,sl} p_{rkq} p_{slq} = \gamma \sum_v \sum_m \frac{\partial \sum_n y_n^{(v)}}{\partial u_m^{(v)}} u_m^{(v)};$$

folglich wird nach (14.7) und (3.3) der Minimalwert von K :

$$K_{\min} = \frac{\gamma}{2} \sum_v \sum_m \left(\frac{\partial \sum_n y_n^{(v)}}{\partial r_m^{(v)}} r_m^{(v)} + \frac{\partial \sum_n y_n^{(v)}}{\partial u_m^{(v)}} u_m^{(v)} - 2 y_m^{(v)} \right) \quad (14.11)$$

Analog zu (5.6, 7) schliessen wir aus (14.8):

$$q_{rkq} = \sum_v \sum_{\langle jl \rangle} \bar{B}_{3v+[j,l],rk} \alpha_{\langle jl \rangle}^{(v)},$$

$$q_{3\mu+[i,k],q} = \sum_m r_m^{(\mu)} s'_{\langle ik \rangle} s_{qm}^{(\mu)} = \sum_v \sum_{\langle jl \rangle} \bar{B}_{3v+[j,l],3\mu+[i,k]} \alpha_{\langle jl \rangle}^{(v)}. \quad (14.12)$$

Die $9N$ Gleichungen (14.12) können zur Berechnung der Lagrange-Multiplikatoren $\alpha_{\langle jl \rangle}^{(v)}$ dienen, worauf diese in (14.9) einzusetzen sind. Andererseits folgt aus (14.10), in Analogie zu (11.9):

$$u_m^{(\mu)} = \gamma \left(\frac{f}{g} \right)^2 \sum_v \left(\sum_{kl} \bar{A}_{3v+l,l,3\mu+k,k} \right) \sum_{m'} \frac{\partial \sum_n y_n^{(v)}}{\partial u_{m'}^{(v)}} \sum_q s_{qm}^{(v)} s_{qm'}^{(\mu)}. \quad (14.13)$$

Aus den Gleichungen (14.9, 12 und 13) sind die q_{rkq} und p_{rkq} mit $r > 3N$ eliminiert.

Im Folgenden sollen diese Gleichungen näherungsweise gelöst werden unter der Annahme, dass die Abstände aller Nucleonenpaare gross gegen den Nucleonradius a sind:

$$|x_\mu - x_\nu| \gg a \text{ für } \mu \neq \nu. \quad (14.14)$$

Im Limes unendlich grosser Abstände verschwinden nämlich $\bar{B}_{3v+[j,l],3\mu+[i,k]}$ und $\sum_{kl} \bar{A}_{3v+l,l,3\mu+k,k}$ für $v \neq \mu$ (vgl. die folgenden Formeln (15.7) und (16.6)) und die Lösungen von (14.9, 12, 13) entsprechen dann denjenigen des Ein-Nucleonproblems: $\alpha_{iq}^{(v)} \rightarrow \bar{\alpha}_{iq}^{(v)}$, $r_n^{(v)} \rightarrow \bar{r}_n^{(v)}$, $u_n^{(v)} \rightarrow \bar{u}_n^{(v)}$. Im Falle (14.14) genügt es daher in erster Näherung, in den Gleichungen (14.12 und 13) auf den rechten Seiten in den „kleinen“ Termen $v \neq \mu$ die α und $\partial y / \partial u$ durch ihre Werte nullter Näherung zu ersetzen; d. h. mit (5.7) (auch für $f \neq 0$ gültig!) und (11.9, 10) (vgl. auch (3.19) und (4.4)):

$$\sum_m r_m^{(\mu)} s'_{\langle ik \rangle} s_{qm}^{(\mu)} = C \alpha_{\langle ik \rangle}^{(\mu)}$$

$$+ \frac{1}{C} \sum_v \sum_{\langle jl \rangle} \bar{B}_{3v+[j,l],3\mu+[i,k]} \sum_n \bar{r}_n^{(v)} s'_{\langle jl \rangle} s_{qn}^{(v)}, \quad (14.15)$$

$$u_n^{(\mu)} = \Gamma' \frac{\partial \sum_n y_n^{(\mu)}}{\partial u_n^{(\mu)}} + \frac{\gamma}{\Gamma'} \left(\frac{f}{g} \right)^2 \sum_v' \left(\sum_{k,l} \bar{A}_{3\,v+l, l, 3\, \mu+k, k} \right) \sum_n \dot{u}_n \sum_q s_{en}^{(v)} s_{qm}^{(\mu)}. \quad (14.16)$$

Setzt man die α aus (14.15) in (14.9) ein, so folgt (vgl. (4.4), (6.1)):

$$r_m^{(\mu)} = \Gamma' \frac{\partial \sum_n y_n^{(\mu)}}{\partial r_m^{(\mu)}} + \frac{1}{C} \sum_v' \sum_{\langle i k \rangle \langle j l \rangle} \bar{B}_{3\,v+[j, l], 3\, \mu+[i, k]} \sum_n \dot{r}_n s_{<j l> n}^{(v)} s_{<i k> m}^{(\mu)} \cdot \sum_q s_{qn}^{(v)} s_{qm}^{(\mu)}. \quad (14.17)$$

Diese Gleichungen (14.16, 17) treten jetzt an die Stelle der Gleichungen (11.9, 6) des Ein-Nucleon-Problems. Setzen wir in ihnen

$$r_n^{(v)} = \dot{r}_n + \delta r_n^{(v)}, \quad u_n^{(v)} = \dot{u}_n + \delta u_n^{(v)}, \quad (14.18)$$

so haben wir konsequenterweise alle in den δr , δu quadratischen und höheren Terme zu vernachlässigen. Was die \dot{r}_n , \dot{u}_n anlangt, werden wir wieder die beiden Fälle $\Gamma' \leq 2\Gamma$ zu unterscheiden haben; denn die Frage, welches der in § 11 diskutierten Extrema das eigentliche Minimum darstellt, wird — (14.14) vorausgesetzt — schon in der „nullten Näherung“ entschieden.

$$\S 15. \text{ Fall I: } \frac{3}{2} \left(\frac{\mu f}{g} \right)^2 < 1.$$

In diesem Falle ist nach § 11

$$\dot{r}_n = \Gamma' = \gamma C, \quad \dot{u}_n = 0 \quad \text{für alle } n. \quad (15.1)$$

Es ist also $u = \delta u$, und die in den $u_n^{(v)}$ quadratischen Terme sind zu vernachlässigen. Für $\sum_n y_n^{(v)}$ können wir dann die in (11.17) angegebene Näherungsformel heranziehen (für jedes v einzeln):

$$\sum_n y_n^{(v)} = \sum_n r_n^{(v)}, \quad \frac{\partial \sum_n y_n^{(v)}}{\partial r_m^{(v)}} = 1, \quad \frac{\partial \sum_n y_n^{(v)}}{\partial u_m^{(v)}} = \frac{u_m^{(v)}}{2\Gamma'}. \quad (15.2)$$

Hiermit und mit (15.1) gibt (14.16): $u_m^{(\mu)} = 0$, und (14.17):

$$\sum_m r_m^{(\mu)} = 3\Gamma' + \gamma \sum_v' \sum_{\langle i k \rangle \langle j l \rangle} \bar{B}_{3\,v+[j, l], 3\, \mu+[i, k]} \sum_q S_{<j l> q}^{(v)} S_{<i k> q}^{(\mu)} \quad (15.3)$$

wo gemäss (6.2)

$$S_{iq}^{(v)} = \sum_n s_{in}^{(v)} s_{qn}^{(v)}. \quad (15.4)$$

Für den Minimalwert von K , d. h. die Selbstenergie des Nucleonensystems, erhält man aus (14.11) mit (15.2, 3):

$$K_{\min} = -\frac{\gamma}{2} \sum_\mu \sum_m r_m^{(\mu)} = -\frac{3}{2} \gamma \Gamma' N + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu}' V^{(\mu\nu)}, \quad (15.5)$$

$$V^{(\mu\nu)} = -\gamma^2 \sum_{\langle i k \rangle \langle j l \rangle} \bar{B}_{3\,v+[j, l], 3\, \mu+[i, k]} \sum_q S_{<j l> q}^{(v)} S_{<i k> q}^{(\mu)}. \quad (15.6)$$

$V^{(\mu\nu)}$ ist die statische Wechselwirkungsenergie des Nucleonenpaares μ, ν in erster Näherung. Die Fortsetzung der Entwicklung nach Potenzen von $a/|x_\mu - x_\nu|$ würde in (15.5) höhere Terme liefern, die u. a. Mehrkörperkräften entsprechen¹⁾.

Die Koeffizienten \bar{B} in (15.6) berechnen wir auf Grund der Formeln (3.16, 17) und (14.2) unter der Annahme $a\mu \ll 1$, die bewirkt, dass die Formfunktion δ_a in diesen Formeln durch die singuläre δ -Funktion ersetzt werden darf:

$$\bar{B}_{3\nu+[i, \eta], 3\mu+[i, k]} = -\frac{1}{2\eta^2} \left\{ \delta_{ki} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{kj} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} - \delta_{il} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} + \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \right\} \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r}, \quad (15.7)$$

wo $r = |x_\mu - x_\nu|$, $x_i = x_{\mu, i} - x_{\nu, i}$; $\mu \neq \nu$.

Hiermit wird $V^{(\mu\nu)}$ (15.6):

$$V^{(\mu\nu)} = \frac{g^2}{2} \sum_{\varrho} \left\{ \left(\sum_i S_{i\varrho}^{(\mu)} S_{i\varrho}^{(\nu)} \right) A - \left(\sum_i S_{i\varrho}^{(\mu)} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\sum_j S_{j\varrho}^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right\} \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r}. \quad (15.8)$$

Die Grössen $S_{i\varrho}^{(\nu)}$ (15.4), die wir uns gemäss (6.4) als Funktionen Euler'scher Winkel $\Theta_\nu, \Phi_\nu, \Psi_\nu$ dargestellt denken können — zu jedem Nucleon ν gehören 3 Euler'sche Winkel —, haben als Operatoren zu gelten, die auf die Eigenfunktionen der Isobaren-Energien H_ν^I (vgl. (9.1)) der verschiedenen Nucleonen anzuwenden sind; nach diesen Eigenfunktionen sollte ja die Schrödingerfunktion F_0' immer entwickelt werden. Nach (15.6 oder 8) ist also $V^{(\mu\nu)}$ ein Operator oder eine Matrix bezüglich der Ladungs- und Spin-Zustände der Nucleonen μ und ν ; damit ist der *Austauschcharakter* der Kräfte gekennzeichnet.

Wir berechnen speziell die Untermatrix von $V^{(\mu\nu)}$, die sich auf die *Grundzustände beider Nucleonen* μ, ν , d. h. auf deren normale Proton- und Neutron-Zustände bezieht. Dazu benötigen wir die Eigenfunktionen (9.2) für die Grundzustände $j = \frac{1}{2}$, $m = \pm \frac{1}{2}$, $n = \pm \frac{1}{2}$, die wir der bekannten Theorie des symmetrischen Kreisels entnehmen können²⁾:

$$\left. \begin{aligned} f_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} &= c \cdot e^{\frac{i}{2}(\Phi + \Psi)} \sin \frac{\Theta}{2}, & f_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} &= c \cdot e^{\frac{i}{2}(\Phi - \Psi)} \cos \frac{\Theta}{2}, \\ f_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} &= -c \cdot e^{\frac{i}{2}(-\Phi + \Psi)} \cos \frac{\Theta}{2}, & f_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} &= c \cdot e^{\frac{i}{2}(-\Phi - \Psi)} \sin \frac{\Theta}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (15.9)$$

¹⁾ Wie in der Skalartheorie: vgl. I, § 9, insbesondere Gleichung (133).

²⁾ Vgl. z. B. A. SOMMERFELD, l. c. (Fussnote ¹⁾ S. 572), Gleichung (15) auf S. 162. Die Vorzeichen der f_{mn} in (15.9) sind zweckmässig gewählt.

($c = (2\pi^3)^{-1/2}$). Bildet man hiermit für ein bestimmtes Nucleon — der Index ν werde für den Moment fortgelassen — die entsprechende 4-reihige Matrix

$$(m' n' | S_{i_e} | m'' n'') = \int_0^\pi d\Theta \sin \Theta \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{2\pi} d\Psi f_{m' n'}^* S_{i_e} f_{m'' n''},$$

so kann das Ergebnis geschrieben werden:

$$(m' n' | S_{i_e} | m'' n'') = -\frac{1}{8} \cdot (m' | \sigma_i | m'') \cdot (n' | \tau_e | n''), \quad (15.10)$$

wo die zweireihigen Matrizen σ_i und τ_e , die sich auf die Spinquantenzahl $m = \pm \frac{1}{2}$ bzw. auf die Ladungsquantenzahl $n = \pm \frac{1}{2}$ allein beziehen, die Pauli'schen Matrizen in üblicher Darstellung sind:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (15.11)$$

Abkürzend schreiben wir für (15.10), indem wir den Nucleon-Index ν wieder hinzufügen:

$$S_{i_e}^{(\nu)} = -\frac{1}{8} \sigma_i^{(\nu)} \tau_e^{(\nu)}. \quad (15.12)$$

Damit ergibt sich für $V^{(\mu\nu)}$ (15.8), genauer gesagt für die auf die Grundzustände beider Nucleonen bezügliche Untermatrix:

$$\begin{aligned} V^{(\mu\nu)} = \frac{1}{9} \cdot \frac{g^2}{2} \left(\sum_e \tau_e^{(\mu)} \tau_e^{(\nu)} \right) & \left\{ \left(\sum_i \sigma_i^{(\mu)} \sigma_i^{(\nu)} \right) \Delta \right. \\ & \left. - \left(\sum_i \sigma_i^{(\mu)} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\sum_j \sigma_j^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right\} \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r}. \end{aligned} \quad (15.13)$$

Dies ist $1/9$ des Wertes, den man bei Annahme schwacher Kopplung mit der Störungsmethode erhält, wenn der Kopplungsansatz (1.4) mit $f = 0$ gewählt wird.¹⁾ — Wenn die Anregungsenergie der Zustände $j = 3/2$ als gross gelten kann gegenüber den bei einem Nucleonen-Wechselwirkungsproblem ins Spiel kommenden Energien, so wird man V näherungsweise durch die Untermatrix (15.13) darstellen können, unter Vernachlässigung der übrigen Matrixelemente (z. B. $j = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2}$). In diesem Grenzfall sind also die Kräfte bei starker Kopplung die gleichen wie bei schwacher Kopplung, abgesehen vom Zahlfaktor und abgesehen vom Fehlen des in der Störungsrechnung auftretenden Termes $\sim f^2$.

¹⁾ Zu beachten ist, dass der eine Kopplungsparameter in (1.4) mit $g/\sqrt{2}$ bezeichnet wurde, für den man sonst etwa g schreibt. Vgl. auch IV, S. 224, wo $|g_V|^2 = g^2/2$.

§ 16. Fall II: $\frac{3}{2} \left(\frac{\mu f}{g} \right)^2 > 1$.

In diesem Falle sind die \dot{r}_n, \dot{u}_n in (14.18) durch (12.1) bestimmt. Bei Vernachlässigung quadratischer Terme in den δr und δu gibt (11.17):

$$\left. \begin{aligned} \sum_n y_n^{(v)} = r_3^{(v)} + u_3^{(v)}, \quad \frac{\partial \sum_n y_n^{(v)}}{\partial r_3^{(v)}} = \frac{\partial \sum_n y_n^{(v)}}{\partial u_3^{(v)}} = 1, \\ \frac{\partial \sum_n y_n^{(v)}}{\partial r_1^{(v)}} = \frac{\partial \sum_n y_n^{(v)}}{\partial r_2^{(v)}} = \frac{r_1^{(v)} + r_2^{(v)}}{I''}, \quad \frac{\partial \sum_n y_n^{(v)}}{\partial u_m^{(v)}} = \frac{u_m^{(v)}}{I + I'} \text{ für } m = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (16.1)$$

Hiermit und mit (12.1) ergeben die Gleichungen (14.16, 17) für $m = 3$:

$$\left. \begin{aligned} r_3^{(\mu)} = I + \gamma \sum_v \sum_{\langle i k \rangle \langle j l \rangle} \bar{B}_{3 \nu + [j, l], 3 \mu + [i, k]} e'_{\langle j l \rangle}^{(v)} e'_{\langle i k \rangle}^{(\mu)} \sum_e e_e^{(v)} e_e^{(\mu)}, \\ u_3^{(\mu)} = I' + \gamma \left(\frac{f}{g} \right)^2 \sum_v \left(\sum_{k l} \bar{A}_{3 \nu + l, l, 3 \mu + k, k} \right) \sum_e e_e^{(v)} e_e^{(\mu)}, \end{aligned} \right\} \quad (16.2)$$

wo gemäss (12.2, 3)

$$e_e^{(v)} = s_{e3}^{(v)}, \quad e'_i{}^{(v)} = s'_{i3}{}^{(v)} \quad (16.3)$$

Bei konsequenter Vernachlässigung der in $r_1^{(v)}, r_2^{(v)}, u_1^{(v)}, u_2^{(v)}$ quadratischen Terme gibt (14.11) mit (12.1) und (16.1, 2):

$$K_{\min} = -\frac{\gamma}{2} \sum_{\mu} (r_3^{(\mu)} + u_3^{(\mu)}) = -\frac{\gamma}{2} (I + I') N + \frac{1}{2} \sum_{\mu \nu} V^{(\mu \nu)}, \quad (16.4)$$

$$\left. \begin{aligned} V^{(\mu \nu)} &= V_g^{(\mu \nu)} + V_f^{(\mu \nu)}, \\ V_g^{(\mu \nu)} &= -\gamma^2 \sum_{\langle i k \rangle \langle j l \rangle} \bar{B}_{3 \nu + [j, l], 3 \mu + [i, k]} e'_{\langle j l \rangle}^{(v)} e'_{\langle i k \rangle}^{(\mu)} \sum_e e_e^{(v)} e_e^{(\mu)}, \\ V_f^{(\mu \nu)} &= -\gamma^2 \left(\frac{f}{g} \right)^2 \left(\sum_{k l} \bar{A}_{3 \nu + l, l, 3 \mu + k, k} \right) \sum_e e_e^{(v)} e_e^{(\mu)}. \end{aligned} \right\} \quad (16.5)$$

Aus (3.16) und (14.2) folgt:

$$\sum_{k l} \bar{A}_{3 \nu + l, l, 3 \mu + k, k} = \frac{\mu^2}{\eta^2} \int dX \delta_a(x - x_\nu) \left(1 - \frac{\mu^2}{\mu^2 - 1} \right) \delta_a(x - x_\mu).$$

Hier kann der einer „Nahewirkung“ entsprechende Term $\sim \int dX \delta_a(x - x_\nu) \delta_a(x - x_\mu)$ mit Rücksicht auf die Annahmen (14.3 und 14) weggelassen werden¹⁾; es bleibt:

$$\sum_{k l} \bar{A}_{3 \nu + l, l, 3 \mu + k, k} = -\frac{\mu^4}{\eta^2} \frac{e^{-\mu r}}{4 \pi r} (r = |x_\mu - x_\nu| \gg a). \quad (16.6)$$

¹⁾ Im übrigen würde sich dieser Term in V_f gegen den Beitrag von H'' (vgl. (14.1)) bzw. von $(S^* H'' S)_{00}$ gerade wegheben, analog wie in der Störungsrechnung (vgl. QdW, S. 94).

Hiermit und mit (15.7) ergibt (16.5):

$$\left. \begin{aligned} V_g^{(\mu\nu)} &= \frac{g^2}{2} \left(\sum_e e_e^{(\mu)} e_e^{(\nu)} \right) \left\{ \left(\sum_i e_i^{(\mu)} e_i^{(\nu)} \right) \Delta \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_i e_i^{(\mu)} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\sum_j e_j^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right\} \frac{e^{-\mu r}}{4 \pi r}, \\ V_f^{(\mu\nu)} &= (\mu^2 f)^2 \left(\sum_e e_e^{(\mu)} e_e^{(\nu)} \right) \frac{e^{-\mu r}}{4 \pi r}. \end{aligned} \right\} \quad (16.7)$$

Die Einheitsvektoren $\vec{e}^{(\nu)}$, $\vec{e}'^{(\nu)}$ denken wir uns wieder gemäss (12.2, 3) durch Polarwinkel ϑ_ν , φ_ν bzw. ϑ'_ν , φ'_ν dargestellt, und wir fassen sie als Operatoren auf, die auf die Eigenfunktionen der Isobaren-Energien H_ν^{II} (vgl. (13.9, 10, 11)) wirken. Nach (13.12 bis 17) beschreibt der Operator $\sum_e e_e^{(\mu)} e_e^{(\nu)}$ einen Ladungsaustausch zwischen den Nucleonen μ und ν , während die geschweifte Klammer in V_g einen Spin-Austausch-Operator darstellt. Wir berechnen wieder die den Nucleon-Grundzuständen entsprechende Untermatrix $V^{(\mu\nu)}$. Den 4 Grundzuständen eines Nucleons ($k = j = \frac{1}{2}$, $n = \pm \frac{1}{2}$, $m = \pm \frac{1}{2}$) entsprechen folgende 4 Eigenfunktionen f (s. die Fussnote ² S. 592):

$$\left. \begin{aligned} f_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} &= c e^{\frac{i}{2}(\varphi + \varphi')} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta'}{2}, \quad f_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = c e^{\frac{i}{2}(\varphi - \varphi')} \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta'}{2}, \\ f_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} &= c e^{\frac{i}{2}(-\varphi + \varphi')} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta'}{2}, \quad f_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = c e^{\frac{i}{2}(-\varphi - \varphi')} \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta'}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (16.8)$$

($c = (2\pi)^{-1}$). Mit denselben Bezeichnungen wie in (15.10, 11) wird

$$(n' | e_e | n'') = \frac{1}{3} (n' | \tau_e | n''), \quad (m' | e'_i | m'') = \frac{1}{3} (m' | \sigma_i | m''), \quad (16.9)$$

oder in der Schreibweise (15.12): $e_e^{(\nu)} = \frac{1}{3} \tau_e^{(\nu)}$, $e'_i{}^{(\nu)} = \frac{1}{3} \sigma_i^{(\nu)}$. Somit werden die auf die Grundzustände der beiden Nucleonen μ , ν bezüglichen Untermatrizen von V_g und V_f (16.7):

$$\left. \begin{aligned} V_g^{(\mu\nu)} &= \frac{1}{81} \cdot \frac{g^2}{2} \left(\sum_e \tau_e^{(\mu)} \tau_e^{(\nu)} \right) \left\{ \left(\sum_i \sigma_i^{(\mu)} \sigma_i^{(\nu)} \right) \Delta \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_i \sigma_i^{(\mu)} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\sum_j \sigma_j^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right\} \frac{e^{-\mu r}}{4 \pi r}, \\ V_f^{(\mu\nu)} &= \frac{1}{9} \cdot (\mu^2 f)^2 \left(\sum_e \tau_e^{(\mu)} \tau_e^{(\nu)} \right) \frac{e^{-\mu r}}{4 \pi r}. \end{aligned} \right\} \quad (16.10)$$

Hiernach ist V_g gleich $1/81$, V_f gleich $1/9$ des störungstheoretischen Wertes. Qualitativ haben also die Kräfte wieder die gleichen

Eigenschaften wie bei schwacher Kopplung, vorausgesetzt dass die Isobaren-Anregungsenergie so gross ist, dass die höheren Isobaren keine Rolle spielen. Dazu ist aber zu bemerken, dass V_σ — wegen der Zahlfactoren in (16.10) und in Anbetracht der Ungleichung (11.20) — nur klein im Vergleich zu V_τ sein kann, wenigstens für Abstände r der Grössenordnung μ^{-1} ; *die Kräfte können also nur recht schwach spin-abhängig sein.*

Obwohl also die Kräfte — genügende Höhe der Isobaren-Anregungsenergie vorausgesetzt — eine ausgeprägte Ähnlichkeit mit den Kräften bei schwacher Kopplung aufweisen, dürfen doch auch die Unterschiede nicht übersehen werden: Während man es bei schwacher Kopplung durch Wahl des Quotienten $\mu f / g$ erreichen kann, dass die Kräfte vom V_τ - und V_σ -Typus in einem beliebig vorgebbaren Mischungsverhältnis auftreten, hat man bei starker Kopplung entweder reine V_σ -Kräfte (Fall I, vgl. (15.13)) oder eine Mischung mit relativ schwachem V_σ -Anteil (Fall II). Es bleibt allerdings noch zu untersuchen, wie die Kräfte sich in dem — hier ausgeschlossenen — schmalen Übergangsgebiet $(\mu f / g)^2 \approx 2 / 3$ verhalten.¹⁾

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

¹⁾ R. SERBER hat bemerkt, dass die Existenz der höheren Isobaren den Sättigungscharakter der Kernkräfte gefährdet, d. h. zu einem Zusammenbruch der schweren Kerne Anlass geben könnte. Wie F. COESTER (auf Grund der in III vorgeschlagenen Thomas-Fermi-Näherung) gezeigt hat, ist die Vektor- wie auch die Pseudoskalartheorie diesem Einwand nicht ausgesetzt (Diss. Univ. Zürich).

HELVETICA PHYSICA ACTA

VOLUMEN XVI

AUTORENREGISTER – TABLE DES AUTEURS

	Seite
VON ARX, A. und BANTLE, W. (E.T.H. Zürich): Polarisierung und spezifische Wärme von KH_2PO_4	211
VON ARX, A. und BANTLE, W. (E.T.H. Zürich): Der inverse Piezoeffekt von KH_2PO_4	416
BANTLE, W. (E.T.H. Zürich): Gezüchteter KH_2PO_4 -Kristall als Frequenzstabilisator	207
BANTLE, W. (E.T.H. Zürich): s. VON ARX und BANTLE	211 und 416
BANTLE, W. und CAFLISCH, CH.: Der Piezoeffekt des seignette-elektrischen Kristalls KH_2PO_4	235
BANTLE, W., MATTHIAS, B. und SCHERRER, P. (E.T.H. Zürich): Feldstärkeabhängigkeit piezoelektrischer Resonanzfrequenzen bei Seignetteelektrika	209
BÄRTSCH, P. (E.T.H. Zürich): Dielektrisches Verhalten von Perjodaten	218
BERICHT über die Tagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft	203 und 415
BÖMMEL, HANS (Zürich): Zur Ultraschallgeschwindigkeitsmessung in Gasen	423
BRADT, H.: s. HEINE, BRADT und SCHERRER	415
BRADT, H., HEINE, H. G. und SCHERRER, P.: Untersuchung der Paaremission einiger β -Strahler mit Koinzidenz-Zählrohren und mit β -Spektrograph	415
BRADT, H., HEINE, H. G. und SCHERRER, P.: Die Konversionslinien im β -Spektrum des UX	455
BRADT, H., HEINE, H. G. und SCHERRER, P.: Das Problem der Emission leichter positiver Teilchen durch β -Strahler	491
BRADT, H. und SCHERRER, P. (E.T.H. Zürich): Die Zerfallskonstante des ThC'	229
BRADT, H. und SCHERRER, P. (E.T.H. Zürich): Eine Apparatur für Koinzidenzmessungen mit sehr hohem Auflösungsvermögen	251
BRADT, H. und SCHERRER, P. (E.T.H. Zürich): Die Halbwertszeit des ThC'	259
BRASEY, E.: Etude sur l'emploi du pont de Wheatstone pour l'enregistrement continu des variations de résistance électrique	145
CAFLISCH, CH.: s. BANTLE und CAFLISCH	235
DANCOT, H. (Brüssel): s. STAHEL und DANCOT	225
DESSAUER, F. (Fribourg): s. SAXER und DESSAUER	435
FICHTER, R. (Neuhausen): Eigenspannungen in Aluminiumlegierungen	422
FIERZ, M.: Zur Theorie der Kapillarschwingungen eines Flüssigkeitstropfens	365
FREY-WYSSLING, A.: Formdoppelbrechung	437
GIBERT, A., ROGGEN, F. und ROSSEL, J. (E.T.H. Zürich): Kernreaktionen an Chlor und Neutronen	435

	Seite
GREINACHER, H. (Bern): Der Kaskadengenerator als stabilisierte Spannungsquelle	221 und 265
HÄLG, WALTER: Photodissoziation zweiatomarer Moleküle in Ionen bei Einstrahlung zwischen 2200 ÅE und 1700 ÅE	371
HEINE, H. G.: s. BRADT, HEINE und SCHERRER	415, 455 und 491
HEINE, H. G., BRADT, H. und SCHERRER, P. (E.T.H. Zürich): Wilsonkammer-Untersuchung der Paaremission natürlicher β -Strahler	415
HOURIET, A.: Forces nucléaires de la théorie des paires	529
HUBER, O., LIENHARD, O., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.: Der Kernphotoeffekt mit der Lithium-Gammastrahlung: I. Die leichten Elemente bis zum Calcium	33
HUBER, O., LIENHARD, O., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.: Anregung isomerer Zustände durch Kernphotoeffekt	228
HUBER, O., LIENHARD, O., SCHERRER, P. und WÄFFLER, H.: Kernphotoeffekt unter Abspaltung eines Protons: $Mg^{26}(\gamma, p)Na^{25}$	431
HUBER, O., LIENHARD, O. und WÄFFLER, H. (E.T.H. Zürich): Kernphotoeffekte mit der Lithium γ -Strahlung an Titan, Nickel und Kupfer	226
HUBER, O., LIENHARD, O. und WÄFFLER, H. (E.T.H. Zürich): Zur Isomerie des Calciums	431
JOYET, G. (Lausanne): Détermination expérimentale des dimensions des ions légers dans l'air par l'écoulement ionisé unipolaire	204
KISTLER, W. (E.T.H. Zürich): Untersuchung über die rasche Deformation von Aluminium	418
KÖNIG, H. (Bern): Präzisions-Photometrie mit Caesiumzelle und Kombinationsfilter	421
KÖNIG, H. und MÄDER, F. (Bern): Über ein objektives Kolorimeter	419
LABHART, H. und MEDICUS, H. (E.T.H. Zürich): Über den β -Zerfall des RaA und die Entstehung des Elementes 85	225
LABHART, H. und MEDICUS, H. (E.T.H. Zürich): Über den β -Zerfall des Radium A	392
LIENHARD, O.: s. HUBER, LIENHARD, SCHERRER und WÄFFLER	33
LIENHARD, O.: s. HUBER, LIENHARD, SCHERRER und WÄFFLER	228
LIENHARD, O.: s. HUBER, LIENHARD, SCHERRER und WÄFFLER	431
LIENHARD, O.: s. HUBER, LIENHARD und WÄFFLER	226
LIENHARD, O.: s. HUBER, LIENHARD und WÄFFLER	431
LOEBENSTEIN, A.: Die Ausmessung der Feinstruktur akustischer Resonanzen mit dem Hitzdrahtschallmesser	91
LÜDI, F.: Zur Theorie der geschlitzten Magnetfeldröhre	59
LÜDI, F.: III. Ultrakurzwellengenerator mit Phasenfokussierung	136
MÄDER, D.: Untersuchungen an rasch veränderlichen Spektren	503
MÄDER, F.: s. KÖNIG und MÄDER	419
MATTHIAS, B.: Über den piezoelektrisch bedingten ΔE -Effekt der Seignetteelektrika	99
MATTHIAS, B.: s. BANTLE, MATTHIAS und SCHERRER	209
MATTHIAS, B. und SCHERRER, P.: Kristall-Bandpassfilter	432
MEDICUS, H.: s. LABHART und MEDICUS	225
MEDICUS, H.: s. LABHART und MEDICUS	392

	Seite
MEIER, FRANZ J.: Studie über die dynamische Linse	277
MERCIER, ANDRÉ (Berne): Sur la dynamique générale des corps déformables; élasticité et viscosité	205
METZGER, F.: Die Bestimmung des Molekulargewichts frei verdampfender Teilchen	323
METZGER, F. und MIESCHER, E. (Basel): Molekularzustände bei der freien Verdampfung	205
MIESCHER, E.: s. METZGER und MIESCHER	205
MÜLLER, W.: Terme hoher Multiplizität in Molekülspektren.	3
PATRY, J.: Instabilité d'une rangée de tourbillons le long d'une paroi . .	83
PICCARD, A.: L'Audition d'un Concert et d'un Vrombissement lointain et le Scintillement des Etoiles	425
DE QUERVAIN, M. und ZWICKER, B. (E.T.H. Zürich): Beobachtungen über elektrische Elementarbezirke an Seignetteelektrika	216
ROGGEN, F.: s. GIBERT, ROGGEN und ROSSEL	435
ROSSEL, J.: s. GIBERT, ROGGEN und ROSSEL	435
SAXER, L. und DESSAUER, F. (Fribourg): Elektrische Messung kleinster at- mosphärischer Druckschwankungen	435
SCHERRER, P.: s. BANTLE, MATTHIAS und SCHERRER	209
SCHERRER, P.: s. BRADT, HEINE und SCHERRER	415, 455, 491
SCHERRER, P.: s. BRADT und SCHERRER	229
SCHERRER, P.: s. BRADT und SCHERRER	251
SCHERRER, P.: s. BRADT und SCHERRER	259
SCHERRER, P.: s. HEINE, BRADT und SCHERRER	415
SCHERRER, P.: s. HUBER, LIENHARD und WÄFFLER	33
SCHERRER, P.: s. HUBER, LIENHARD, SCHERRER und WÄFFLER	228
SCHERRER, P.: s. HUBER, LIENHARD, SCHERRER und WÄFFLER	431
SCHERRER, P.: s. MATTHIAS und SCHERRER	432
SCHERRER, P.: s. ZWICKER und SCHERRER	214
SCHERRER, WILLY: Über den Begriff des Atoms. III	230
SCHILT, H. (Biel): Über die Gangschwankungen einer Pendeluhr	206
SCHÖNMANN, ERNST: Ultrarotspektren kristalliner und geschmolzener Di- carbonsäuren	343
SIGRIST, W. (E.T.H. Zürich): Streuung schneller Elektronen an Jodkernen und	416 471
STAHEL, E. und DANCOT, H. (Biel und Brüssel): Über die mit komplexen Betastrahlspektren zusammenhängende Gammastrahlung.	225
STÜCKELBERG, E. C. G.: Un principe qui relie la théorie de la relativité et la théorie des quanta	173
STÜCKELBERG, E. C. G. (Genève et Lausanne): Le freinage du rayonnement en théorie des quanta	427
WÄFFLER, H.: s. HUBER, LIENHARD, SCHERRER und WÄFFLER	33
WÄFFLER, H.: s. HUBER, LIENHARD, SCHERRER und WÄFFLER	228
WÄFFLER, H.: s. HUBER, LIENHARD, SCHERRER und WÄFFLER	431
WÄFFLER, H.: s. HUBER, LIENHARD und WÄFFLER	226
WÄFFLER, H.: s. HUBER, LIENHARD und WÄFFLER	431
WEHRLI, M. (Basel): Bindungsenergie einzelner Bindungen und Dissoziations- energie mehratomiger Moleküle	204

	Seite
WENTZEL, G. (Zürich): Zur Theorie der Mesonfelder mit starker Kopplung an Nucleonen	222
WENTZEL, G. (Zürich): Zur Vektormesontheorie.	551
ZUBER, K.: Zur Frage der Resonanzabsorption der 2,62 MeV γ -Strahlung in Blei	407
ZUBER, K.: Zur Frage der Resonanzabsorption von γ -Strahlen	429
ZWICKER, B.: s. DE QUERVAIN und ZWICKER	216
ZWICKER, B. und SCHERRER, P. (E.T.H. Zürich): Elektrooptisches Verhalten von KH_2PO_4 und KD_2PO_4 -Kristallen	214

HELVETICA PHYSICA ACTA

VOLUMEN XVI

INHALTS-VERZEICHNIS — TABLE DES MATIÈRES

Fasciculus I

(1. III. 1943)

Seite

W. MÜLLER. Terme hoher Multiplizität in Molekülspektren	3
O. HUBER, O. LIENHARD, P. SCHERRER und H. WÄFFLER. Der Kernphotoeffekt mit der Lithium-Gammastrahlung: I. Die leichten Elemente bis zum Calcium	33
F. LÜDI. Zur Theorie der geschlitzten Magnetfeldröhre	59
J. PATRY. Instabilité d'une rangée de tourbillons le long d'une paroi	59
A. LOEBENSTEIN. Die Ausmessung der Feinstruktur akustischer Resonanzen mit dem Hitzdrahtschallmesser	91

Fasciculus II

(12. IV. 1943)

BERND MATTHIAS: Über den piezoelektrisch bedingten ΔE -Effekt der Seignettelektrika	99
F. LÜDI. III. Ultrakurzwelligengenerator mit Phasenfokussierung	136
E. BRASEY: Etude sur l'emploi du pont de Wheatstone pour l'enregistrement continu des variations de résistance électrique	145
E. C. G. STUECKELBERG: Un principe qui relie la théorie de la relativité et la théorie des quanta	173

Fasciculus III

(30. VI. 1943)

Bericht über die Tagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft .	203
G. JOYET (Lausanne): Détermination expérimentale des dimensions des ions légers dans l'air, par l'écoulement ionisé unipolaire	204
M. WEHRLI (Basel): Bindungsenergie einzelner Bindungen und Dissoziationsenergie mehratomiger Moleküle	204
ANDRÉ MERCIER (Berne): Sur la dynamique générale des corps déformables; élasticité et viscosité	205

	Seite
F. METZGER und E. MIESCHER (Basel): Molekularzustände bei der freien Verdampfung	205
H. SCHILT (Biel): Über die Gangschwankungen einer Pendeluhr	206
W. BANTLE (E. T. H. Zürich): Gezüchteter KH_2PO_4 -Kristall als Frequenzstabilisator	207
W. BANTLE, B. MATTHIAS und P. SCHERRER (E. T. H. Zürich): Feldstärkeabhängigkeit piezoelektrischer Resonanzfrequenzen bei Seignetteelektrika	209
A. VON ARX und W. BANTLE (E. T. H. Zürich): Polarisierung und spezifische Wärme von KH_2PO_4	211
B. ZWICKER und P. SCHERRER (Zürich E. T. H.): Elektrooptisches Verhalten von KH_2PO_4 - und KD_2PO_4 -Kristallen	214
M. DE QUERVAIN und B. ZWICKER (Zürich E. T. H.): Beobachtungen über elektrische Elementarbezirke an Seignetteelektrika	216
P. BAERTSCHI (E. T. H. Zürich): Dielektrisches Verhalten von Perjoden	218
H. GREINACHER (Bern): Der Kaskadengenerator als stabilisierte Spannungsquelle	221
G. WENTZEL (Zürich): Zur Theorie der Mesonfelder mit starker Kopplung an Nucleonen	222
E. STAHEL (Biel) und H. DANCOT (Brüssel): Über die mit komplexen Betastrahlspektren zusammenhängende Gammastrahlung	225
H. LABHART und H. MEDICUS (E. T. H. Zürich): Über den β -Zerfall des RaA und die Entstehung des Elementes 85	225
O. HUBER, O. LIENHARD und H. WÄFFLER (E. T. H. Zürich): Kernphotoeffekte mit der Lithium γ -Strahlung an Titan, Nickel und Kupfer . .	226
O. HUBER, O. LIENHARD, P. SCHERRER und H. WÄFFLER (E. T. H. Zürich): Anregung isomerer Zustände durch Kernphotoeffekt	228
H. BRADT und P. SCHERRER (E. T. H. Zürich): Die Zerfallskonstante des ThC'	229
WILLY SCHERRER: Über den Begriff des Atoms. III.	230
W. BANTLE und CH. CAFLISCH: Der Piezoeffekt des seignette-elektrischen Kristalls KH_2PO_4	235
H. BRADT und P. SCHERRER: Eine Apparatur für Koinzidenzmessungen mit sehr hohem Auflösungsvermögen	251
H. BRADT und P. SCHERRER: Die Halbwertszeit des ThC'	259
H. GREINACHER: Der Kaskadengenerator als stabilisierte Spannungsquelle .	265
FRANZ J. MEIER: Studie über die dynamische Linse	277

Fasciculus IV

(14. III. 1943)

F. METZGER: Die Bestimmung des Molekulargewichts frei verdampfender Teilchen	323
ERNST SCHÖNMANN: Ultrarotspektren kristalliner und geschmolzener Dicarbonsäuren	343
M. FIERZ: Zur Theorie der Kapillarschwingungen eines Flüssigkeitstropfens .	365

WALTER HÄLG: Photodissoziation zweiatomarer Moleküle in Ionen bei Einstrahlung zwischen 2200 AE und 1700 AE	371
H. LABHART und H. MEDICUS: Über den β -Zerfall des Radium A	392
K. ZUBER: Zur Frage der Resonanzabsorption der 2,62 MeV γ -Strahlung in Blei	407

Fasciculus V

(20. X. 1943)

Compte-rendu de la séance de la Société Suisse de Physique	415
H.-G. HEINE, H. BRADT und P. SCHERRER (E.T.H., Zürich): Wilsonkammer-Untersuchung der Paaremission natürlicher β -Strahler	415
H. BRADT, H.-G. HEINE und P. SCHERRER (E.T.H. Zürich): Untersuchung der Paaremission einiger β -Strahler mit Koinzidenz-Zählrohren und mit β -Spektrograph	415
W. SIGRIST (E.T.H. Zürich): Streuung schneller Elektronen an Jodkernen	416
A. VON ARX und W. BANTLE (E.T.H. Zürich): Der inverse Piezoeffekt von KH_2PO_4	416
W. KISTLER (E.T.H. Zürich): Untersuchung über die rasche Deformation von Aluminium	418
H. KÖNIG und F. MÄDER (Bern): Über ein objektives Kolorimeter	419
H. KÖNIG (Bern): Präzisions-Photometrie mit Caesiumzelle und Kombinationsfilter	421
R. FICHTER (Neuhausen): Eigenspannungen in Aluminiumlegierungen	422
HANS BÖMMEL (Zürich): Zur Ultraschallgeschwindigkeitsmessung in Gasen	423
A. PICCARD: L'Audition d'un Concert et d'un Vrombissement lointain et le Scintillement des Etoiles	425
E. C. G. STUECKELBERG (Genève et Lausanne): Le freinage du rayonnement en théorie des quanta	427
K. ZUBER (Zürich): Zur Frage der Resonanzabsorption von γ -Strahlen	429
O. HUBER, O. LIENHARD und H. WÄFFLER (E.T.H. Zürich): Zur Isomerie des Calciums	431
O. HUBER, O. LIENHARD, P. SCHERRER und H. WÄFFLER (E.T.H. Zürich): Kernphotoeffekt unter Abspaltung eines Protons: $\text{Mg}^{26} (\gamma, p) \text{Na}^{25}$	431
B. MATTHIAS (B.B.C. Baden) und P. SCHERRER (E.T.H. Zürich): Kristall-Bandpassfilter	432
A. GIBERT, F. ROGGEN und J. ROSSEL (E.T.H. Zürich): Kernreaktionen an Chlor mit Neutronen	435
L. SAXER und F. DESSAUER (Fribourg): Elektrische Messung kleinster atmosphärischer Druckschwankungen	435
A. FREY-WYSSLING: Formdoppelbrechung	437
H. BRADT, H.-G. HEINE und P. SCHERRER: Die Konversionslinien im β -Spektrum des UX	455
WERNER SIGRIST: Streuung schneller Elektronen an Jodkernen	471
H. BRADT, H.-G. HEINE und P. SCHERRER: Das Problem der Emission leichter positiver Teilchen durch β -Strahler	491

Fascicules VI

D. MÄDER: Untersuchungen an rasch veränderlichen Spektren	503
A. HOURIET: Forces nucléaires de la théorie des pièces	529
G. WENTZEL: Zur Vektormesonentheorie	551
AUTORENREGISTER	597
INHALTSVERZEICHNIS	601